517
Т46

А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

517
Т46

А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Главным управлением высшего образования Министерства культуры СССР в качестве учебника для физических и физико-математических факультетов государственных университетов

Всего: 1 экз
КНХР - 1 ЭЧЗ

БИБЛИОТЕКА
МИФИ

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ СССР — ГЛАВИЗДАТ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1953

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 9
Предисловие к первому изданию 9

Глава I. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными 11

§ 1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка 11

1. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными (11). 2. Классификация уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными (18). 3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (20).

Задачи к главе I 22

Глава II. Уравнения гиперболического типа 23

§ 1. Простейшие задачи, приводящиеся к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач 23

1. Уравнение малых поперечных колебаний струны (23). 2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн (27). 3. Энергия колебаний струны (28). 4. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах (30). 5. Поперечные колебания мембраны (31). 6. Уравнения гидродинамики и акустики (34). 7. Граничные и начальные условия (38). 8. Редукция общей задачи (42). 9. Постановка краевых задач для случая многих переменных (44). 10. Теорема единственности (44). Задачи (47).

§ 2. Метод распространяющихся волн 49

1. Формула Даламбера (49). 2. Физическая интерпретация (51). 3. Устойчивость решений (56). 4. Полуограниченная прямая и метод продолжений (59). 5. Задачи для ограниченного отрезка (65). 6. Дисперсия волн (68). 7. Интегральное уравнение колебаний (73). 8. Распространение разрывов вдоль характеристик (76). Задачи (78).

§ 3. Метод разделения переменных 81

1. Уравнение свободных колебаний струны (81). 2. Интерпретация решения (87). 3. Представление произвольных колебаний в виде суперпозиции стоячих волн (90). 4. Неоднородные уравнения (94). 5. Общая первая краевая задача (101). 6. Краевые задачи со стационарными неоднородностями (102). 7. Задачи без начальных условий (104). 8. Сосредоточенная

сила (108). 9. Общая схема метода разделения переменных (111). Задачи (117).

§ 4. Задача с данными на характеристиках 120

1. Постановка задачи (120). 2. Метод последовательных приближений (122). Задачи (126).

§ 5. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа. 127

1. Сопряженные дифференциальные операторы (127). 2. Интегральная форма решения (128). 3. Физическая интерпретация функции Римана (130). 4. Уравнения с постоянными коэффициентами (133).

Задачи к главе II 138

Приложения к главе II 139

I. О колебании струн музыкальных инструментов 139

II. О колебании стержней 142

III. Колебания нагруженной струны 146

1. Постановка задачи (146). 2. Собственные колебания нагруженной струны (147). 3. Струна с грузом на конце (151). 4. Поправки для собственных значений (151).

IV. Уравнения газодинамики и теория ударных волн 152

1. Уравнения газодинамики. Закон сохранения энергии (152). 2. Ударные волны. Условия динамической совместности (154). 3. Слабые разрывы (160).

V. Динамика сорбции газов 163

1. Уравнения, описывающие процесс сорбции газа (163). 2. Асимптотическое решение (167).

VI. Физические аналогии 174

Глава III. **Уравнения параболического типа** 178

§ 1. Простейшие задачи, приводящиеся к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач 178

1. Линейная задача о распространении тепла (178). 2. Уравнение диффузии (182). 3. Распространение тепла в пространстве (183). 4. Постановка краевых задач (185). 5. Принцип максимального значения (191). 6. Теорема единственности (193). 7. Теорема единственности для бесконечной прямой (196).

§ 2. Метод разделения переменных 197

1. Однородная краевая задача (197). 2. Функция источника (201). 3. Краевые задачи с разрывными начальными условиями (203). 4. Неоднородное уравнение теплопроводности (211). 5. Общая первая краевая задача (214). Задачи (215).

§ 3. Задачи на бесконечной прямой 217

1. Функция источника для неограниченной области (217). 2. Распространение тепла на бесконечной прямой (225). 3. Краевые задачи для полуограниченной прямой (235).

§ 4. Задачи без начальных условий 243

Задачи к главе III 247

Приложения к главе III 250
I. Температурные волны 250
II. Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры 253
III. Метод подобия в теории теплопроводности 258
1. Функция источника для бесконечной прямой (258). 2. Краевые задачи для нелинейного уравнения теплопроводности (261).
IV. Задача о промерзании 262
V. Уравнение Эйнштейна — Колмогорова 267
VI. δ-функция 270
1. Определение δ-функции (270). 2. Разложение δ-функции в ряд Фурье (273). 3. Применение δ-функции к построению функции источника (275).

Глава IV. Уравнения эллиптического типа 279

§ 1. Задачи, приводящиеся к уравнению Лапласа 279
1. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач (279). 2. Потенциальное течение жидкости. Потенциал стационарного тока и электростатического поля (280). 3. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат (282). 4. Некоторые частные решения уравнения Лапласа (285). 5. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного (286). 6. Преобразование обратных радиусов-векторов (288).

§ 2. Общие свойства гармонических функций 290
1. Формулы Грина. Интегральное представление решения (290). 2. Некоторые основные свойства гармонических функций (295). 3. Единственность и устойчивость первой краевой задачи (298). 4. Задачи с разрывными граничными условиями (300). 5. Изолированные особые точки (301). 6. Регулярность гармонической функции в бесконечности (303). 7. Внешние краевые задачи. Единственность решения для двух- и трехмерных задач (304). 8. Вторая краевая задача. Условие регулярности в бесконечности. Теорема единственности (307).

§ 3. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных 310
1. Первая краевая задача для круга (310). 2. Интеграл Пуассона (315). 3. Случай разрывных граничных значений (318).

§ 4. Функции источника 319
1. Функция источника для уравнения $\Delta u = 0$ и ее основные свойства (319). 2. Метод электростатических изображений и функция источника для сферы (324). 3. Функция источника для круга (327). 4. Функция источника для полупространства (328).

§ 5. Теория потенциала 329
1. Объемный потенциал (330). 2. Плоская задача. Логарифмический потенциал (332). 3. Несобственные интегралы (334). 4. Первые производные объемного потенциала (341). 5. Вторые производные объемного потенциала (344). 6. Поверхностные потенциалы (347). 7. Поверхности и кривые Ляпунова (351). 8. Разрыв потенциала двойного слоя (354). 9. Свойства потенциала простого слоя (357). 10. Применение поверхностных потен-

циалов к решению краевых задач (360). 11. Интегральные уравнения, соответствующие краевым задачам (365).

§ 6. Метод конечных разностей 369

1. Понятие о методе конечных разностей для уравнения Лапласа (369). 2. Метод последовательных приближений для решения разностных уравнений (372). 3. Методы моделирования (374).

Задачи к главе IV 375

Приложения к главе IV 378

I. Асимптотическое выражение объемного потенциала 378

II. Задачи электростатики 381

III. Основная задача электроразведки 387

IV. Определение векторных полей 393

V. Применение метода конформного преобразования в электростатике 395

VI. Применение метода конформного преобразования в гидродинамике 399

VII. Бигармоническое уравнение 405

Глава V. Распространение волн в пространстве 410

§ 1. Задача с начальными условиями. Метод усреднения 410

1. Метод усреднения (410). 2. Метод спуска (413). 3. Физическая интерпретация (414). 4. Метод отражения (416).

§ 2. Интегральная формула 417

1. Вывод интегральной формулы (417). 2. Следствия из интегральной формулы (421).

§ 3. Колебания ограниченных объемов 424

1. Общая схема метода разделения переменных. Стоячие волны (424). 2. Колебания прямоугольной мембраны (430). 3. Колебания круглой мембраны (433).

Задачи к главе V 439

Приложения к главе V 441

I. Приведение уравнений теории упругости к уравнениям колебаний 441

II. Уравнения электромагнитного поля 443

1. Уравнения электромагнитного поля и граничные условия (443). 2. Потенциалы электромагнитного поля (447). 3. Электромагнитное поле осциллятора (449).

Глава VI. Распространение тепла в пространстве 456

§ 1. Распространение тепла в неограниченном пространстве 456

1. Функция температурного влияния (456). 2. Распространение тепла в неограниченном пространстве (460).

§ 2. Распространение тепла в ограниченных телах 465

1. Схема метода разделения переменных (465). 2. Остывание круглого цилиндра (468). 3. Определение критических размеров (470).

§ 3. Краевые задачи для областей с подвижными границами 472

1. Формула Грина для уравнения теплопроводности и функция источника (472). 2. Решение краевой задачи (476). 3. Функция источника для отрезка (478).

§ 4. Тепловые потенциалы 481
1. Свойства тепловых потенциалов простого и двойного слоя (481). 2. Решение краевых задач (483).

Задачи к главе VI 485

Приложения к главе VI 487

I. Диффузия облака 487

II. О размагничивании цилиндра с обмоткой 489

III. Метод конечных разностей для уравнения теплопроводности 494

Глава VII. Уравнения эллиптического типа (продолжение) 503

§ 1. Основные задачи, приводящие к уравнению $\Delta v + cv = 0$. . . . 503
1. Установившиеся колебания (503). 2. Диффузия газа при наличии распада и при цепных реакциях (504). 3. Диффузия в движущейся среде (504). 4. Постановка внутренних краевых задач для уравнения $\Delta v + cv = 0$ (505).

§ 2. Функции влияния точечных источников 507
1. Функции влияния точечных источников (507). 2. Интегральное представление решения (509). 3. Потенциалы (512).

§ 3. Задачи для неограниченной области. Принцип излучения . . . 515
1. Уравнение $\Delta v + cv = -f$ в неограниченном пространстве (515). 2. Принцип предельного поглощения (516). 3. Принцип предельной амплитуды (518). 4. Условия излучения (519).

§ 4. Задачи математической теории диффракции 524
1. Постановка задачи (524). 2. Единственность решения задачи диффракции (525). 3. Диффракция на сфере (528).

Задачи к главе VII 535

Приложения к главе VII 538

I. Волны в цилиндрических трубах 538

II. Электромагнитные колебания в полых резонаторах 548
1. Собственные колебания цилиндрического эндовибратора (548). 2. Электромагнитная энергия собственных колебаний (552). 3. Возбуждение колебаний в эндовибраторе (554).

III. Скин-эффект 556

IV. Распространение радиоволн над поверхностью земли 561

Дополнение. Специальные функции 566

Введение 566
1. Уравнения специальных функций (566). 2. Постановка краевых задач в случае $k(a) = 0$ (567).

Часть I. Цилиндрические функции 575

§ 1. Цилиндрические функции 575
1. Степенные ряды (576). 2. Рекуррентные формулы (580). 3. Функции полуцелого порядка (581). 4. Асимптотический порядок цилиндрических функций (583).

§ 2. Краевые задачи для уравнения Бесселя 585

§ 3. Различные типы цилиндрических функций 588
1. Функции Ханкеля (588). 2. Функции Ханкеля и Неймана (590). 3. Функции мнимого аргумента (592). 4. Функция $K_0(x)$ (593).

§ 4. Интегральные представления. Асимптотические формулы . . . 598
1. Интегральные представления для функций целого порядка (598). 2. Асимптотические формулы (601).

§ 5. Интеграл Фурье — Бесселя и некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя 605
1. Интеграл Фурье—Бесселя (605). 2. Некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя (607).

§ 6. Представление цилиндрических функций с помощью контурных интегралов 610
1. Представление цилиндрических функций с помощью контурных интегралов (610). 2. Метод перевала. Асимптотические формулы (616).

Часть II. Сферические функции 619

§ 1. Полиномы Лежандра 619
1. Производящая функция и полиномы Лежандра (619). 2. Рекуррентная формула (621). 3. Уравнение Лежандра (621). 4. Ортогональность полиномов Лежандра (622). 5. Норма полиномов Лежандра (624). 6. Дифференциальная формула для полиномов Лежандра (625). 7. Интегральная формула и ограниченность полиномов Лежандра (627). 8. Присоединенные функции (629). 9. Замкнутость системы присоединенных функций (631).

§ 2. Гармонические полиномы и сферические функции 633
1. Гармонические полиномы (633). 2. Сферические функции (635). 3. Ортогональность системы сферических функций (638). 4. Полнота системы сферических функций (640). 5. Разложение по сферическим функциям (641).

§ 3. Некоторые примеры применения сферических функций 645
1. Поляризация шара в однородном поле (645). 2. Собственные колебания сферы (647). 3. Внешняя краевая задача для сферы (650).

Часть III. Полиномы Чебышева—Эрмита и Чебышева—Лягерра . . . 652

§ 1. Полиномы Чебышева — Эрмита 652

§ 2. Полиномы Чебышева — Лягерра 655

§ 3. Простейшие задачи для уравнения Шредингера 663
1. Уравнение Шредингера (663). 2. Гармонический осциллятор (664). 3. Ротатор (665). 4. Движение электрона в кулоновом поле (666).

Таблицы интеграла ошибок и некоторых цилиндрических функций 671

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании устранены опечатки и неточности, замеченные в первом издании. Некоторые разделы подверглись небольшой переработке. Наибольшие изменения относятся к вводной части раздела о специальных функциях и к главе IV. Написано новое приложение к главе VI, посвященное методу конечных разностей для уравнения теплопроводности.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. И. Смирнову за большое число ценных замечаний, а также А. Г. Свешникову за помощь при подготовке второго издания.

А. Тихонов
А. Самарский

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая книга написана как учебник для студентов-физиков.

Круг вопросов математической физики тесно связан с изучением различных физических процессов. Сюда относятся явления, изучаемые в гидродинамике, теории упругости, электродинамике и т. д. Возникающие при этом математические задачи содержат много общих элементов и составляют предмет математической физики.

Метод исследования, характеризующий эту отрасль науки, является математическим по своему существу. Однако постановка задач математической физики, будучи тесно связанной с изучением физических проблем, имеет свои специфические черты. Так, например, начальная и конечная стадии процесса носят качественно различный характер и требуют применения различных математических методов.

Круг вопросов, относящихся к математической физике, чрезвычайно широк. В предлагаемой книге рассматриваются задачи математической физики, приводящие к уравнениям с частными производными,

Мы стремились подчинить выбор и изложение материала характеристике типичных физических процессов, в связи с чем расположение материала соответствует основным типам уравнений.

Изучение каждого типа уравнений начинается с простейших физических задач, приводящих к уравнениям рассматриваемого типа. Особое внимание уделяется математической постановке задач, строгому изложению решения простейших задач и физической интерпретации получаемых результатов [1]). В каждой главе помещены задачи, преследующие в основном цель развития технических навыков. Некоторые задачи сами по себе представляют физический интерес.

Однако простейшие вопросы, входящие в основной курс, не могут в полной мере дать представления о разнообразии задач, а также о роли и месте математической физики. В связи с этим в конце каждой главы помещены приложения, в которых даются примеры применения изложенных в основном тексте методов к решению различных задач физики и техники, а также приводится ряд примеров, выходящих за рамки задач, рассматриваемых в основном тексте. Выбор таких примеров, несомненно, можно сильно варьировать.

Книга содержит лишь часть материала, входящего в курс методов математической физики. В книгу не входят теория интегральных уравнений и вариационные методы. Приближенные методы изложены недостаточно полно.

Мы сочли возможным ограничиться изложенным здесь материалом, чтобы сократить срок выхода книги.

В основу книги были положены лекции, читавшиеся свыше десяти лет А. Н. Тихоновым на физическом факультете МГУ. Частично содержание этих лекций было отражено в конспектах, изданных в 1948—1949 гг. В предлагаемой книге материал конспектов был расширен и подвергнут коренной переработке.

Мы рады возможности выразить благодарность нашим ученикам и товарищам по работе А. Б. Васильевой, В. Б. Гласко, В. А. Ильину, А. В. Лукьянову, О. И. Панычу, Б. Л. Рождественскому, А. Г. Свешникову и Д. Н. Четаеву, без помощи которых мы вряд ли смогли бы подготовить к печати книгу в короткий срок, а также Ю. Л. Рабиновичу, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

---

[1]) При лекционном изложении курса математической физики мы не ограничиваемся устным пояснением физической интерпретации полученных результатов, а обращаемся там, где это возможно, к демонстрациям математических выводов на физических моделях.

А. Тихонов
А. Самарский

ГЛАВА I

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка. В настоящей главе мы рассмотрим классификацию этих уравнений.

§ 1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка

1. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными. Дадим необходимые определения.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называется соотношение между неизвестной функцией $u(x, y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно [1]):

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Аналогично записывается уравнение и для большего числа независимых переменных.

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят не только от x и y, а являются, подобно F_1, функциями x, y, u, u_x, u_y, то такое уравнение называется *квазилинейным*.

Уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так и относительно

---

[1]) Мы пользуемся следующими обозначениями для производных:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

функции u и ее первых производных u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0, \qquad (2)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f — функции только x и y. Если коэффициенты уравнения (2) не зависят от x и y, то оно представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Уравнение называется *однородным*, если $f(x, y)=0$.

С помощью преобразования переменных

$$\xi=\varphi(x, y), \qquad \eta=\psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному. Естественно поставить вопрос: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму?

В этом пункте мы дадим ответ на поставленный вопрос для уравнений, линейных относительно старших производных вида (1) с двумя независимыми переменными x и y

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x, y, u, u_x, u_y)=0.$$

Преобразуя производные к новым переменным, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,\\
u_y &= u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Подставляя значения производных из (3) в уравнение (1), будем иметь:

$$\bar a_{11}u_{\xi\xi}+2\bar a_{12}u_{\xi\eta}+\bar a_{22}u_{\eta\eta}+\bar F=0, \qquad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar a_{11} &= a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\
\bar a_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\
\bar a_{22} &= a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,
\end{aligned}$$

а функция $\bar F$ не зависит от вторых производных. Заметим, что если исходное уравнение линейно, т. е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y)=b_1u_x+b_2u_y+cu+f,$$

то $\overline{F}$ имеет вид

$$\overline{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta,$$

т. е. уравнение остается линейным [1]).

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\overline{a}_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \tag{5}$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ — какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент $\overline{a}_{11}$, очевидно, будет равен нулю. Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (5).

Докажем следующие леммы.

1. Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0,$$

то соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12}\, dx\, dy + a_{22}\, dx^2 = 0. \tag{6}$$

2. Если $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12}\, dx\, dy + a_{22}\, dx^2 = 0,$$

то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5).

Докажем первую лемму. Поскольку функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5), то равенство

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \tag{7}$$

является тождеством, так как оно удовлетворяется для всех x, y в той области, где задано решение. Соотношение $\varphi(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (6), если функция y, определенная из неявного соотношения $\varphi(x, y) = C$, удовлетворяет уравнению (6). Пусть

$$y = f(x, C)$$

есть эта функция; тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x, C)}, \tag{8}$$

---

[1]) Отметим, что если преобразование переменных линейно, то $\overline{F} = F$, так как вторые производные от ξ и η в формулах (3) равны нулю и $\overline{F}$ не получает дополнительных слагаемых от преобразования вторых производных.

где скобки и значок $y=f(x, C)$ указывают, что в правой части равенства (8) переменную y надо заменить на $f(x, C)$. Отсюда следует, что $y=f(x, C)$ удовлетворяет уравнению (6), так как

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=$$
$$=\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x, C)}=0,$$

причем выражение в квадратных скобках равно нулю при всех значениях x, y, а не только при $y=f(x, C)$.

Докажем вторую лемму. Пусть $\varphi(x, y)=C$ — общий интеграл уравнения (6). Докажем, что

$$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0 \tag{7}$$

для любой точки (x, y). Пусть (x_0, y_0) — какая-нибудь заданная точка. Если мы докажем, что в ней удовлетворяется равенство (7), то отсюда в силу произвольности (x_0, y_0) будет следовать, что равенство (7) есть тождество и функция $\varphi(x, y)$ является решением уравнения (7). Проведем через точку (x_0, y_0) интегральную кривую уравнения (6), полагая $\varphi(x_0, y_0)=C_0$ и рассматривая кривую $y=f(x, C_0)$. Очевидно, что $y_0=f(x_0, C_0)$. Для всех точек этой кривой имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=$$
$$=\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x, C_0)}=0.$$

Полагая в последнем равенстве $x=x_0$, получим:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0y_0)+2a_{12}\varphi_x(x_0y_0)\varphi_y(x_0y_0)+a_{22}\varphi_y^2(x_0y_0)=0,$$

что и требовалось доказать [1]).

Уравнение (6) называется *характеристическим* для уравнения (1), а его интегралы — *характеристиками*.

Полагая $\xi=\varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)=\text{const}$ есть общий интеграл уравнения (6), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y)=\text{const}$ является другим общим интегралом уравнения (6), не зависимым от $\varphi(x, y)$, то, полагая $\eta=\psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

---

[1]) Установленная связь уравнений (5) и (6) эквивалентна известной связи (см. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1937, стр. 287; Смирнов, Курс высшей математики, т. II, 1948, стр. 78) между линейным уравнением с частными производными 1-го порядка и системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом можно убедиться, разлагая левую часть уравнения (5) в произведение двух линейных дифференциальных выражений.

Уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{10}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \tag{1}$$

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением

гиперболического типа, если в точке M $\quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

эллиптического типа, если в точке M $\quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

параболического типа, если в точке M $\quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ [1]).

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных. В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа — комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (9) и (10) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y), \tag{11}$$

приводим уравнение (4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

где

$$\Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

[1]) Эта терминология заимствована из теории кривых 2-го порядка.

Это — так называемая *каноническая* форма уравнений гиперболического типа[1]). Часто пользуются второй канонической формой. Положим

$$\xi = \alpha + \beta, \qquad \eta = \alpha - \beta,$$

т. е.

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где α и β — новые переменные. Тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

В результате уравнение (4) примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1, \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, уравнения (9) и (10) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\varphi(x, y) = \text{const}$. Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta = \eta(x, y),$$

где $\eta(x, y)$ — любая функция, не зависимая от φ. При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0.$$

---

[1]) Для того чтобы было возможно введение новых переменных ξ и η через функции φ и ψ, надо убедиться в независимости этих функций, достаточным условием чего является отличие от нуля соответствующего функционального определителя. Пусть функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

в некоторой точке M обращается в нуль. Тогда имеет место пропорциональность строк, т. е.

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

что, однако, невозможно, так как

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad \text{и} \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$
$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$

(при этом мы считаем $a_{11} \neq 0$, что не является ограничением общности). Тем самым независимость функций φ и ψ установлена.

После деления уравнения (4) на коэффициент при $u_{\eta\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad \left(\Phi = -\frac{\overline{F}}{\overline{a}_{22}}\right).$$

Если в правую часть не входит u_ξ, то это уравнение будет обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от ξ, как от параметра.

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнений (9) и (10) комплексны. Пусть

$$\varphi(x, y) = C$$

— комплексный интеграл уравнения (9). Тогда

$$\varphi^*(x, y) = C,$$

где φ^* — сопряженная к φ функция, будет представлять собой общий интеграл сопряженного уравнения (10). Перейдем к комплексным переменным, полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

При этом уравнение эллиптического типа приводится к такому же виду, что и гиперболическое.

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные α и β вида

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

так что

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

В этом случае

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$
$$= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0,$$

т. е.

$$\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22} \quad \text{и} \quad \overline{a}_{12} = 0.$$

Уравнение (4) после деления на коэффициент при $u_{\alpha\alpha}$ принимает вид [1])

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \quad \left(\Phi = -\frac{\overline{F}}{\overline{a}_{22}}\right).$$

[1]) Подобное преобразование законно только в том случае, если коэффициенты уравнения (1) — аналитические функции. Действительно, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то правые части уравнений (9) и (10) комплексны, а следовательно, функция y должна иметь комплексные значения. О решении этих уравнений можно говорить лишь в том случае, когда коэффициенты $a_{ik}(x, y)$ определены для комплексных значений y. При приведении уравнения эллиптического типа к канонической форме мы ограничимся случаем аналитических коэффициентов.

Таким образом, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ имеют место следующие канонические формы уравнения (1):

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (гиперболический тип) $\quad u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ или $u_{xy} = \Phi$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (эллиптический тип) $\quad u_{xx} + u_{yy} = \Phi$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (параболический тип) $\quad u_{xx} = \Phi$.

2. Классификация уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными.

Рассмотрим линейное уравнение с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu + f = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{12}$$

где a, b, c, f являются функциями x_1, x_2, ..., x_n. Введем новые независимые переменные ξ_k, полагая

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ik},$$

$$u_{x_ix_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k\xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}(\xi_k)_{x_ix_j},$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Подставляя выражения для производных в исходное уравнение, получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}u_{\xi_k\xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl},$$

$$\bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_k)_{x_ix_j}.$$

Рассмотрим квадратическую форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 y_iy_j, \tag{13}$$

коэффициенты которой равны коэффициентам a_{ij} исходного уравнения

в некоторой точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Производя над переменными y линейное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_k,$$

получим для квадратической формы новое выражение

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

где

$$\overline{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 \alpha_{ik}\alpha_{jl}.$$

Таким образом, коэффициенты главной части уравнения изменяются аналогично коэффициентам квадратической формы при линейном преобразовании. Как известно, выбором соответствующего линейного преобразования можно привести матрицу (a_{ij}^0) квадратической формы к диагональному виду, в котором

$$|\overline{a}_{ii}^0| = 1, \text{ либо } 0;$$

$$\overline{a}_{ij}^0 = 0 \quad (i \neq j,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Согласно *закону инерции* для квадратических форм число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов $\overline{a}_{ii}^0$ инвариантно относительно линейного преобразования, приводящего форму (13) к нормальному виду.

Назовем уравнение (12) в точке M_0 уравнением *эллиптического* типа, если все n коэффициентов $\overline{a}_{ii}^0$ одного знака; *гиперболического* типа (или *нормального гиперболического* типа), если $n-1$ коэффициентов $\overline{a}_{ii}^0$ имеют одинаковый знак, а один коэффициент противоположен им по знаку; *ультрагиперболического* типа, если среди $\overline{a}_{ii}^0$ имеется m коэффициентов одного знака и $n-m$ противоположного знака (m, $n-m>0$); *параболического* типа, если хотя бы один из коэффициентов $\overline{a}_{ii}^0$ равен нулю.

Выбирая новые независимые переменные ξ_i так, чтобы в точке M_0

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial t_i} = \alpha_{ik}^0,$$

где α_{ik}^0 — коэффициенты преобразования, приводящего квадратическую форму (13) к каноническому виду (например, полагая $\xi_k = \sum \alpha_{ik}^{(0)} x_i$), получим, что в точке M_0 уравнение в зависимости от типа

приводится к одной из следующих канонических форм:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n} + \Phi = 0 \quad \text{(эллиптический тип)},$$

$$u_{x_1x_1} = \sum_{i=2}^{n} u_{x_ix_i} + \Phi \quad \text{(гиперболический тип)},$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i} = \sum_{i=m+1}^{n} u_{x_ix_i} + \Phi \quad \text{(ультрагиперболический тип)},$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_ix_i}) + \Phi = 0 \ (m > 0) \quad \text{(параболический тип)}.$$

Мы не останавливаемся при этом на более подробном делении уравнений параболического типа на уравнения эллиптически-параболические, гиперболически-параболические и т. д.

Таким образом, если уравнение (12) в некоторой точке M принадлежит к определенному типу, то его можно привести к соответствующей канонической форме в этой точке.

Рассмотрим подробнее вопрос о том, можно ли привести уравнение к канонической форме в некоторой окрестности точки M, если во всех точках этой окрестности уравнение принадлежит к одному и тому же типу.

Для приведения уравнения в некоторой области к простейшей форме, недиагональные члены которой равны нулю, нам пришлось бы функции $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ подчинить дифференциальным соотношениям $a_{kl} = 0$, для $k \neq l$. Число этих условий, равное $\frac{n(n-1)}{2}$, превосходит n — число определяемых функций ξ при $n > 3$. Для $n = 3$ недиагональные элементы матрицы (a_{ik}), вообще говоря, можно было бы обратить в нули, но при этом диагональные элементы могут оказаться различными.

Следовательно, при $n \geqslant 3$ уравнение нельзя привести к каноническому виду в окрестности точки M. При $n = 2$ можно обратить в нуль единственный недиагональный коэффициент и удовлетворить условию равенства двух диагональных коэффициентов, что и было сделано в п. 1.

Если коэффициенты уравнения (12) постоянны, то, приводя (12) к канонической форме в одной точке M, мы получим уравнение, приведенное к канонической форме во всей области определения уравнения.

3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. В случае двух независимых переменных линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0. \quad (14)$$

Ему соответствует характеристическое уравнение с постоянными коэф-

фициентами. Поэтому характеристики будут прямыми линиями

$$y=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C_1,\qquad y=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C_2.$$

С помощью соответствующего преобразования переменных уравнение (14) приводится к одной из простейших форм:

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \quad \text{(эллиптический тип)}, \quad (15)$$

или

$$\left.\begin{aligned} u_{\xi\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f&=0\\ u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f&=0\end{aligned}\right\} \text{(гиперболический тип)}, \quad (16)$$

$$u_{\xi\xi}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \quad \text{(параболический тип)}. \quad (17)$$

Для дальнейшего упрощения введем вместо u новую функцию v:

$$u=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot v,$$

где λ и μ — неопределенные пока постоянные. Тогда

$$\begin{aligned} u_\xi&=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi+\lambda v),\\ u_\eta&=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta+\mu v),\\ u_{\xi\xi}&=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi}+2\lambda v_\xi+\lambda^2 v),\\ u_{\xi\eta}&=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta}+\lambda v_\eta+\mu v_\xi+\lambda\mu v),\\ u_{\eta\eta}&=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta}+2\mu v_\eta+\mu^2 v).\end{aligned}$$

Подставляя выражения для производных в уравнение (15) и сокращая затем на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, получим:

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+(b_1+2\lambda)v_\xi+(b_2+2\mu)v_\eta+ \\ +(\lambda^2+\mu^2+b_1\lambda+b_2\mu+c)v+f_1=0.$$

Параметры λ и μ выбираем так, чтобы два коэффициента, например при первых производных, обратились в нуль $\left(\lambda=-\frac{b_1}{2};\ \mu=-\frac{b_2}{2}\right)$. В результате получим:

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\gamma v+f_1=0,$$

где γ — постоянная, выражающаяся через c, b_1 и b_2, $f_1=fe^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$. Производя аналогичные операции и для случаев (16) и (17), приходим к следующим каноническим формам для уравнений с постоянными коэффициентами:

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\gamma v+f_1=0 \quad \text{(эллиптический тип)},$$

или

$$\left.\begin{aligned} v_{\xi\eta}+\gamma v+f_1&=0\\ v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+\gamma v+f_1&=0\end{aligned}\right\} \text{(гиперболический тип)},$$

$$v_{\xi\xi}+b_2v_\eta+f_1=0 \quad \text{(параболический тип)}.$$

Как было отмечено в п. 2, уравнение с постоянными коэффициентами

в случае нескольких независимых переменных

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu + f = 0$$

при помощи линейного преобразования переменных приводится к каноническому виду одновременно для всех точек области его определения. Вводя вместо u новую функцию v

$$u = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i} \cdot v$$

и выбирая нужным способом λ_i, мы можем дальше упростить уравнение, что приводит нас к каноническим формам, сходным со случаем $n = 2$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

1. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0$$

и привести его к каноническому виду в области гиперболичности.

2. Привести к каноническому виду уравнения:

а) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.

б) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0$.

в) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} = 0$.

г) $u_{xx} + (1+y)^2 u_{yy} = 0$.

д) $xu_{xx} + 2\sqrt{xy}\,u_{xy} + yu_{yy} - u_x = 0$.

е) $(x-y)u_{xx} + (xy - y^2 - x + y)u_{xy} = 0$.

ж) $y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + u_x = 0$.

з) $\sin^2 y\, u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + 3u_x - 5u = 0$.

и) $u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$.

3. Привести к каноническому виду и максимально упростить уравнение

$$au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0.$$

4. Введя функцию $v = ue^{\lambda x + \mu y}$ и выбирая соответствующим образом параметры λ и μ, упростить следующие уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$.

б) $u_{xx} = \frac{1}{a^2}u_y + \alpha u + \beta u_x$.

в) $u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_{yy} = \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u$.

г) $u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y$.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

обычно называют *уравнением колебания струны*. В настоящей главе, как и в последующих, мы ограничимся рассмотрением класса линейных уравнений.

§ 1. Простейшие задачи, приводящиеся к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач

1. Уравнение малых поперечных колебаний струны. Каждую точку струны длины l можно охарактеризовать значением ее абсциссы x. Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Для определения положения струны в момент времени t достаточно задать компоненты вектора смещения точки x в момент t $\{u_1(x, t), \quad u_2(x, t), \quad u_3(x, t)\}$.

Мы рассмотрим наиболее простую задачу о колебаниях струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости x, u и что вектор смещения u перпендикулярен в любой момент к оси x; тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x, t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю (рис. 1). Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

Величина натяжения, возникающего в струне вследствие упругости, может быть вычислена по закону Гука. Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать квадратом u_x по сравнению с единицей.

Пользуясь этим условием, подсчитаем удлинение, испытываемое участком струны (x_1, x_2). Длина дуги этого участка равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u_x)^2}\, dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

Таким образом, в пределах принятой нами точности удлинения участков струны в процессе колебания не происходит; отсюда в силу

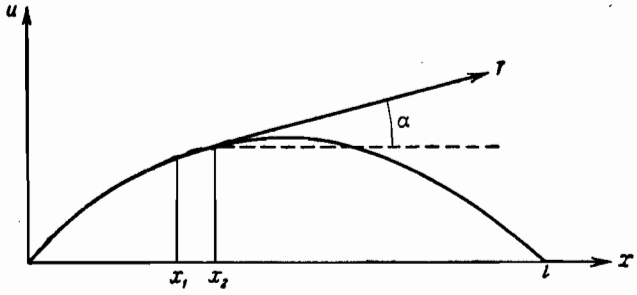


Рис. 1.

закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке не меняется со временем. Покажем также, что натяжение не зависит и от x, т. е.

$$T = T_0 = \text{const}.$$

Найдем проекции натяжения на оси x и u (обозначим их T_x и T_u):

$$T_x(x) = T(x)\cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x)\sin\alpha \cong T(x)\operatorname{tg}\alpha = T(x)\,u_x,$$

где α — угол касательной к кривой $u(x, t)$ с осью x.

На участок (x_1x_2) действуют силы натяжения, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций всех сил на ось x должна быть равна нулю (мы рассматриваем только поперечные колебания). Так как силы инерции и внешние силы по предположению направлены вдоль оси u, то

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{или} \quad T(x_1) = T(x_2). \tag{1}$$

Отсюда в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что натяжение не зависит от x, т. е. для всех значений x и t

$$T \equiv T_0. \tag{2}$$

Для вывода уравнения поперечных колебаний струны воспользуемся вторым законом Ньютона. Составляющая количества движения эле-

мента (x_1, x_2) по оси u равна

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t)\rho(\xi)\,d\xi,$$

где ρ — линейная плотность струны. Приравняем изменение количества движения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\,d\xi$$

импульсу действующих сил, складывающихся из натяжения $T_0 u_x$ в точках x_1 и x_2 и внешней силы, которую будем считать непрерывно распределенной с плотностью (нагрузкой) $f(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. В результате получим уравнение поперечных колебаний элемента струны в интегральной форме

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\,\rho(\xi)\,d\xi = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T_0[u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (3)$$

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим существование и непрерывность вторых производных от $u(x, t)$ [1]). Тогда формула (3) после двукратного применения теоремы о среднем примет вид

$$u_{tt}(\xi^*, t^*)\rho(\xi^*)\Delta t\,\Delta x = \{T_0[u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + f(\xi^{***}, t^{***})\}\,\Delta t\,\Delta x,$$

где

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \subset (x_1, x_2), \quad \text{а} \quad t^*, t^{**}, t^{***} \subset (t_1, t_2).$$

Сократив на $\Delta x\,\Delta t$ и переходя к пределу при $x_2 \to x_1$, $t_2 \to t_1$, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - f(x, t). \qquad (4)$$

В случае постоянной плотности $\rho = \text{const}$ этому уравнению обычно придают вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x, t) \qquad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\right), \qquad (5)$$

---

[1]) Делая предположение о двукратной дифференцируемости функций, мы фактически уславливаемся о том, что будем рассматривать лишь функции, обладающие этим свойством. Подобного типа предположение не содержит в себе утверждения, что не существует функций, удовлетворяющих интегральному уравнению колебаний и не имеющих вторых производных. Такие функции существуют и представляют значительный практический интерес. Подробнее см. об этом § 2, п. 7.

где

$$F(x, t) = \frac{1}{\rho} f(x, t) \tag{6}$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{или} \quad u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y = at),$$

описывающее свободные колебания струны. Это уравнение является простейшим примером уравнения гиперболического типа.

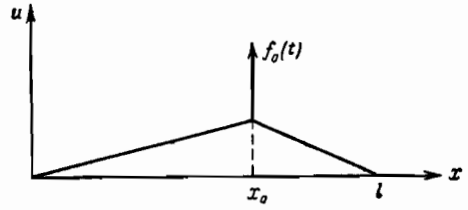


Рис. 2.

Если в точке $x_0 (x_1 < x_0 < x_2)$ приложена сосредоточенная сила $f_0(t)$ (рис. 2), то уравнение (3) запишется так:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau.$$

Поскольку скорости точек струны ограничены, то при $x_1 \to x_0$ и $x_2 \to x_0$ интегралы в левой части этого равенства стремятся к нулю, и равенство (3) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau)] d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \tag{7}$$

Пользуясь теоремой о среднем, сокращая обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $t_2 \to t_1$, получим:

$$u_x(x, t) \Big|_{x_0 - 0}^{x_0 + 0} = - \frac{1}{T_0} f_0(t).$$

Отсюда следует, что в точке приложения сосредоточенной силы первые производные претерпевают разрыв и дифференциальное уравне-

ние теряет смысл. В этой точке должны выполняться два условия

$$\left.\begin{aligned} u(x_0+0,\ t) &= u(x_0-0,\ t), \\ u_x(x_0+0,\ t) - u_x(x_0-0,\ t) &= -\frac{1}{T_0} f_0(t), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

первое из которых выражает непрерывность струны, второе определяет величину излома струны в точке x_0, зависящую от $f_0(t)$ и натяжения T_0.

2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Уравнения продольных колебаний для струны, стержня и пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке $(0, l)$ оси x. Процесс продольных колебаний может быть описан одной функцией $u(x, t)$, представляющей в момент t смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x[1]). При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука.

Подсчитаем относительное удлинение элемента $(x, x+\Delta x)$ в момент t. Координаты концов этого элемента в момент t имеют значения

$$x+u(x,\ t);\quad x+\Delta x+u(x+\Delta x,\ t),$$

а относительное удлинение равно

$$\frac{[\Delta x+u(x+\Delta x,\ t)-u(x,\ t)]-\Delta x}{\Delta x} = u_x(x+\theta\,\Delta x,\ t)$$
$$(0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим, что относительное удлинение в точке x определяется функцией $u_x(x, t)$. В силу закона Гука натяжение $T(x, t)$ равно

$$T(x,\ t) = k(x)\,u_x(x,\ t), \tag{9}$$

где $k(x)$ — модуль Юнга в точке x.

---

[1]) Выбранная здесь геометрическая переменная x называется переменной Лагранжа. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x. Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x, в любой последующий момент t находится в точке с координатой $X = x+u(x, t)$. Если мы фиксируем некоторую геометрическую точку A с координатой X, то в различные моменты времени в этой точке будут находиться различные физические точки (с разными лагранжевыми координатами x). Часто пользуются также переменными Эйлера X, t, где X — геометрическая координата. Если $U(X, t)$ — смещение точки с эйлеровой координатой X, то лагранжева координата

$$x = X - U(X,\ t).$$

Пример использования координат Эйлера приведен в п. 6.

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, получаем интегральное уравнение колебаний

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\,\rho(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)\,u_x(x_2, \tau) - k(x_1)\,u_x(x_1, \tau)]\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau, \quad (10)$$

где $f(x, t)$ — плотность внешней силы, рассчитанная на единицу длины.

Предположим существование и непрерывность вторых производных функции $u(x, t)$. Применяя теорему о среднем и совершая предельный переход [1]) при $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$ и $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, приходим к дифференциальному уравнению продольных колебаний стержня [2])

$$[k(x)\,u_x]_x = \rho u_{tt} - f(x, t). \quad (11)$$

Если стержень однороден, то это уравнение записывают следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\right), \quad (12)$$

где

$$F(x, t) = \frac{f(x, t)}{\rho} \quad (13)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы.

3. Энергия колебаний струны. Найдем выражение для энергии поперечных колебаний струны $E = K + U$, где K — кинетическая и U — потенциальная энергии. Элемент струны dx, движущийся со скоростью u_t, обладает кинетической энергией

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,\rho(x)\,dx\,(u_t)^2.$$

Кинетическая энергия всей струны равна

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(x)\,[u_t(x, t)]^2\,dx. \quad (14)$$

---

[1]) В дальнейшем мы будем опускать подробности, связанные с предельными переходами, которые были разобраны при выводе уравнения поперечных колебаний струны.

[2]) Условие малости колебаний в данном случае связано только с границей применимости закона Гука. В общем случае $T = k(x, u_x)\,u_x$, и мы приходим к квазилинейному уравнению

$$[k(x, u_x)\,u_x]_x = \rho u_{tt} - f(x, t).$$

Потенциальная энергия поперечных колебаний струны, имеющей при $t=t_0$ форму $u(x, t_0)=u_0(x)$, равна работе, которую надо совершить, чтобы струна перешла из положения равновесия в положение $u_0(x)$. Пусть функция $u(x, t)$ дает профиль струны в момент t, причем

$$u(x, 0)=0, \qquad u(x, t_0)=u_0(x).$$

Элемент dx под действием равнодействующей сил натяжения $T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} - T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x = Tu_{xx}\,dx$ за время dt проходит путь $u_t(x, t)\,dt$. Производимая при этом работа равна

$$\left\{\int_0^l T_0 u_{xx}u_t\,dx\right\}dt = \left\{T_0u_xu_t\Big|_0^l - \int_0^l T_0u_xu_{xt}\,dx\right\}dt =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l T_0(u_x)^2\,dx + T_0u_xu_t\Big|_0^l\right\}dt.$$

Интегрируя по t от 0 до t_0, получаем:

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T_0(u_x)^2\,dx\Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0u_xu_t\Big|_0^l\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^l T_0[u_x(x, t_0)]^2\,dx + \int_0^{t_0} T_0u_xu_t\Big|_0^l dt.$$

Нетрудно выяснить смысл последних слагаемых этого равенства. Действительно, $T_0u_x|_{x=0}$ есть величина натяжения на конце струны $x=0$; $u_t(0, t)\,dt$ — перемещение этого конца, а интеграл

$$\int_0^{t_0} T_0u_xu_t|_{x=0}\,dt \tag{15}$$

представляет работу, которую надо затратить на перемещение конца $x=0$. Аналогичный смысл имеет слагаемое, соответствующее $x=l$. Если концы струны закреплены, то работа на концах струны будет равна нулю (при этом $u(0, t)=0$, $u_t(0, t)=0$). Следовательно, при перемещении закрепленной на концах струны из положения равновесия $u=0$ в положение $u_0(x)$ работа не зависит от способа перевода струны в это положение и равна

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T_0[u_0'(x)]^2\,dx, \tag{16}$$

потенциальной энергии струны в момент $t = t_0$ с обратным знаком. Таким образом, полная энергия струны равна

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [T_0 (u_x)^2 + \rho(x) (u_t)^2] \, dx. \tag{17}$$

Совершенно аналогично может быть получено выражение для потенциальной энергии продольных колебаний стержня. Впрочем, его можно получить также, исходя из формулы для потенциальной энергии упругого стержня

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right)^2 l_0.$$

Отсюда непосредственно следует:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k (u_x)^2 \, dx.$$

4. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах. Прохождение электрического тока по проводу с распределенными параметрами характеризуется силой тока i и напряжением v, которые являются функциями положения точки x и времени t. Применяя закон Ома к участку длиной Δx, можно написать, что падение напряжения на элементе провода Δx равняется сумме электродвижущих сил:

$$-v_x \Delta x = iR \Delta x + i_t L \Delta x, \tag{18}$$

где R и L — сопротивление и коэффициент самоиндукции, рассчитанные на единицу длины.

Количество электричества, притекающее на элемент провода Δx за время Δt

$$[i(x, t) - i(x + \Delta x, t)] \Delta t = -i_x \Delta x \Delta t, \tag{19}$$

равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки элемента Δx, и количества, теряющегося вследствие несовершенства изоляции:

$$C[v(x, t + \Delta t) - v(x, t)] \Delta x + G \Delta x \cdot v \Delta t = (Cv_t + Gv) \Delta x \Delta t, \tag{20}$$

где C и G — коэффициенты емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, причем величину потерь мы считаем пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Из формул (18), (19) и (20) получаем систему

$$\left.\begin{aligned} i_x + Cv_t + Gv = 0, \\ v_x + Li_t + Ri = 0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

называемую системой *телеграфных* уравнений [1]).

Чтобы получить одно уравнение, определяющее функцию i, продифференцируем первое равенство (21) по x, второе — по t, умножив его на C. Производя вычитание в предположении постоянства коэффициентов, найдем:

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

Заменяя v_x его значением из второго уравнения (21), получим уравнение, определяющее силу тока в проводе,

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)\, i_t + GRi. \tag{22}$$

Аналогично выглядит уравнение для напряжения

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)\, v_t + GRv. \tag{23}$$

Уравнение (22) или (23) называется телеграфным уравнением. Если можно пренебречь потерями через изоляцию и если сопротивление очень мало ($G \cong R \cong 0$), то мы приходим к известному уравнению колебаний

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}}\right). \tag{24}$$

5. Поперечные колебания мембраны. Мембраной называется плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу. Рассмотрим мембрану, натянутую на плоский контур C. Будем изучать поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно к плоскости мембраны.

Пусть ds — элемент дуги некоторого контура, взятого на поверхности мембраны и проходящего через точку $M(x, y)$. На этот элемент действуют натяжения, равные $T\,ds$. Вектор T вследствие отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу лежит в касательной плоскости к мгновенной поверхности мембраны и перпендикулярен к элементу ds. Кроме того, отсутствие сопротивления сдвигу приводит к тому, что величина натяжения не зависит от направления элемента ds. Отсюда следует, что вектор натяжения $T = T(x, y, t)$ является функцией x, y и t. Эти свойства вектора T служат математическим выражением отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу.

Будем изучать малые колебания мембраны, пренебрегая квадратами первых производных u_x и u_y. Из этого предположения сразу

[1]) Эти уравнения являются приближенными в рамках теории электромагнитного поля, поскольку они не учитывают электромагнитных колебаний в среде, окружающей провод.

же следует, что $T_h(x, y, t)$ — проекция натяжения на плоскость (x, y) — равна абсолютной величине натяжения. В самом деле, при любой ориентации дуги ds угол γ' между вектором $\boldsymbol{T}$ и плоскостью (x, y) не превосходит угла γ, образуемого нормалью к поверхности мембраны в точке (x, y) с осью z. Поэтому

$$\cos\gamma' \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \cong 1, \text{ т. е. } \cos\gamma' \cong 1,$$

и

$$T_h(x, y, z, t) = T\cos\gamma' \cong T(x, y, z, t). \tag{25}$$

Вертикальная составляющая натяжения, очевидно, равна

$$T_u = T\frac{\partial u}{\partial n}.$$

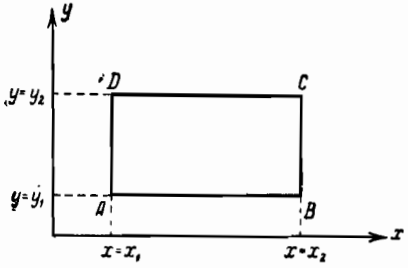


Рис. 3.

Выделим на поверхности мембраны элемент площади, проекция которого на плоскость (x, y) является прямоугольником $ABCD$ со сторонами, параллельными осям координат (рис. 3). На этот элемент действует сила натяжения, равная

$$\boldsymbol{T}^* = \oint\limits_{ABCD} \boldsymbol{T}\,ds. \tag{26}$$

В силу отсутствия перемещения вдоль осей x, y проекции $\boldsymbol{T}^*$ на эти оси равны нулю:

$$T_x^* = \int\limits_B^C T(x_2, y, t)\,dy - \int\limits_A^D T(x_1, y, t)\,dy =$$

$$= \int\limits_{y_1}^{y_2} \{T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)\}\,dy = 0.$$

Аналогично

$$T_y^* = \int\limits_{x_1}^{x_2} \{T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)\,dx = 0.$$

Пользуясь теоремой о среднем и учитывая произвол в выборе площадки $ABCD$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} T(x, y_1, t) &= T(x, y_2, t), \\ T(x_1, y, t) &= T(x_2, y, t), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

т. е. натяжение T не меняется при изменении x и y и может зависеть лишь от t.

Площадь какого-либо элемента мембраны в момент времени t равна в нашем приближении

$$\int\int \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \int\int \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy = \int\int dx\,dy. \qquad (28)$$

Следовательно, в процессе колебаний не происходит растяжения, откуда в силу закона Гука вытекает независимость натяжений от времени. Таким образом, мы установили, что натяжение не зависит от переменных x, y и t

$$T(x,\ y,\ t) = \text{const} = T_0. \qquad (29)$$

Перейдем к выводу уравнения колебаний мембраны. Воспользуемся теоремой о приращении количества движения. Пусть S_1 — проекция на плоскость (x, y) некоторого участка мембраны, а C_1 — граница S_1. Приравнивая изменение количества движения импульсу вертикальных составляющих сил натяжения и внешних действующих сил с плотностью $f(x, y, t)$, получаем уравнение колебаний мембраны в интегральной форме

$$\int\limits_S\int [u_t(x,\ y,\ t_2) - u_t(x,\ y,\ t_1)]\,\rho(x,\ y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{C_1} T_0\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{S_1}\int f\,dx\,dy\,dt, \qquad (30)$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны, а $f(x, y, t)$ — плотность внешней силы.

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим, что функция $u(x, y, t)$ имеет непрерывные вторые производные. С помощью теоремы Остроградского [1]) контурный интеграл преобразуется в поверхностный

$$\int\limits_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int\limits_{S_1}\int (u_{xx} + u_{yy})\,dx\,dy,$$

вследствие чего интегральное уравнение колебаний приводится к виду

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{S_1}\int \{\rho u_{tt} - T_0(u_{xx} + u_{yy}) - f(x,\ y,\ t)\}\,dx\,dy\,dt = 0.$$

Пользуясь теоремой о среднем, произвольностью выбора S_1 и промежутка времени (t_1, t_2), делаем заключение о тождественном равенстве нулю выражения в фигурных скобках. Таким образом, приходим

[1]) См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, 1948, стр. 196.

к дифференциальному уравнению колебаний мембраны

$$\rho u_{tt} = T_0 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t). \tag{31}$$

Для однородной мембраны уравнение колебаний можно записать в виде

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t) \qquad \left(a^2 = \frac{T_0}{\rho}\right), \tag{32}$$

где $F(x, y, t)$ — плотность силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.

6. Уравнения гидродинамики и акустики. Для характеристики движения жидкости пользуются функциями $v_1(x, y, z, t)$, $v_2(x, y, z, t)$, $v_3(x, y, z, t)$, представляющими компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v}$ в точке (x, y, z) в момент t. Величинами, характеризующими движение жидкости, являются также плотность $\rho(x, y, z, t)$, давление $p(x, y, z, t)$ и плотность внешних действующих сил $\boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ (если они имеются), рассчитанная на единицу массы.

Рассмотрим некоторый объем жидкости T и подсчитаем действующие на него силы. Пренебрегая силами трения, обусловленными вязкостью, т. е. рассматривая идеальную жидкость, получим для результирующей сил давления выражение в виде поверхностного интеграла

$$-\int\int_S p\boldsymbol{n}\, dS, \tag{33}$$

где S — поверхность объема T, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали. Формула Остроградского дает:

$$-\int\int_S p\boldsymbol{n}\, dS = -\int\int\int_T \operatorname{grad} p\, d\tau. \tag{34}$$

При вычислении ускорения какой-либо точки жидкости необходимо учесть перемещение самой точки. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — уравнение траектории этой точки. Вычислим производную скорости по времени

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\dot{z} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}v_1 + \frac{\partial v}{\partial y}v_2 + \frac{\partial v}{\partial z}v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)\,v,$$

где

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Такая производная по времени, учитывающая движение частицы среды (субстанции), называется *субстанциональной*. Уравнение движения жидкости выражает обычную связь между ускорением частиц и дей-

ствующими на них силами

$$\int\int_{\dot{T}}\int \rho \frac{dv}{dt}\, d\tau = -\int\int_{\dot{T}}\int \operatorname{grad} p\, d\tau + \int\int_{\dot{T}}\int \rho \boldsymbol{F}\, d\tau, \tag{35}$$

где последний интеграл представляет собой равнодействующую внешних сил, приложенных к объему T. Отсюда в силу произвольности объема T получаем уравнение движения идеальной жидкости в форме *Эйлера*

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \boldsymbol{F}. \tag{36}$$

Перейдем к выводу уравнения непрерывности. Если внутри T нет никаких источников или стоков, то изменение в единицу времени количества жидкости, заключенной внутри T, равно потоку через границу S

$$\frac{d}{dt}\int\int_{\dot{T}}\int \rho\, dt = -\int_S\int \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, dS. \tag{37}$$

Преобразование поверхностного интеграла в объемный дает

$$\int\int_{\dot{T}}\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v}\right) d\tau = 0.$$

Так как это равенство справедливо для сколь угодно малых объемов, то отсюда следует *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{38}$$

К уравнениям (36) и (38) следует присоединить термодинамическое *уравнение состояния*, которое мы здесь возьмем в виде

$$p = f(\rho).$$

Следовательно, мы получаем систему пяти уравнений с пятью неизвестными функциями v_x, v_y, v_z, p и ρ. Если бы уравнение состояния содержало температуру, то нужно было бы добавить еще уравнение теплопереноса. Таким образом, система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ &p = f(\rho) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

представляет полную систему уравнений гидродинамики.

Применим уравнения гидродинамики к процессу распространения звука в газе. Сделаем следующие допущения: 1) внешние силы отсутствуют; 2) процесс распространения звука является адиабатическим, поэтому уравнением состояния служит адиабата Пуассона

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad \left(\gamma=\frac{c_p}{c_v}\right),$$

где ρ_0 и p_0 — начальная плотность и начальное давление, c_p и c_v — теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме; 3) колебания газа малы, можно пренебрегать высшими степенями скоростей, градиентов скоростей и плотности.

Назовем *конденсацией* газа величину $s(x, y, z, t)$, равную относительному изменению плотности

$$s(x, y, z, t)=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}, \tag{40}$$

откуда

$$\rho=\rho_0(1+s). \tag{41}$$

Уравнения гидродинамики при сделанных предположениях принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_t &= -\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p, \\ \rho_t &+ \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v}=0, \\ p &= p_0(1+s)^{\gamma}\cong p_0(1+\gamma s), \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

так как

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\frac{1}{\rho_0}(1-s+\ldots)\operatorname{grad} p=\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p+\ldots,$$

$$\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\operatorname{grad}\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\rho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\ldots,$$

где точками обозначены члены второго и высших порядков малости. Вводя обозначение $a^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}$, перепишем систему (42) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_t &= -a^2\operatorname{grad} s, \\ s_t &+ \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0. \end{aligned}\right\} \tag{42'}$$

Применяя к первому уравнению (42) оператор дивергенции и меняя порядок дифференцирования, будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{v}=-a^2\operatorname{div}(\operatorname{grad} s)=-a^2\nabla^2 s=-a^2\Delta s,$$

где

$$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— *оператор Лапласа*. Используя второе соотношение (42′), получим уравнение колебаний

$$\Delta s = \frac{1}{a^2} s_{tt} \tag{43}$$

или

$$a^2 (s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) = s_{tt}.$$

Отсюда и из (40) получаем уравнение для плотности

$$a^2 (\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) = \rho_{tt}.$$

Введем теперь *потенциал скоростей* и покажем, что он удовлетворяет тому же уравнению колебаний (43), что и конденсация.

Из уравнения

$$\boldsymbol{v}_t = -a^2 \operatorname{grad} s$$

следует

$$\boldsymbol{v}(x, y, z, t) = \boldsymbol{v}(x, y, z, 0) - a^2 \operatorname{grad}\left(\int_0^t s\, dt\right), \tag{44}$$

где $\boldsymbol{v}(x, y, z, 0)$ — начальное распределение скоростей. Если поле скоростей в начальный момент имеет потенциал

$$\boldsymbol{v}|_{t=0} = -\operatorname{grad} f(x, y, z), \tag{45}$$

то имеет место соотношение

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\left[f(x, y, z) + a^2 \int_0^t s\, dt\right] = -\operatorname{grad} U, \tag{46}$$

которое означает, что существует потенциал скоростей $U(x, y, z, t)$. Знания потенциала скоростей достаточно для определения всего процесса движения

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= -\operatorname{grad} U, \\ s &= \frac{1}{a^2} U_t. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Подставляя эти значения в уравнение непрерывности

$$s_t + \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

получим уравнение колебаний для потенциала

$$a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = U_{tt}$$

или

$$U_{tt} = a^2 \Delta U. \tag{48}$$

Для давления p и скорости v также можно получить уравнение колебаний вида (48), называемое часто *уравнением акустики.*

При решении задач для двумерного и одномерного случаев надо в уравнении (48) оператор Лапласа заменить оператором $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и, соответственно, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

В случае колебаний газа в ограниченной области на ее границе должны быть заданы определенные граничные условия. Если граница представляет собой твердую непроницаемую стенку, то нормальная составляющая скорости равна нулю, что приводит к условиям

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial s}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0. \tag{49}$$

Постоянная

$$a=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

имеет размерность скорости и, как будет показано ниже, является скоростью распространения звука.

Вычислим скорость звука в воздухе при нормальном атмосферном давлении. В этом случае $\gamma=\frac{7}{5}$, $\rho_0=0{,}001293$ $г/см^3$, $p_0=1{,}033$ $кг/см^2$; следовательно,

$$a=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}=336 \ м/сек.$$

7. Граничные и начальные условия. При математическом описании физического процесса надо прежде всего поставить задачу, т. е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса.

Дифференциальные уравнения с обыкновенными и, тем более, с частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

В случае обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка решение может быть определено начальными условиями, т. е. заданием значений функции и ее первой производной при «начальном» значении аргумента. Встречаются и другие формы дополнительных условий, когда, например, задаются значения функции в двух точках (задача о цепной линии). Для уравнения с частными производными возможны также различные формы дополнительных условий.

Рассмотрим сперва простейшую задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах. В этой задаче $u(x, t)$ дает отклонение струны от оси x. Если концы струны $0 \leqslant x \leqslant l$ закреплены,

то должны выполняться «*граничные условия*»

$$u(0,\ t)=0,\quad u(l,\ t)=0. \tag{50}$$

Кроме того, обычно задают «*начальные условия*», т. е. форму и скорость струны в начальный момент t_0:

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ t_0)&=\varphi(x),\\ u_t(x,\ t_0)&=\psi(x).\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Таким образом, дополнительные условия состоят из граничных и начальных условий, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции точки. В дальнейшем мы покажем, что эти условия вполне определяют решение уравнения колебаний струны

$$u_{tt}=a^2u_{xx}. \tag{52}$$

Если концы струны движутся по заданному закону, то граничные условия (50) принимают другой вид:

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t)&=\mu_1(t),\\ u(l,\ t)&=\mu_2(t),\end{aligned}\right\} \tag{50'}$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — заданные функции времени t. Аналогично ставится задача для продольных колебаний струны или пружины.

Возможны и другие типы граничных условий. Рассмотрим, например, задачу о продольных колебаниях пружины, один конец которой закреплен (точка подвеса), а другой конец свободен. Закон движения свободного конца не задан и зачастую является искомой функцией. В точке подвеса $x=0$ отклонение

$$u(0,\ t)=0;$$

на свободном конце $x=l$ натяжение пружины

$$T(l,\ t)=k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} \tag{53}$$

равно нулю (нет внешних сил), так что математическая формулировка условия свободного конца имеет вид

$$u_x(l,\ t)=0.$$

Если конец $x=0$ движется по определенному закону $\mu(t)$, а при $x=l$ задана сила $\bar{\nu}(t)$, то

$$u(0,\ t)=\mu(t),\qquad u_x(l,\ t)=\nu(t),\qquad \left(\nu(t)=\frac{1}{k}\,\bar{\nu}(t)\right).$$

Типичным является также условие упругого закрепления, скажем для $x=l$,

$$ku_x(l,\ t)=-\alpha u(l,\ t)$$

или

$$u_x(l,\ t)=-hu(l,\ t)\quad\left(h=\frac{\alpha}{k}\right), \tag{54}$$

при котором конец $x=l$ может перемещаться, но упругие силы закрепления вызывают на этом конце натяжение, стремящееся вернуть сместившийся конец в прежнее положение. Жесткость закрепления характеризуется коэффициентом α.

Если точка (система), относительно которой имеет место упругое закрепление, перемещается, и ее отклонение от начального положения дается функцией $\theta(t)$, то граничное условие принимает вид

$$u_x(l,\ t) = -h[u(l,\ t) - \theta(t)], \tag{55}$$

где

$$h = \frac{\alpha}{k}.$$

Следует отметить, что в случае жесткого закрепления (α велико), когда даже небольшие сдвиги конца вызывают большие натяжения, последнее граничное условие переходит в первое при $\mu(t) = \theta(t)$. В случае мягкого закрепления (α мало), при котором большие сдвиги конца вызывают слабые натяжения, граничное условие переходит в условие свободного конца.

В дальнейшем мы будем говорить о трех основных типах граничных условий:

граничное условие 1-го типа $u(0,\ t) = \mu(t)$ — заданный режим,

граничное условие 2-го типа $u_x(0,\ t) = \nu(t)$ — заданная сила,

граничное условие 3-го типа $u_x(0,\ t) = h[u(0,\ t) - \theta(t)]$ упругое закрепление.

Аналогично задаются граничные условия и на втором конце $x=l$. Если функции, задаваемые в правой части ($\mu(t)$, $\nu(t)$ или $\theta(t)$), равны нулю, то граничные условия называются *однородными*.

Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, мы получим шесть типов простейших краевых задач.

Более сложное граничное условие имеет место, например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука, когда натяжение на конце является нелинейной функцией смещения $u(l,\ t)$, так что

$$u_x(l,\ t) = \frac{1}{k} F[u(l,\ t)]. \tag{56}$$

Это граничное условие в отличие от рассмотренных выше является нелинейным. Возможны, далее, соотношения между смещениями и натяжениями на разных концах системы. Например, в задачах о колебании кольца, когда $x=0$ и $x=l$ представляют одну и ту же физическую точку, граничные условия принимают вид

$$u(l,\ t) = u(0,\ t); \qquad u_x(0,\ t) = u_x(l,\ t), \tag{57}$$

т. е. сводятся к требованиям непрерывности u и u_x. Производные по t могут также входить в граничные условия. Если конец пружины испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его

движения (к концу пружины прикреплена пластинка, плоскость которой перпендикулярна оси пружины), то граничное условие принимает вид

$$ku_x(l,\ t) = -\alpha u_t(l,\ t). \tag{58}$$

Если к концу $x = l$ пружины прикреплен груз массы m, то при $x = l$ должно выполняться условие

$$mu_{tt}(l,\ t) = -ku_x(l,\ t) + mg. \tag{59}$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением трех простейших типов граничных условий, проводя основное изложение на примере первого типа граничного условия и отмечая лишь попутно особенности, связанные со вторым и третьим условиями.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (52):

найти функцию $u(x,\ t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{для} \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

и граничным и начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t) &= \mu_1(t), \\ u(l,\ t) &= \mu_2(t), \\ u(x,\ 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Если на обоих концах берутся граничные условия 2-го или 3-го типа, то соответствующие задачи называются второй или третьей краевыми задачами. Если граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ имеют различные типы, то такие краевые задачи называют смешанными, не проводя более подробной их классификации.

Обратимся теперь к рассмотрению предельных случаев поставленной задачи. Влияние граничных условий в точке M_0, достаточно удаленной от границы, на которой они заданы, сказывается через достаточно большой промежуток времени.

Если нас интересует явление в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще несущественно, то вместо полной задачи можно рассматривать предельную *задачу с начальными условиями* для неограниченной области:

найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\ t) \quad \text{для} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty. \tag{61}$$

Эту задачу часто называют *задачей Коши.*

Если же мы изучаем явление вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении интересующего нас промежутка времени, то мы приходим к постановке задачи на полуограниченной прямой $0 \leqslant x < \infty$, когда помимо уравнения даны дополнительные условия:

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t) &= \mu(t), \qquad t \geqslant 0, \\ u(x,\ 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{62}$$

Характер явления для моментов времени, достаточно удаленных от начального момента $t = 0$, вполне определяется граничными значениями, так как влияние начальных условий благодаря трению, присущему всякой реальной системе, с течением времени ослабевает [1]). Задачи этого типа встречаются особенно часто в случаях, когда система возбуждается периодическим граничным режимом, действующим длительное время. Такие задачи «без начальных условий» (на установившийся режим) формулируются следующим образом:

найти решение изучаемого уравнения для $0 \leqslant x \leqslant l$ и $t > -\infty$ при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t) &= \mu_1(t), \\ u(l,\ t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Аналогично ставится задача без начальных условий для полуограниченной прямой.

В дальнейшем мы будем рассматривать помимо основных краевых задач также предельные задачи.

1. Задачи в бесконечной области, когда одна или обе границы находятся в бесконечности.

2. Задачи без начальных условий (на установившийся режим), когда рассматривается решение, определенное в течение бесконечного промежутка времени.

8. Редукция общей задачи. При решении сложной задачи естественно стремиться свести ее решение к решению более простых задач. С этой целью представим решение общей краевой задачи в виде суммы решений ряда частных краевых задач.

Пусть $u_i(x,\ t)\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x,\ t) \tag{64}$$

---

[1]) Уравнение колебаний с учетом трения, пропорционального скорости, имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{x.x} - \alpha u_t \qquad (\alpha > 0).$$

Подробнее о постановке задач без начальных условий при $\alpha = 0$ см. п. 7 § 3.

при

$$0 < x < l, \quad t > 0$$

и дополнительным условиям

$$\left.\begin{aligned} u_i(0,\ t) &= \mu_1^i(t), \\ u_i(l,\ t) &= \mu_2^i(t); \\ u_i(x,\ 0) &= \varphi^i(x), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,\ 0) &= \psi^i(x). \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Очевидно, что имеет место суперпозиция решений, т. е. функция

$$u^{(0)}(x,\ t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x,\ t) \tag{66}$$

удовлетворяет аналогичному уравнению с правой частью

$$f^{(0)}(x,\ t) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x,\ t) \tag{67}$$

и дополнительным условиям, правые части которых суть функции

$$\left.\begin{aligned} \mu_k^{(0)}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_k^i(t) \quad (k = 1,\ 2), \\ \varphi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(x), \\ \psi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \psi^i(x). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Указанный принцип суперпозиции относится, очевидно, не только к данной задаче, но и к любому линейному уравнению с линейными дополнительными условиями. Этим свойством мы в дальнейшем неоднократно будем пользоваться.

Решение общей краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,\ t) \\ &(0 < x < l, \quad t > 0); \\ u(0,\ t) &= \mu_1(t), \\ u(l,\ t) &= \mu_2(t); \\ u(x,\ 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

может быть представлено в виде суммы

$$u(x,\ t) = u_1(x,\ t) + u_2(x,\ t) + u_3(x,\ t) + u_4(x,\ t), \tag{70}$$

где u_1, u_2, u_3, u_4 — решения следующих частных краевых задач:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \\ &\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x,\ t), \end{aligned}\right\} \quad (0 < x < l,\ t > 0),$$

$$\left.\begin{aligned} &u_1(0,\ t) = 0, && u_2(0,\ t) = \mu_1(t), && u_3(0,\ t) = 0, && u_4(0,\ t) = 0, \\ &u_1(l,\ t) = 0; && u_2(l,\ t) = 0; && u_3(l,\ t) = \mu_2(t); && u_4(l,\ t) = 0; \\ &u_1(x,\ 0) = \varphi(x), && u_2(x,\ 0) = 0, && u_3(x,\ 0) = 0, && u_4(x,\ 0) = 0, \\ &u_{1_t}(x,\ 0) = \psi(x); && u_{2_t}(x,\ 0) = 0; && u_{3_t}(x,\ 0) = 0; && u_{4_t}(x,\ 0) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Мы ограничимся здесь этой формальной редукцией для того, чтобы характеризовать частные краевые задачи, составляющие основные этапы при решении общей задачи. Аналогичная редукция может быть произведена и для предельных случаев общей краевой задачи.

9. Постановка краевых задач для случая многих переменных. Мы подробно рассмотрели постановку краевых задач для случая одной независимой геометрической переменной x (и времени t). Если число геометрических переменных $n > 1$ (например, $n = 3$), то первая краевая задача ставится совершенно сходным образом:

требуется найти функцию $u(M,\ t) = u(x,\ y,\ z,\ t)$, определенную внутри заданной области T с границей Σ, удовлетворяющую внутри T уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,\ y,\ z,\ t) \quad (M(x,\ y,\ z) \subset T,\ t > 0), \tag{72}$$

граничному условию на Σ

$$u|_\Sigma = \mu(x,\ y,\ z,\ t) \quad (M(x,\ y,\ z,\ t) \subset \Sigma,\ t > 0) \tag{73}$$

($\mu(x,\ y,\ z,\ t)$ есть функция, заданная на Σ) и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u(x,\ y,\ z,\ 0) = \varphi(x,\ y,\ z), \\ &u_t(x,\ y,\ z,\ 0) = \psi(x,\ y,\ z) \end{aligned}\right\} \quad (M(x,\ y,\ z) \subset T). \tag{74}$$

Разложение общей краевой задачи на ряд более простых происходит аналогично предшествующему. Отметим, что возможна также постановка предельных краевых задач для неограниченной области, полупространства и т. д.

10. Теорема единственности. При решении краевых задач:

1) надо убедиться в том, что дополнительные условия достаточны для выделения однозначного решения; это достигается доказательством теоремы *единственности*;

2) надо убедиться в том, что дополнительные условия не переопределяют задачу, т. е. среди них нет несовместных условий; это достигается доказательством теоремы *существования*; доказательство

существования решения обычно тесно связано с методом нахождения решения.

В настоящем пункте нами будет доказана следующая *теорема единственности*:

возможно существование только одного решения уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) \tag{75}$$

$$(0 < x < l, \ t > 0),$$

удовлетворяющего начальным и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x); \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

При этом предполагается, что функция $u(x, t)$ непрерывна вместе со своими, вторыми производными на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ при $t \geqslant 0$ и что $\rho(x) > 0$, $k(x) > 0$ суть непрерывные функции.

Допустим, что существует два решения рассматриваемой задачи:

$$u_1(x, t), \quad u_2(x, t),$$

и рассмотрим разность

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

Функция $v(x, t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{77}$$

и однородным дополнительным условиям

$$\left.\begin{aligned} v(x, 0) &= 0, \\ v_t(x, 0) &= 0; \\ v(0, t) &= 0, \\ v(l, t) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Докажем, что функция $v(x, t)$, определяемая указанными условиями (78), тождественно равна нулю.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \{k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\}\, dx \tag{79}$$

и покажем, что она не зависит от t. Физический смысл функции $E(t)$ очевиден: это полная энергия струны в момент времени t. Продифференцируем $E(t)$ по t, выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла, что возможно в силу непрерывности вторых производных

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})\, dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое правой части, будем иметь:

$$\int_0^l kv_x v_{xt}\, dx = [kv_x v_t]_0^l - \int_0^l v_t (kv_x)_x\, dx. \tag{80}$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничных условий (из $v(0, t) = 0$ следует $v_t(0, t) = 0$ и аналогично для $x = l$). Отсюда следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [\rho v_t v_{tt} - v_t (kv_x)_x]\, dx = \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x]\, dx = 0,$$

т. е. $E(t) = \text{const}$. Учитывая начальные условия, получаем:

$$E(t) = \text{const} = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [k(v_x)^2 + \rho (v_t)^2]_{t=0}\, dx = 0, \tag{81}$$

так как

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Пользуясь формулой (81) и положительностью k и ρ, заключаем, что

$$v_x(x, t) \equiv 0, \quad v_t(x, t) \equiv 0,$$

откуда и следует тождество

$$v(x, t) = \text{const} = C_0. \tag{82}$$

Пользуясь начальным условием, находим:

$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$

тем самым доказано, что

$$v(x, t) \equiv 0. \tag{83}$$

Следовательно, если существуют две функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

Для второй краевой задачи функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет граничным условиям

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \tag{84}$$

и подстановка в формуле (80) также обращается в нуль. Дальнейшая часть доказательства теоремы остается без изменений.

Для третьей краевой задачи доказательство требует некоторого видоизменения. Рассматривая попрежнему два решения u_1 и u_2, получаем для их разности $v(x, t) = u_1 - u_2$ уравнение (77) и граничные условия

$$\left.\begin{aligned} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) &= 0 \quad (h_1 \geqslant 0), \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) &= 0 \quad (h_2 \geqslant 0). \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Представим подстановку в (80) в виде

$$[k v_x v_t]_0^l = -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial t}[h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)].$$

Интегрируя $\frac{dE}{dt}$ в пределах от нуля до t, получим:

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (k v_x)_x]\, dx\, dt -$$

$$- \frac{k}{2}\{h_2[v^2(l, t) - v^2(l, 0)] + h_1[v^2(0, t) - v^2(0, 0)]\},$$

откуда в силу уравнения и начальных условий следует:

$$E(t) = -\frac{k}{2}[h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)] \leqslant 0. \tag{86}$$

Так как в силу неотрицательности подинтегральной функции $E(t) \geqslant 0$, то

$$E(t) \equiv 0, \tag{87}$$

а следовательно, и

$$v(x, t) \equiv 0. \tag{88}$$

Теорема единственности для третьей краевой задачи доказана.

Изложенный здесь метод доказательства теоремы единственности, основанный на использовании выражения полной энергии, широко применяется при доказательстве теорем единственности в различных областях математической физики, например в теории электромагнитных полей, теории упругости и гидродинамике.

Доказательство единственности других краевых задач будет дано в дальнейшем при рассмотрении соответствующих вопросов.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что уравнение малых крутильных колебаний стержня имеет вид

$$\Theta_{tt} = a^2 \Theta_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{GJ}{k}},$$

где Θ есть угол поворота сечения стержня с абсциссой x, G — модуль сдвига, J — полярный момент инерции поперечного сечения, а k — момент инерции единицы длины стержня. Дать физическую интерпретацию граничных условий 1-го, 2-го и 3-го типов для этого уравнения.

2. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена на одном из концов и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Вывести уравнение малых колебаний нити.

Ответ: $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad a^2 = g,$$

где $u(x, t)$ — смещение точки, l — длина нити, g — ускорение силы тяжести.

3. Тяжелая однородная нить длины l, прикрепленная верхним концом ($x=0$) к вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Вывести уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия.

Ответ: $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \omega^2 u, \text{ где } a^2 = g.$$

4. Вывести уравнение поперечных колебаний струны в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

Ответ: $$v_{tt} = a^2 v_{xx} - h^2 v_t.$$

5. Вывести граничные условия для уравнения продольных колебаний упругого стержня (пружины) в случае, когда верхний конец стержня закреплен жестко, а к нижнему прикреплен груз P, если:

а) за положение равновесия принимается напряженное состояние стержня под действием неподвижного груза P, подвешенного к нижнему концу (статическое растяжение);

б) за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня (например, в начальный момент из-под груза убирается подставка, и груз начинает растягивать стержень).

6. Написать уравнение и условия, определяющие процесс крутильных колебаний стержня, к обоим концам которого прикреплены шкивы.

Ответ: При $x=0$, $x=l$ должны выполняться граничные условия вида

$$\Theta_{tt}(0, t) = \alpha_1^2 \Theta_x(0, t),$$
$$\Theta_{tt}(l, t) = -\alpha_2^2 \Theta_x(l, t).$$

7. В некоторой точке $x=x_0$ струны ($0 \leqslant x \leqslant l$) подвешен груз массы M. Вывести условия, определяющие процесс колебания.

8. К концу $x=l$ упругого стержня, упруго закрепленного в точке $x=0$, подвешен груз массы M. Написать уравнение и условия,

определяющие продольные колебания стержня, предполагая, что на него, кроме того, действует внешняя сила. Рассмотреть два случая:

а) сила распределена по стержню с плотностью $f(x, t)$;

б) сила сосредоточена в точке $x = x_0$ и равна $F_0(t)$.

9. Рассмотреть процесс малых колебаний идеального газа в цилиндрической трубке. Вывести сначала основные уравнения гидродинамики, а затем, предполагая процесс адиабатическим, вывести дифференциальное уравнение для: 1) плотности ρ, 2) давления p, 3) потенциала φ скорости частиц газа, 4) скорости v, 5) смещения u частиц. Привести примеры реализации граничных условий 1-го, 2-го и 3-го типов для этих уравнений.

10. Установить соотношения подобия между процессами механических, акустических и электрических колебаний.

11. Привести примеры граничных условий 1-го, 2-го и 3-го типов для телеграфных уравнений.

12. Рассмотреть процесс продольных колебаний неоднородного стержня ($k = k_1$ при $x < x_0$, $k = k_2$ при $x > x_0$) и вывести условия сопряжения в точке стыка неоднородных частей стержня (при $x = x_0$).

13. Дать физическую интерпретацию граничного условия

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u_t(0, t) = 0.$$

14. Привести пример механической модели, для которой реализовалось бы уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_t + c u.$$

§ 2. Метод распространяющихся волн

1. Формула Даламбера. Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - a\,dt = 0, \quad dx + a\,dt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Введем, как обычно, новые переменные

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at.$$

Вычисляя производные

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \qquad u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_t = a(u_\xi - u_\eta), \qquad u_{tt} = (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})\, a^2,$$

видим, что уравнение колебаний струны может быть приведено к форме

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3}$$

Найдем общий интеграл последнего уравнения. Очевидно, для всякого решения уравнения (3)

$$u_\eta(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ — некоторая функция только переменного η. Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получим:

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta)\, d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{4}$$

где f_1 и f_2 являются функциями только переменных ξ и η. Обратно, каковы бы ни были дифференцируемые функции f_1 и f_2, функция $u(\xi, \eta)$, определяемая формулой (4), представляет собой решение уравнения (3). Так как всякое решение уравнения (3) может быть представлено в виде (4) при соответствующем выборе f_1 и f_2, то формула (4) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно, функция

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \tag{5}$$

является общим интегралом уравнения (1).

Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует; тогда оно дается формулой (5). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{6}$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{7}$$

Интегрируя второе равенство, получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + C,$$

где x_0 и C — постоянные. Из равенств

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + C$$

находим:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)\,d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)\,d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Таким образом, мы определили функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ, причем равенства (8) должны иметь место для любого значения аргумента [1]). Подставляя в (5) найденные значения f_1 и f_2, получим:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int_{x_0}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha - \int_{x_0}^{x-at}\psi(\alpha)\,d\alpha\right\}$$

или

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha. \tag{9}$$

Формулу (9), называемую формулой Даламбера, мы получили, предполагая существование решения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало второе решение задачи (1)—(2), то оно представлялось бы формулой (9) и совпадало бы с первым решением.

Нетрудно проверить, что формула (9) удовлетворяет (в предположении двукратной дифференцируемости функции φ и однократной дифференцируемости функции ψ) уравнению и начальным условиям. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

2. Физическая интерпретация. Функция $u(x, t)$, являющаяся решением уравнения колебания с начальными условиями, равна сумме двух функций:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}, \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

[1]) В формуле (5) функции f_1 и f_2 определены неоднозначно. Если от f_1 отнять, а к f_2 прибавить некоторую постоянную C_1, то u не изменится. В формуле (8) постоянная C не определяется через φ и ψ, однако мы можем ее отбросить, не меняя значения u. При сложении f_1 и f_2 слагаемые $\pm\frac{C}{2}$ сокращаются.

Первое из этих слагаемых, $u_1(x, t)$, представляет процесс распространения начального отклонения при нулевой начальной скорости ($\psi(x) = 0$); второе слагаемое, $u_2(x, t)$, соответствует тому случаю, когда колебания вызываются начальной скоростью (или импульсом) при нулевом начальном отклонении. Функцию $u(x, t)$ можно геометрически представить в виде поверхности в пространстве u, x, t (рис. 4, *а*). Сечение этой поверхности плоскостью $t = t_0$, даваемое формулой $u = u(x, t_0)$, представляет профиль струны в момент t_0. Сечение же поверхности $u(x, t)$ плоскостью $x = x_0$, даваемое формулой $u = u(x_0, t)$, представляет процесс движения точки x_0.

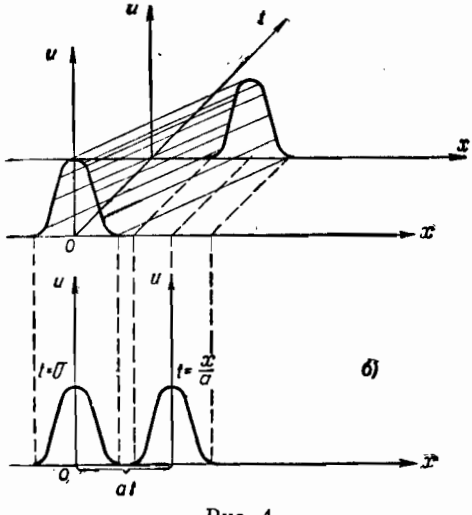


Рис. 4.

Функцию $u(x, t)$, определяемую формулой $u = f(x - at)$, в физике называют *распространяющейся волной* [1]). Профили отклонений, определяемые этой функцией в различные моменты t, можно легко представить следующим способом. Допустим, что параллельно оси x движется наблюдатель со скоростью a (рис. 4, *б*). Если в начальный момент $t_0 = 0$ наблюдатель занимал некоторое положение $x = 0$, то к моменту t он переместился на расстояние at вправо. Введем подвижную систему осей, движущуюся вместе с наблюдателем, полагая

$$x' = x - at,$$
$$t' = t.$$

Тогда в новой системе координат (x', t') функция $u = f(x - at)$ будет определяться формулой

$$u(x', t') = f(x'),$$

т. е. наблюдатель все время будет видеть неизменный профиль $f(x')$, совпадающий с профилем $f(x)$, который он видел в начальный момент.

Таким образом, функция $f(x - at)$ представляет неизменный профиль $f(x')$, перемещающийся вправо со скоростью a (распространяющуюся волну).

---

[1]) В физике часто используется также другое обозначение: $u = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$.

Если мы рассмотрим *«фазовую плоскость»* (x, t), то функция $u = f(x - at)$ сохраняет постоянное значение на линиях

$$x - at = \text{const}.$$

Поверхность $u = f(x - at)$ является цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными линии $x = at$, причем направляющей служит профиль отклонения в начальный момент.

Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля только в промежутке (x_1, x_2), а вне его равна нулю. Линии $x - at = x_2$ и $x - at = x_1$ представляют передний и задний фронты распространяющейся волны $f(x - at)$. Эти линии разбивают фазовую плоскость (x, t) на области *I*, *II* и *III*.

Области *I* и *III* состоят из точек (x, t), соответствующих тем точкам струны x, которые в данный момент t лежат, соответственно, впереди и сзади распространяющейся вправо волны. Точкам (x, t) области II соответствуют точки x, через которые в момент t проходит волна, распространяющаяся вправо (рис. 5).

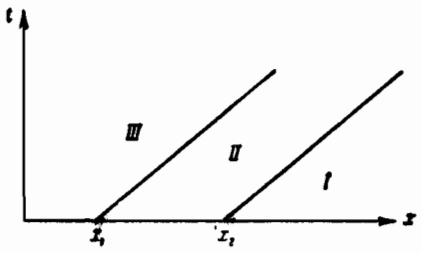


Рис. 5.

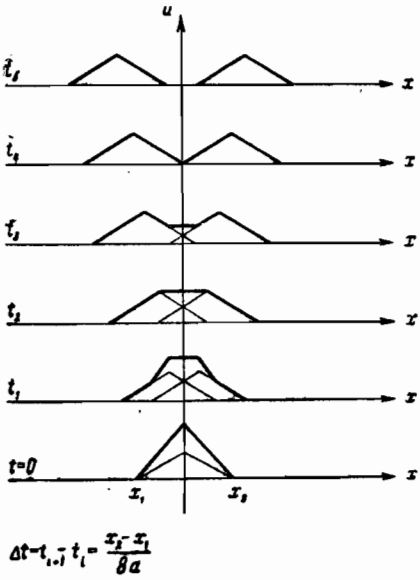


Рис. 6.

Функция $f(x + at)$ представляет, очевидно, волну, распространяющуюся налево со скоростью a. К ней относится все сказанное относительно волны, распространяющейся вправо. Функция $u_1(x, t)$, представляющая распространение начального отклонения $\varphi(x)$ при нулевой начальной скорости $(\psi(x) = 0)$, дается формулой (10) в виде суммы двух волн, распространяющихся направо и налево со скоростью a, причем начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{\varphi(x)}{2}$, равной половине начального отклонения.

В качестве первого примера рассмотрим распространение начального отклонения, заданного в виде равнобедренного треугольника. Эта форма получается, если оттянуть струну в середине отрезка (x_1, x_2), придерживая ее в точках x_1 и x_2. Мы даем на рис. 6

последовательные положения этой струны через моменты времени

$$\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{8a}.$$

Если вычертить последовательные положения струны через достаточно малые промежутки времени, то из таких кадров можно составить мультипликационный фильм, представляющий распространение заданного начального отклонения.

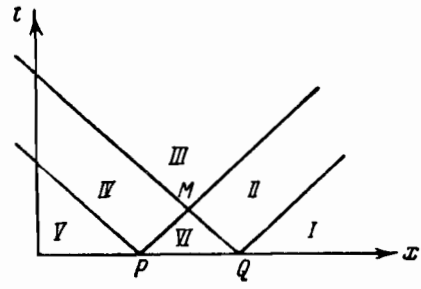


Рис. 7.

Если на фазовой плоскости (x, t) через концы отрезка $(P(x_1, 0), Q(x_2, 0))$ провести характеристики (рис. 7), то плоскость разбивается на области I, V, куда для данного момента времени t отклонение еще не дошло, область III, где отклонения уже прошли, и области II, IV, VI, где имеют место отклонения.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда начальное отклонение равно нулю и начальная скорость отлична от нуля только на отрезке (x_1, x_2), где она принимает постоянное значение

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \psi_0 & \text{при } x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ 0 & \text{при } x > x_2 \text{ или } x < x_1. \end{cases}$$

В этом случае формула (9) принимает вид

$$u(x, t) = u_2(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha = [\Psi(x + at) - \Psi(x - at)].$$

Функция $u(x, t)$ и в этом случае дается в виде двух волн, причем $\Psi(x)$ является интегралом $\psi(\alpha)$ и представляет профиль волны, идущей налево:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

Нам будет удобно выбрать $x_0 = x_1$. Эта вспомогательная функция $\Psi(x)$ изображена на рис. 8, причем

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_1, \\ \frac{1}{2a}(x - x_1)\psi_0 & \text{при } x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ \frac{1}{2a}(x_2 - x_1)\psi_0 & \text{при } x \geqslant x_2. \end{cases}$$

Для получения функции $u(x, t)$ мы должны взять разность левой и правой волн, определяемых функцией $\Psi(x)$. На рис. 9 изображены последовательные положения этих волн и их разности через промежутки времени $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{8a}$. При $t > \frac{x_2 - x_1}{2a}$ профиль отклонения представляет трапецию, равномерно расширяющуюся с течением времени. Если $\psi(x)$ отлично от постоянной, основные черты рассмотренной задачи остаются без изменений. Пользуясь фазовой плоскостью (рис. 7), легко представить, каких областей отклонения еще не достигли (*I* и *V*), где эти отклонения достигли максимального значения (*III*) и где отклонения еще не достигли максимального значения (*II*, *IV* и *VI*).

Если возмущение задается не только на одном участке, а на нескольких, то картина распространения колебаний получится при помощи сложения отклонений, соответствующих влиянию отдельных участков. Рассмотренные два примера позволяют представить картину распространения колебаний в общем случае.

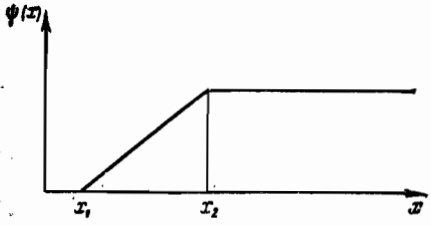


Рис. 8.

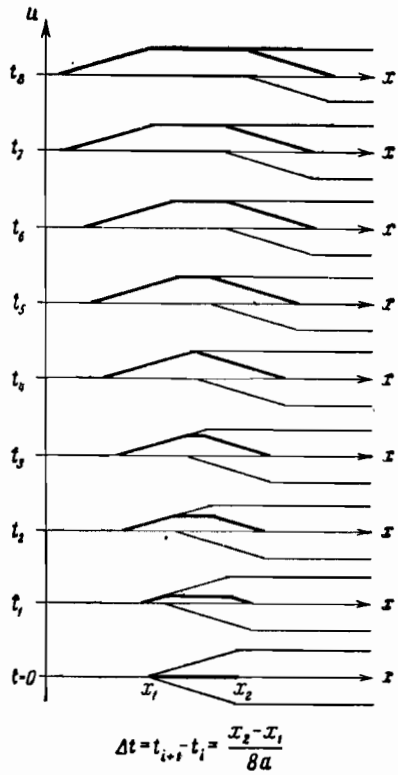


Рис. 9.

В качестве третьего примера рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенного импульса. Ударяя струну на участке $(x, x + \Delta x)$ каким-либо предметом (молотком), мы прикладываем к этому участку импульс I, равный изменению количества движения молотка в момент удара. Изменение скорости точек струны в интервале Δx равно v, где v — начальная скорость. Считая, что начальная скорость v постоянна на Δx, найдем, что изменение количества движения равно

$$\rho \Delta x v = I,$$

где ρ — линейная плотность струны. Таким образом, мы должны

решить задачу о колебаниях струны с начальной скоростью

$$\psi = \begin{cases} v = \dfrac{I}{\rho\,\Delta x} & \text{внутри } (x,\ x+\Delta x), \\ 0 & \text{вне } (x,\ x+\Delta x) \end{cases}$$

при нулевом начальном отклонении.

Отклонение, вызываемое таким способом, представляет собой трапецию, нижнее основание которой равно $2at+\Delta x$, а верхнее $2at-\Delta x$ $\left(\text{для } t > \dfrac{\Delta x}{2a}\right)$. Величина $\dfrac{I}{\Delta x} = I_0$, очевидно, может быть названа плотностью импульса. При $\Delta x \to 0$ получим следующую картину: отклонения будут равны нулю всюду вне промежутка $(x-at,\ x+at)$, а внутри него равны $\dfrac{1}{2a}\dfrac{I}{\rho}$. Можно условно говорить, что эти отклонения вызываются точечным импульсом I.

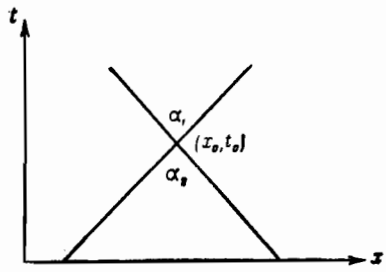


Рис. 10.

Рассмотрим фазовую плоскость $(x,\ t)$ и проведем через точку $(x_0,\ t_0)$ обе характеристики:

$$x-at = x_0 - at_0,$$
$$x+at = x_0 + at_0$$

(рис. 10). Они определяют два угла α_1 и α_2, называемые верхним и, соответственно, нижним характеристическими углами для точки $(x_0,\ t_0)$.

Действие точечного импульса в точке $(x_0,\ t_0)$ вызывает отклонение, равное $\dfrac{1}{2a}\dfrac{I}{\rho}$ внутри верхнего характеристического угла и нулю вне его.

Остановимся теперь на вопросе об области, в которой решение однозначно определено начальными условиями, заданными на некотором отрезке PQ прямой $t=0$.

Формула (9) показывает, что для определения функции u в некоторой точке $M(x,\ t)$ фазовой плоскости $(x,\ t)$ (рис. 7) достаточно знать начальные условия на отрезке PQ, где P, Q — точки оси x с координатами $x-at$ и $x+at$. Треугольник MPQ, образованный отрезками MP и MQ характеристик, проведенных из точки M, и отрезком PQ оси x, называют *характеристическим треугольником* точки M.

Если начальные условия заданы не на всей бесконечной прямой, а на некотором отрезке PQ, то эти начальные данные однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника, основанием которого является отрезок PQ.

3. Устойчивость решений. Решение уравнения (1) однозначно определено начальными условиями (2). Докажем, что это ре-

шение меняется непрерывно при непрерывном изменении начальных условий.

Каков бы ни был промежуток времени t_0 и какова бы ни была степень точности ε, найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0)$, что всякие два решения уравнения (1) $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ в течение промежутка времени t_0 будут различаться между собой меньше чем на ε:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0),$$

если только начальные значения

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \psi_1(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x) \end{cases}$$

отличаются друг от друга меньше чем на δ:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta; \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta. \tag{11}$$

Доказательство этой теоремы чрезвычайно просто. Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ связаны со своими начальными значениями формулой (9), так что

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)|\, d\alpha,$$

откуда в силу неравенств (11) получаем:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\delta \cdot 2at \leqslant \delta(1 + t_0),$$

что и доказывает наше утверждение, если положить

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0}.$$

Всякий физически определенный процесс должен характеризоваться функциями, непрерывно зависящими от начальных условий, определяющих процесс. Если бы не было этой непрерывной зависимости, то два существенно различных процесса могли бы соответствовать практически одинаковым системам начальных условий (различие которых лежит в пределах точности измерений). Процессы такого типа нельзя считать определяемыми (физически) такими начальными условиями. Из предыдущей теоремы следует, что процесс колебаний струны не только математически, но и физически определен начальными условиями.

Если решение краевой задачи непрерывно зависит от начальных условий, то часто говорят, что решение краевой задачи устойчиво или что краевая задача проставлена *корректно*.

Приведем пример задачи, решение которой неустойчиво.

Функция $u(x, y)$, являющаяся решением уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

однозначно определяется своими начальными условиями [1])

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_y(x, 0) = \psi(x).$$

Рассмотрим функции

$$u^{(1)}(x, y) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \cdot \operatorname{ch} \lambda y,$$

удовлетворяющие уравнению Лапласа. Функция $u^{(2)}(x, y)$ зависит от λ, как от параметра. Начальные значения

$$u^{(1)}(x, 0) = 0, \qquad u^{(2)}(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x,$$

$$u_y^{(1)}(x, 0) = 0, \qquad u_y^{(2)}(x, 0) = \psi(x) = 0$$

различаются сколь угодно мало при достаточно больших λ. Однако при этом решение $u^{(2)}(x, y)$ может стать сколь угодно большим,

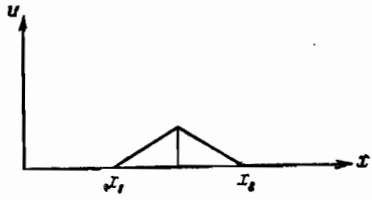


Рис. 11.

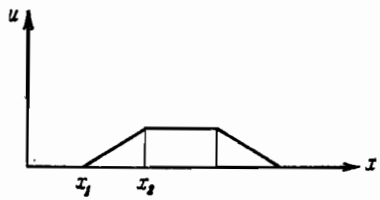


Рис. 12.

каково бы ни было фиксированное значение y. Следовательно, задача с начальными условиями для уравнения Лапласа является некорректно поставленной.

Отметим теперь следующее обстоятельство. Очевидно, что функция $u(x, t)$, определяемая формулой

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha,$$

может быть решением уравнения (1) только в том случае, если функция $\psi(x)$ дифференцируема, а функция $\varphi(x)$ дифференцируема дважды. Из сказанного ясно, что функции, изображенные на рис. 11 и 12, не могут являться решением уравнения (1), так как они не

[1]) Эти условия математически однозначно определяют решение уравнения Лапласа. В самом деле, задание $u_y(x, 0)$ эквивалентно заданию $v_x(x, 0)$, где $v(x, y)$ — функция гармонически сопряженная для $u(x, y)$. Этим с точностью до постоянной однозначно определяется аналитическая функция, действительной частью которой является функция $u(x, y)$ (см. главу IV, § 1, п. 5).

всюду дважды дифференцируемы. Более того, можно утверждать, что решения уравнения колебаний, удовлетворяющего условиям (2), не существует, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют нужных производных. Действительно, повторяя рассуждения, приведшие нас к формуле (9), мы можем утверждать, что если существует решение уравнения колебаний, то оно должно представляться формулой (9). Если же функции φ, ψ не дифференцируемы достаточное число раз, то формула (9) определяет функцию, не удовлетворяющую уравнению (1), т. е. не существует решения этой задачи.

Однако, если немного изменить начальные условия, заменив их дифференцируемыми функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то этим начальным функциям уже будет соответствовать решение уравнения (1). Кроме того, заметим, что при доказательстве теоремы настоящего пункта мы фактически доказали, что функции, определяемые формулой (9), непрерывно зависят от начальных функций φ и ψ (независимо от того, дифференцируемы эти функции или нет). Таким образом, если некоторым функциям φ, ψ не соответствует решение уравнения колебаний, удовлетворяющее условиям (2), то функция, определяемая формулой (9), является пределом решений уравнения колебаний с немного сглаженными начальными условиями.

4. Полуограниченная прямая и метод продолжений. Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой $x \geqslant 0$. Эта задача имеет особенно важное значение при изучении процессов отражения волн от конца и ставится следующим образом:

найти решение уравнения колебаний

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (\text{или } u_x(0, t) = \nu(t))$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Рассмотрим сперва однородное граничное условие

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{или } u_x(0, t) = 0),$$

т. е. задачу о распространении начального возмущения на струне с закрепленным концом $x = 0$ (или свободным концом).

Отметим следующие две леммы о свойствах решений уравнений колебаний, определенных на бесконечной прямой.

1. Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой являются нечетными функциями относительно некоторой

точки x_0, то соответствующее решение в этой точке x_0 равно нулю.

2. Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой являются четными функциями относительно некоторой точки x_0, то производная по x соответствующего решения в этой точке равна нулю.

Докажем лемму 1. Примем x_0 за начало координат, $x_0 = 0$. В этом случае условия нечетности начальных данных запишутся в виде

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (9), при $x = 0$ равна

$$u(0, t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi(x)$, а второе равно нулю, поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю.

Аналогично доказывается лемма 2. Условия четности начальных данных имеют вид

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \quad \psi(x) = \psi(-x).$$

Заметим, что производная четной функции является функцией нечетной

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

Из формулы (9) следует:

$$u_{xx}(0, t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\psi(at) - \psi(-at)] = 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi'(x)$, а второе — в силу четности $\psi(x)$ [1]).

При помощи этих двух лемм можно решить следующие задачи.

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

---

[1]) Эти две леммы являются следствием того, что если начальные условия четны (или нечетны), то и при $t > 0$ функция $u(x, t)$, определяемая формулой Даламбера, обладает тем же свойством (предоставляем читателю доказать это). Геометрически очевидно, что нечетная непрерывная функция и производная четной дифференцируемой функции равны нулю при $x = 0$.

и граничному условию

$$u(0,\ t)=0$$

(первая краевая задача).

Рассмотрим функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, являющиеся нечетным продолжением $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{для } x>0,\\ -\varphi(-x) & \text{для } x<0,\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & \text{для } x>0,\\ -\psi(-x) & \text{для } x<0.\end{cases}$$

Функция

$$u(x,\ t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)\,d\alpha$$

определена для всех x и $t>0$. В силу леммы 1

$$u(0,\ t)=0.$$

Кроме того, эта функция удовлетворяет при $t=0$ следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned}u(x,\ 0)&=\Phi(x)=\varphi(x),\\ u_t(x,\ 0)&=\Psi(x)=\psi(x)\end{aligned}\right\}\qquad x>0.$$

Таким образом, рассматривая полученную функцию $u(x,\ t)$ только для $x>0$, $t>0$, мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Возвращаясь к прежним функциям, можно написать:

$$u(x,\ t)=\left\{\begin{aligned}&\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha \text{ для } t<\frac{x}{a},\ x>0,\\ &\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha \text{ для } t>\frac{x}{a},\ x>0.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

В области $t<\frac{x}{a}$ влияние граничных условий не сказывается, и выражение для $u(x,\ t)$ совпадает с решением (9) для бесконечной прямой.

Аналогично, если при $x=0$ мы имеем свободный конец

$$u_x(0,\ t)=0,$$

то, беря четное продолжение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{для } x>0,\\ \varphi(-x) & \text{для } x<0;\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & \text{для } x>0,\\ \psi(-x) & \text{для } x<0,\end{cases}$$

получим решение уравнения колебаний

$$u(x,\ t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)\,d\alpha$$

или

$$u(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha & \text{для } t<\dfrac{x}{a},\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+ & \\[2ex] \quad+\dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha+\int\limits_{0}^{at-x}\psi(\alpha)\,d\alpha\right\} & \text{для } t>\dfrac{x}{a},\end{cases}$$

удовлетворяющие в области $x\geqslant 0$ начальным условиям (2) и граничному условию

$$u_x(0,\ t)=0.$$

В дальнейшем при решении различных задач нам часто придется пользоваться методом продолжения на бесконечную область начальных данных, определенных на некоторой части этой области. Поэтому мы еще раз сформулируем полученные результаты в двух следующих правилах.

Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $u(0,\ t)=0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую нечетно.

Для решения задачи на полубесконечной прямой с граничным условием $u_x(0,\ t)=0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую четно.

Рассмотрим два примера. Пусть начальные данные на полуограниченной прямой, закрепленной при $x=0$, отличны от нуля только в интервале $(a,\ b)$, $0<a<b$, в котором начальное отклонение, даваемое функцией $\varphi(x)$, изображается равнобедренным треугольником, а $\psi(x)=0$. Решение этой задачи будет получено, если начальные данные нечетно продолжить на бесконечную прямую. Процесс распространения волн изображен на рис. 13. Вначале процесс происходит так же, как и на неограниченной прямой. Заданное отклонение раз-

бивается на две волны, движущиеся в разные стороны с постоянной скоростью, причем это продолжается до тех пор, пока полуволна, идущая налево, не дойдет до точки $x=0$ (рис. 13). В этот момент с левой стороны ($x\leqslant 0$), на которой происходили аналогичные процессы, к точке $x=0$ подходит полуволна с «обратной фазой». В последующие моменты происходит отражение полуволны от закрепленного конца. Это изображено в деталях на рис. 13. Результирующий профиль отражающейся волны укорачивается, отклонения исчезают, затем отклонения появляются внизу (с отрицательной фазой) и, наконец, отраженная полуволна пойдет вправо за ушедшей туда полуволной с той же скоростью. Таким образом, при отражении волны от закрепленного конца струны, ее фаза меняет знак.

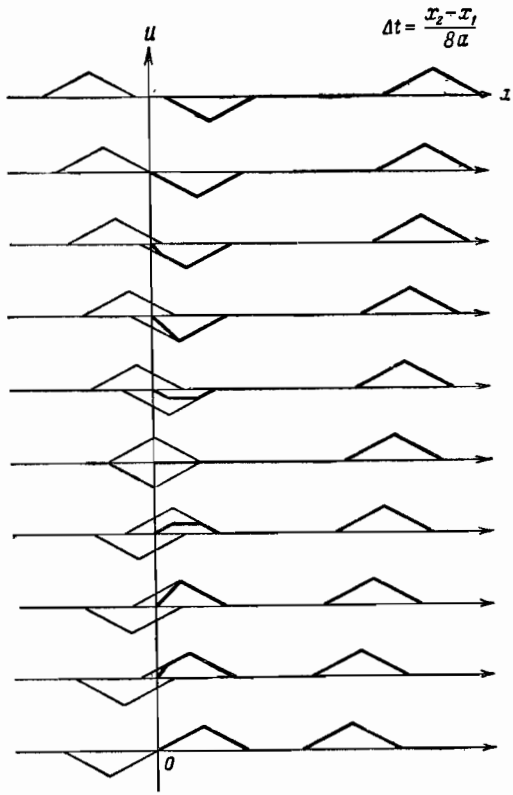


Рис. 13.

Рассмотрим второй пример. Пусть на полуограниченной прямой $x\geqslant 0$, закрепленной при $x=0$, начальное отклонение всюду равно нулю, а начальная скорость $\psi(x)$ отлична от нуля только в интервале (x_1, x_2) $(0<x_1<x_2)$, причем здесь $\psi(x)=\text{const}$. Продолжим нечетно начальные данные. От каждого интервала (x_1, x_2) и $(-x_1, -x_2)$ распространяются отклонения, подобные отклонениям, изображенным на рис. 14. Как видно из этого рисунка, в начальной стадии в области $x>0$ процесс происходит так же, как и на бесконечной прямой. Затем происходит отражение от закрепленного конца и, наконец, волна с профилем в виде равнобедренной трапеции с постоянной скоростью движется вправо.

Изучение отражения от свободного конца проводится аналогично, только начальные данные нужно продолжать четно, так что отражение волны от свободного конца будет происходить не с измененной, а с той же фазой.

Мы рассмотрели задачи с однородными граничными условиями

$$u(0,\ t) = \mu(t) = 0$$

или

$$u_x(0,\ t) = \nu(t) = 0.$$

В общем случае неоднородных граничных условий решение пишется в виде суммы, каждое слагаемое которой удовлетворяет только одному из поставленных условий (либо граничному, либо начальному).

Обратимся теперь к решению уравнения при нулевых начальных и заданном граничном условиях

$$\bar{u}(x,\ 0) = 0, \quad \bar{u}_t(x,\ 0) = 0, \quad \bar{u}(0,\ t) = \mu(t), \quad t > 0.$$

Очевидно, что граничный режим вызовет волну, распространяющуюся вдоль струны направо со скоростью a, что подсказывает нам аналитическую форму решения:

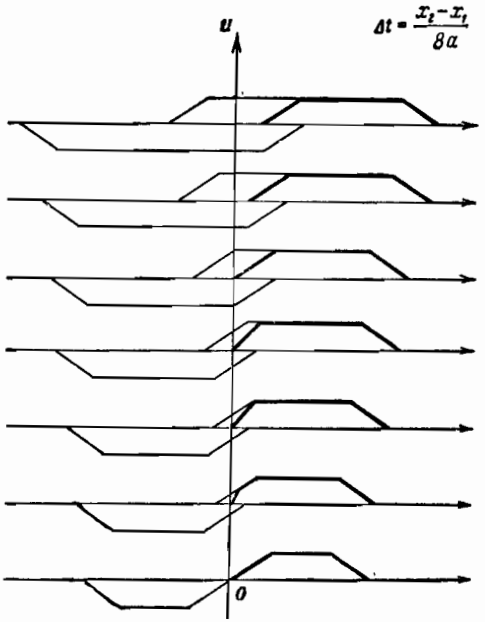


Рис. 14.

$$\bar{u}(x,\ t) = f(x - at).$$

Определим функцию f из граничного условия

$$\bar{u}(0,\ t) = f(-at) = \mu(t),$$

откуда

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right),$$

так что

$$\bar{u}(x,\ t) = \mu\left(-\frac{x - at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Однако эта функция определена лишь в области $x - at \leqslant 0$, так как $\mu(t)$ определена для $t \geqslant 0$. На рис. 15 эта область изображается заштрихованной частью фазовой плоскости. Чтобы найти $\bar{u}(x, t)$ для всех значений аргументов, продолжим функцию $\mu(t)$ на отрицательные значения t, полагая $\mu(t) = 0$ для $t < 0$. Тогда функция

$$\bar{u}(x,\ t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

будет определена для всех значений аргументов и будет удовлетворять нулевым начальным условиям.

Сумма этой функции и функции (12), определенной в начале настоящего пункта, представляет решение первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha \quad \text{для} \quad t < \dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha \quad \text{для} \quad t > \dfrac{x}{a}. \end{cases} \tag{13}$$

Аналогично может быть построено решение второй краевой задачи. О третьей краевой задаче см. п. 7, стр. 76.

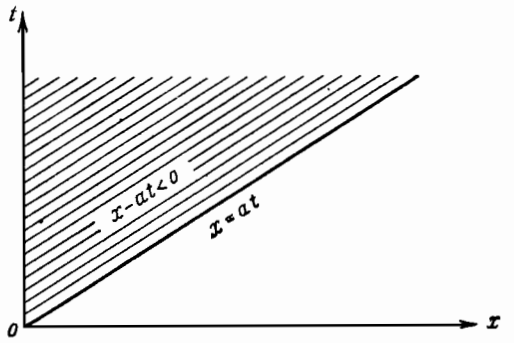


Рис. 15.

Мы ограничимся здесь решением краевой задачи для однородного уравнения колебаний.

Решение неоднородного уравнения см. в п. 8.

5. Задачи для ограниченного отрезка. Рассмотрим краевые задачи для ограниченного отрезка $(0, l)$. Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad t \geqslant 0$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Рассмотрим предварительно случай однородных граничных условий

$$u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0.$$

Будем искать решение задачи в этом случае методом продолжения, предполагая возможность следующего представления:

$$u(x,\ t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\,d\alpha,$$

где Φ и Ψ — функции, подлежащие определению. Начальные условия

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \Psi(x) = \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

определяют значения Φ и Ψ в интервале $(0,\ l)$.

Чтобы удовлетворить нулевым граничным условиям, наложим на функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ требование нечетности относительно точек $x = 0,\ x = l$:

$$\Phi(x) = -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = -\Phi(2l - x),$$
$$\Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = -\Psi(2l - x).$$

Сопоставляя эти равенства, получим:

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \qquad (x' = -x)$$

и аналогично для $\Psi(x)$, т. е. Φ и Ψ являются периодическими функциями с периодом $2l$.

Нетрудно видеть, что условия нечетности относительно начала координат и условия периодичности определяют продолжения $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ на всей прямой $-\infty < x < \infty$. Подставляя их в формулу (9), получаем решение задачи.

На рис. 16 совмещены фазовая плоскость $(x,\ t)$ и плоскость $(x,\ u)$, в которой дано начальное отклонение и его продолжение. На фазовой плоскости штриховкой выделены полосы, внутри которых отклонение отлично от нуля (см. рис. 7). Знаки плюс и минус, стоящие в этих полосах, указывают на знак (фазу) отклонения (в виде равнобедренного треугольника). Пользуясь этим рисунком, легко представить себе профиль отклонения струны в любой момент t. Так, в момент $t = \frac{2l}{a}$ мы получим отклонения, совпадающие с начальными. Таким образом, функция $u(x,\ t)$ будет периодической функцией t с периодом $T = \frac{2l}{a}$.

Рассмотрим теперь задачу о распространении граничного режима. Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,\ 0)=\varphi(x)=0,$$
$$u_t(x,\ 0)=\psi(x)=0$$

и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t)&=\mu(t),\\ u(l,\ t)&=0 \end{aligned}\right\} \quad t>0.$$

Из результатов п. 4 вытекает, что при $t<\frac{l}{a}$ решением служит функция

$$u(x,\ t)=\bar{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right), \quad \text{где} \quad \bar{\mu}(t)=\begin{cases} \mu(t), & t>0,\\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Однако эта функция не удовлетворяет граничному условию

$$u(l,\ t)=0 \quad \text{при} \quad t>\frac{l}{a}.$$

Рассмотрим «отраженную» волну, идущую налево и имеющую при

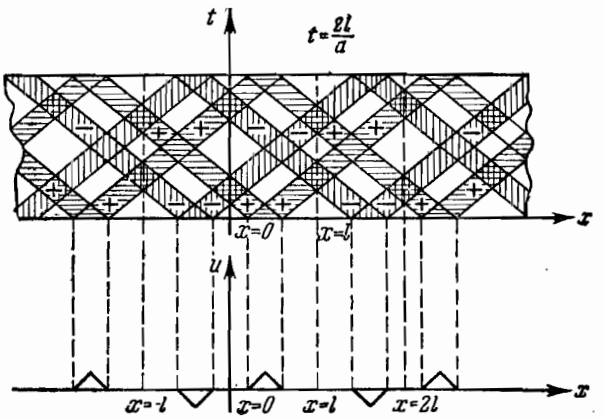


Рис. 16.

$x=l$ отклонение, равное $\bar{\mu}\left(t-\frac{l}{a}\right)$. Ее аналитическое выражение дается формулой

$$\bar{\mu}\left(t-\frac{l}{a}-\frac{l-x}{a}\right)=\mu\left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right).$$

Легко проверить, что разность двух волн

$$\bar{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right)-\bar{\mu}\left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right)$$

есть решение уравнения при $t<\frac{2l}{a}$.

Продолжая этот процесс далее, получим решение в виде ряда

$$u(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\mu}\left(t-\frac{2nl}{a}-\frac{x}{a}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}\left(t-\frac{2nl}{a}+\frac{x}{a}\right), \qquad (14)$$

содержащего только конечное число отличных от нуля членов, ибо с каждым новым отражением аргумент уменьшается на $\frac{2l}{a}$, а функция $\bar{\mu}(t)=0$ для $t<0$. Выполнение граничных условий проверяется непосредственно. В самом деле, положим $x=0$ и выделим из первой суммы отдельно первое слагаемое при $n=0$, равное $\mu(t)$. Остальные слагаемые первой и второй сумм, соответствующие одинаковым значениям n, взаимно уничтожаются, что показывает, что $u(0, t)=\mu(t)$.

Заменяя n на $n-1$ и изменяя в связи с этим пределы суммирования, преобразуем первую сумму к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}\left(t-\frac{2nl}{a}+\frac{2l-x}{a}\right).$$

Полагая теперь $x=l$, непосредственно убеждаемся в том, что слагаемые первой и второй сумм взаимно уничтожаются [1]).

Формула (14) имеет простой физический смысл. Функция

$$\bar{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

представляет собой волну, возбуждаемую граничным режимом при $x=0$, независимо от влияния конца $x=l$, как если бы струна была бесконечна $(0<x<\infty)$. Следующие слагаемые представляют собой последовательные отражения от закрепленного края $x=l$ (вторая сумма) и от края $x=0$ (первая сумма).

Аналогично, функция

$$u(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\mu}\left(t-\frac{(2n+1)l}{a}+\frac{x}{a}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\mu}\left(t-\frac{(2n+1)l}{a}-\frac{x}{a}\right)$$

дает решение однородного уравнения с нулевыми начальными условиями $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=0$ и граничными условиями $u(0, t)=0$ и $u(l, t)=\mu(t)$. На доказательстве единственности рассмотренной задачи и непрерывной зависимости решения от начальных и граничных условий мы не останавливаемся.

6. Дисперсия волн. Мы видели, что уравнение

$$u_{tt}=a^2u_{xx}$$

допускает решение в виде распространяющейся волны произвольной

[1]) Начальные условия также проверяются непосредственно, так как аргументы всех функций отрицательны при $t=0$.

формы. Поставим задачу об отыскании класса уравнений с частными производными, допускающих решения в виде волн произвольной формы. Мы ограничимся рассмотрением класса линейных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xt}+a_{22}u_{tt}+b_1u_x+b_2u_t+cu=0. \tag{15}$$

Наша задача — определить соотношения между коэффициентами, при удовлетворении которых это уравнение допускает решение вида

$$u(x,\ t)=f(x-at), \tag{16}$$

где f — произвольная функция, a — постоянная.

Подставив (16) в (15), получим линейное дифференциальное уравнение

$$f''(x-at)[a_{11}-2a_{12}a+a_{22}a^2]+f'(x-at)[b_1-b_2a]+cf(x-at)=0,$$

которому должен удовлетворять профиль волны. Оно допускает решение при произвольном f лишь в том случае, когда все коэффициенты его равны нулю:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}-2a_{12}a+a_{22}a^2&=0,\\ b_1-ab_2&=0,\\ c&=0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Если уравнение допускает решения в виде волн произвольной формы, то говорят об отсутствии дисперсии волн. Для отсутствия дисперсии необходимо и достаточно выполнение условий (17).

Из первого соотношения определяется скорость волны

$$a=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

Для уравнения гиперболического типа ($a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$) возможны две скорости распространения волны; требование совместности всех трех соотношений при обоих значениях a дает:

$$b_1=b_2=c=0.$$

Следовательно, решение в виде распространяющихся волн с двумя возможными скоростями существует только для уравнения вида

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xt}+a_{22}u_{tt}=0. \tag{18}$$

Если $a_{22}\neq 0$, то уравнение (18) представляет собой уравнение колебания струны в подвижной системе координат. В самом деле, полагая

$$\xi=x-\gamma t,$$
$$\eta=t,$$

получаем уравнение

$$(a_{11} - 2a_{12}\gamma + a_{22}\gamma^2)\, u_{\xi\xi} + (2a_{12} - 2a_{22}\gamma)\, u_{\xi\eta} + a_{22} u_{\eta\eta} = 0,$$

совпадающее с уравнением колебания струны при $\gamma = \frac{a_{12}}{a_{22}}$.

В этом случае мы будем иметь

$$u_{\eta\eta} = a^2 u_{\xi\xi},$$

где

$$a^2 = \frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{22}^2} > 0.$$

Уравнения эллиптического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$) не допускают решений в виде волн с действительными скоростями.

Для уравнений параболического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$) также невозможны решения в виде волн с действительными скоростями. Исключение представляет случай вырождения, когда уравнение (15) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению.

В самом деле, учитывая, что $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ и $a = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}$, $c = 0$, а также равенство $a = \frac{b_1}{b_2} = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}$, можно написать

$$b_1 u_x + b_2 u_t = \frac{b_2}{\sqrt{a_{22}}}\left(\sqrt{a_{11}} u_x + \sqrt{a_{22}} u_t\right).$$

Исходное уравнение может быть записано в виде

$$\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial}{\partial t}\right) u + \\ + \frac{b_2}{\sqrt{a_{22}}}\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0$$

и переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + b\frac{du}{d\xi} = 0 \quad \left(b = \frac{b_2}{\sqrt{a_{22}}}\right),$$

если ввести новые переменные ξ и η:

$$x = \sqrt{a_{11}}\,\xi,$$
$$t = \sqrt{a_{22}}\,\xi + \eta,$$

так как

$$\frac{d}{d\xi} = \sqrt{a_{11}}\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Таким образом, исходное уравнение в этом случае допускает решение в виде произвольной функции переменного

$$\eta = t - \frac{\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11}}}x = t - \frac{x}{a}.$$

Итак, решение в форме распространяющейся волны возможно только для простейшего уравнения колебаний в неподвижной или подвижной системе координат.

В физике понятие дисперсии волн обычно вводится несколько иначе. Рассматривается гармоническая волна вида

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}, \qquad (*)$$

где ω — частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны.

Скорость, с которой фаза волны

$$\alpha = \omega t - kx$$

перемещается в пространстве, называется фазовой скоростью и равна, очевидно,

$$a = \frac{\omega}{k}.$$

Если фазовая скорость гармонической волны зависит от частоты, то говорят о дисперсии волн.

Импульс или сигнал произвольной формы может быть образован суперпозицией гармонических волн вида (*) (разложением в интеграл Фурье). Если фазовая скорость зависит от частоты, то гармонические составляющие сигнала смещаются друг относительно друга, в результате чего профиль сигнала искажается.

В этом случае имеет место дисперсия волн в смысле определения, данного на стр. 69.

Обратно, если уравнение допускает решение в виде волн произвольной формы, то фазовая скорость гармонической волны определяется из первого уравнения (17) и не зависит от частоты.

Таким образом, термин «дисперсия волн» в примененном нами выше смысле совпадает с условием зависимости скорости от частоты.

Поставим задачу об отыскании класса уравнений (15), допускающих решение в виде затухающих волн

$$u(x, t) = \mu(t) f(x - at),$$

где $\mu(t)$ — некоторая функция t.

Подставляя это выражение в уравнение (15), получаем:

$$f''\mu(t)(a_{11} - 2a_{12}a + a_{22}a^2) + f'[(b_1 - b_2a)\mu + 2(a_{12} - a_{22}a)\mu'] + \\ + f(c\mu + b_2\mu' + a_{22}\mu'') = 0.$$

В силу произвольности f коэффициенты всех слагаемых равны нулю. Значит $\mu(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами и выражается формулой

$$\mu = e^{-kt},$$

Приравнивая нулю коэффициенты из (19), получим соотношения для определения a и k:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} - 2a_{12}a + a_{22}a^2 &= 0, \\ (b_1 - b_2 a) - 2k(a_{12} - a_{22}a) &= 0, \\ a_{22}k^2 - b_2 k + c &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Исключив из уравнения (19) a и k, мы найдем условие их совместности. Первое уравнение показывает, что решения в виде затухающих волн возможны только для уравнения гиперболического типа. Декремент затухания k находится из второго соотношения. Подставляя затем в третье равенство значения k, получим соотношение между коэффициентами

$$4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})c + (a_{11}b_2^2 - 2a_{12}b_1 b_2 + a_{22}b_1^2) = 0, \tag{20}$$

при выполнении которого существует решение уравнения в виде затухающих волн.

Пример. Телеграфное уравнение

$$u_{xx} = CLu_{tt} + (CR + LG)u_t + GRu \tag{21}$$

не имеет решения в виде распространяющейся волны, если только G или R отличны от нуля. Посмотрим, имеет ли оно решение в виде затухающей волны. Скорость затухающих волн определяется из первого уравнения (19)

$$1 - a^2CL = 0.$$

Из второго уравнения определяем декремент затухания

$$k = \frac{CR + LG}{2CL}.$$

Условие совместности (19) дает

$$4CLGR - (CR + LG)^2 = -(CR - LG)^2 = 0$$

или

$$CR = LG,$$

при выполнении которого уравнение (15) допускает решение в виде затухающей волны

$$u(x, t) = e^{-kt} f(x - at), \quad k = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad a = \sqrt{\frac{1}{CL}},$$

где f — произвольная функция.

Отсутствие искажения волн при распространении по кабелю имеет особо важное значение для телефонной связи на больших расстояниях. Если сигнал передается без искажения формы, то при помощи усиления можно восстановить без искажения передаваемый акустический эффект. Если имеет место дисперсия волн, то чистота приема нару-

шается вне зависимости от качества телефонного аппарата. Аналогичное значение имеет вопрос о дисперсии волн для телеграфной связи на больших расстояниях.

7. Интегральное уравнение колебаний. При выводе дифференциального уравнения колебаний (5) § 1 мы исходили из закона сохранения количества движения, который привел нас к уравнению колебаний в интегральной форме (3). Для того чтобы от интегрального уравнения перейти к дифференциальному, мы предположили, что функция $u(x, t)$ имеет вторые производные. Всякое предположение об ограничении класса рассматриваемых функций некоторым свойством означает отказ от изучения функций, не обладающих предполагаемым свойством. Таким образом, переходя от интегрального уравнения колебаний к дифференциальному, мы исключаем из рассмотрения процессы колебаний, не удовлетворяющие требованию двукратной дифференцируемости.

Покажем, что всю теорию можно развить в классе непрерывных кусочно-дифференцируемых функций, исходя из интегрального уравнения колебаний

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t_1}\right] \rho\, d\xi = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1}\right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F\, d\xi\, d\tau. \qquad (22)$$

Этому уравнению можно придать следующую форму. Рассмотрим в плоскости (x, t) область G, ограниченную кусочно-гладкой кривой C, и покажем, что для этой области имеет место интегральное соотношение

$$\int_C \left(\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + k\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) + \iint_G F\,dx\,dt = 0. \qquad (23)$$

Для однородной среды эта формула принимает вид

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + a^2\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) + \iint_G f\,dx\,dt = 0 \quad \left(f = \frac{F}{\rho}\right), \qquad (23')$$

Если кривая C является контуром прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, то формула (23) совпадает с формулой (22). Если кривая C состоит из кусков, параллельных осям, то область G можно представить как сумму прямоугольников. Суммируя контурные интегралы, соответствующие отдельным слагаемым, мы получим, что слагаемые, относящиеся к внутренним границам, взаимно уничтожаются, так как интегрирование производится в противоположных направлениях, а остающиеся слагаемые дадут формулу (23). Пусть, далее, кривая C содержит дуги $\overline{C}$, не параллельные осям и не являющиеся линиями разрыва подинтегральной функции. Возьмем сетку со сторонами, параллельными осям координат, и рассмотрим ячейки сетки, пересекающиеся с областью G. Обозначим через G^* совокупность этих ячеек и через C^* — границу области G^*. Формула (23) применима к G^*. Переходя к пределу при уменьшающихся размерах сетки, нетрудно убедиться в справедливости формулы (23) для предельной кривой C.

В самом деле, первое слагаемое формулы (23), примененной к области G^*, состоит из слагаемых типа

$$\int_{\overline{C}_n} \Phi(x, t)\, dx \quad \text{или} \quad \int_{\overline{C}_n} \Phi(x, t)\, dt,$$

где $\Phi(x, t)$ — непрерывная функция и $\overline{C}_n$ — дуга контура C^*, аппроксимирующая дугу $\overline{C}$ (рис. 17).

Пусть $t = t_n(x)$ — уравнение кривой $\overline{C}_n$ и $t = t(x)$ — уравнение кривой $\overline{C}$. Очевидно, что $t_n(x)$ равномерно сходится к $t(x)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi[x, t_n(x)]\, dx = \int_a^b \Phi[x, t(x)]\, dx,$$

что и доказывает законность предельного перехода [1]).

Если кривая C содержит дуги, являющиеся линиями разрыва подинтегральной функции, то формула (23) сохраняет силу, если брать в качестве значений подинтегральной функции ее предельные значения с внутренней стороны области G. Таким образом, справедливость интегральной формулы (23) доказана.

Рассмотрим следующую задачу:

найти функцию $u(x, t)$, определенную и кусочно-гладкую в области $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющую уравнению

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt\right) + \iint_G f(x, t)\, dx\, dt = 0 \qquad (23')$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x),$$

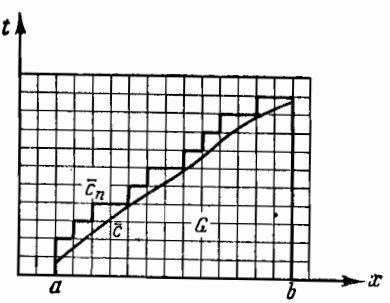


Рис. 17.

где $\varphi(x)$ — кусочно-гладкая функция, а $\psi(x)$ и $f(x, t)$ — кусочно-непрерывны. Здесь C — произвольный кусочно-гладкий контур, лежащий в области $t \geqslant 0$. Покажем, что эта задача имеет единственное решение, определяемое формулой Даламбера.

Допустим, что функция $u(x, t)$ представляет решение нашей задачи. Рассмотрим треугольник ABM, примыкающий к оси $t = 0$ с вершиной в точке $M(x, t)$, со сторонами, являющимися отрезками характеристик $x - at = \text{const}$ и $x + at = \text{const}$ (рис. 18) и применим к нему формулу (23'). Вдоль отрезка AM имеет место равенство $\frac{dx}{dt} = a$, так что

$$\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = a\left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right) = a\, du.$$

---

[1]) Поскольку $dx = 0$ на вертикальных звеньях ломаной $\overline{C}_n$, то в этой формуле $t = t_n(x)$ есть уравнение горизонтальных звеньев кривой $\overline{C}_n$.

Вдоль отрезка MB имеет место равенство $\frac{dx}{dt} = -a$, так что

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt = -a\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dt + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right) = -a\,du.$$

Следовательно, подинтегральное выражение вдоль характеристик является полным дифференциалом. Производя интегрирование вдоль отрезков BM и MA, получим:

$$\int_B^M \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) = -a\,[u(M) - u(B)],$$

$$\int_M^A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) = a\,[u(A) - u(M)],$$

так что формула (23′) принимает вид:

$$u(M) = \frac{u(B) + u(A)}{2} + \frac{1}{2a}\int_A^B \frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \frac{1}{2a}\int\limits_{ABM}\int f\,dx\,dt$$

или

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\,d\xi. \quad (24)$$

Таким образом, если решение поставленной задачи существует, то оно однозначно определяется своими начальными значениями. В случае однородного уравнения ($f = 0$) эта формула совпадает с формулой Даламбера.

Нетрудно непосредственной подстановкой проверить, что функция типа

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) + \\ + \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_3(\xi, \tau)\,d\xi,$$

где f_1 и f_2 — кусочно-гладкие функции, а f_3 — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяет уравнению (22), а тем самым и уравнению (23′). Решения задач, рассмотренных в п. 4 в качестве примеров, являются кусочно-гладкими функциями и охватываются изложенной теорией.

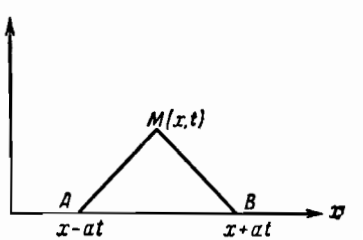


Рис. 18.

Обратимся теперь к первой краевой задаче на полуограниченной прямой. Будем искать решение уравнения (23) в некоторой точке $M(x, t)$ для $t > \frac{x}{a}$, так как в области $t < \frac{x}{a}$ (под характеристикой $x = at$) влияние

граничого режима не сказывается, и решение определяется формулой (24). Применим формулу (23′) к четырехугольнику $MAA'B$, в котором MA, MB и AA' — отрезки характеристик (рис. 19). Выполняя интегрирование вдоль характернстик MA, AA' и BM, получим:

$$2au(M) = 2au(A) + au(B) - au(A') + \int_{A'}^{B} \frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \iint_{MAA'B} f\,dx\,dt.$$

Подставляя сюда координаты точек M, A, B и A', будем иметь:

$$u(x, t) = u\left(0, t - \frac{x}{a}\right) + \frac{u(x+at, 0) - u(at-x, 0)}{2} + \\ + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\,d\xi,$$

или

$$u(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\,d\xi \left(t > \frac{x}{a}\right). \quad (25)$$

При $f = 0$ эта формула, как нетрудно заметить, совпадает с формулой (13) § 2, п. 4. Аналогичным способом решается и вторая краевая задача, а также задачи для ограниченного отрезка.

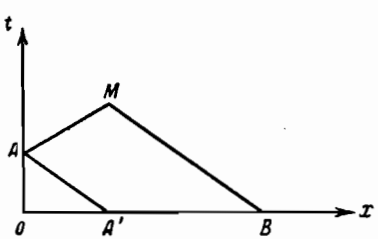


Рис. 19.

При изучении первой краевой задачи мы видели, что задания двух начальных условий

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

и одного граничного условия

$$u(0, t) = \mu(t)$$

достаточно для полного определения решения. Отсюда следует, что должно существовать соотношение, связывающее функции φ, ψ, μ и ν, где $\nu(t) = u_x(0, t)$. Дифференцируя формулу (25) по x и полагая $x = 0$, получаем:

$$\nu(t) = \frac{1}{a}\{\psi(at) - [\mu'(t) - a\varphi'(at)]\}, \quad (26)$$

где для простоты положено $f = 0$. Пользуясь формулой (26), можно, например, третью краевую задачу свести к первой краевой задаче.

8. Распространение разрывов вдоль характеристик. Обратимся к рассмотрению разрывов производных решений уравнения (23). Покажем, что линиями разрыва функций $u(x, t)$, удовлетворяющих уравнению (23), могут быть только линии семейств характеристик

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}.$$

В самом деле, пусть некоторая дифференцируемая кривая, определяемая уравнением

$$x = x(t),$$

является линией разрыва производных непрерывной, кусочно-дифференцируемой функции $u(x, t)$. Предположим для определенности, что $x(t)$ — возрастающая функция. Применим формулу (23′) к прямоугольнику $ABCD$ (рис. 20):

$$\int\limits_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) + \int\limits_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) = 0,$$

а также к криволинейным треугольникам $\Delta_1 = BAD$ и $\Delta_2 = BDC$:

$$\int\limits_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) + \int\limits_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,x' + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 dt = 0,$$

$$\int\limits_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) - \int\limits_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,x' + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 dt = 0,$$

где скобки $(\ )_{1,2}$ показывают, что надо брать предельные значения изнутри треугольников Δ_1 или Δ_2. Вычитая из суммы последних двух равенств предшествующее, получим:

$$\int\limits_{DB} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,x' + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,x' + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2\right\} dt = 0$$

или в силу произвольности дуги DB

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] x' + a^2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0, \tag{27}$$

где, как обычно, скобками обозначается величина разрыва функции

$$[f] = f_2 - f_1.$$

Возьмем производную по t от значения функции $u(x, t)$ вдоль линии разрыва производных

$$\frac{d}{dt}\,u(x(t), t) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i x' + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i \qquad (i = 1, 2),$$

причем в качестве значения производных можно брать предельные значения как из Δ_1, так и из Δ_2. Разность правых частей при $i = 1$ и $i = 2$ дает:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] + x'\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0.$$

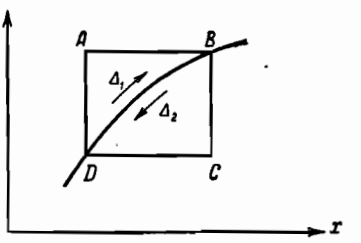


Рис. 20.

Сопоставляя это равенство с предшествующим (27) и предполагая, что по крайней мере один из разрывов $\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]$, $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]$ отличен от нуля, видим, что эти равенства возможны одновременно, если детерминант этой системы

равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x' & a^2 \\ 1 & x' \end{vmatrix} = (x')^2 - a^2 = 0$$

или

$$x = \pm at + \text{const}.$$

Таким образом, линии разрыва производных решения уравнения колебаний являются характеристиками.

ЗАДАЧИ

1. Начертить профиль струны для различных моментов времени в следующих случаях:

I. Неограниченная струна

а) начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), а начальный профиль струны задан в виде рис. 21;

б) начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость имеет постоянное значение $u_t(x, 0) = \psi_0$ на участке струны (x_1, x_2) и равна нулю вне этого участка;

в) начальные условия имеют вид

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < c, \\ \dfrac{h}{2c^2}\, x(2c - x) & \text{при } c < x < 2c, \\ 0 & \text{при } x > 2c. \end{cases}$$

II. Полуограниченная струна

г) начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), а начальное отклонение задано в виде треугольника, изображенного на рис. 21. Конец струны предполагается закрепленным;

д) та же задача для струны со свободным концом $x = 0$;

е) начальные условия имеют вид

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < c, \\ \psi_0 = \text{const} & \text{при } c < x < 2c, \\ 0 & \text{при } x > 2c; \end{cases}$$

конец струны $x = 0$ закреплен;

ж) аналогичная задача для струны со свободным концом $x = 0$.

Профиль струны для всех задач а) — ж) следует начертить для моментов времени

$$t_0 = 0, \quad t_k = \frac{c}{8a}\, k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 8).$$

Отметить для задач а) — ж) на фазовой плоскости (x, t) зоны, соответствующие различным стадиям процесса.

2. Найти решение задачи 1а) для всех значений переменных x и t (формулы, выражающие функцию $u(x, t)$, различны для разных вон фазовой плоскости).

3. Определить отклонение в некоторой точке x_0, t_0, пользуясь фазовой плоскостью (x, t) и плоскостью (x, u), в которой (рис. 21) заданы начальные отклонения ($\psi = 0$), как для случая неограниченной струны, так и для случая полуограниченной струны с закрепленным (или свободным) концом.

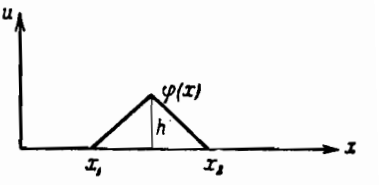


Рис. 21.

4. В начале длинной цилиндрической трубки, заполненной газом, находится поршень, движущийся по произвольному закону $x = f(t)$, со скоростью $v = f'(t) < a$. Начальное смещение и скорость частиц газа равны нулю. Найти смещение газа в сечении с абсциссой x. Рассмотреть случай движения поршня с постоянной скоростью $c < a$. Что можно сказать о решении задачи, если начиная с некоторого момента скорость поршня $v > a$? (см. Приложение 5).

5. Пусть по неограниченной струне бежит волна $u(x, t) = f(x - at)$. Состояние струны в момент $t = 0$ принять за начальное и решить уравнение колебаний при соответствующих начальных условиях. Сравнить с задачей 1а).

6. Неограниченный упругий стержень получен соединением в точке $x = 0$ двух стержней с характеристиками

$$k_1,\ \rho_1,\quad a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}} \quad \text{при} \quad x < 0,$$

$$k_2,\ \rho_2,\quad a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

а) Пусть из области $x < 0$ бежит волна

$$u(x,\ t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

где f — заданная функция. Найти коэффициенты отражения и преломления волны при прохождении через точку стыка ($x = 0$). Установить, при каких условиях отраженная волна отсутствует.

б) Решить аналогичную задачу, если задано локальное начальное отклонение

$$u(x,\ 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < x_1, \\ \varphi(x) & \text{при} \quad x_1 < x < x_2 < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > x_2, \end{cases}$$

а начальная скорость равна нулю.

7. Пусть в некоторой точке струны $x = x_0$ подвешен груз массы M и из области $x < 0$ бежит волна

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Найти преломленную и отраженную волну.

8. Полуограниченная трубка ($x > 0$), заполненная идеальным газом, имеет на одном конце, $x = 0$, свободно перемещающийся поршень массы M. В момент времени $t = 0$ поршню при помощи удара сообщают начальную скорость v_0. Найти процесс распространения волны в газе, если известно, что начальные отклонения и начальная скорость частиц газа равны нулю.

Указание. Рассмотреть решение уравнения колебаний в области $x > 0$. Использовать граничное условие

$$Mu_{tt}(0, t) = S\gamma p_0 u_x(0, t)$$

(p_0 — начальное давление газа, S — площадь поперечного сечения трубки, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$) и начальные условия на границе $u(0, 0) = 0$, $u_t(0, 0) = v_0$.

Ответ: $u(x, t) = \frac{aMv_0}{\gamma p_0 S}\left[1 - e^{\frac{\gamma p_0 S}{Ma^2}(x-at)}\right]$ при $(x - at) < 0$;

$u(x, t) = 0$ при $(x - at) > 0$.

9. Бесконечная струна, имеющая в точке $x = 0$ сосредоточенную массу M, находится в положении равновесия. В начальный момент времени $t = 0$ ударом молоточка массе M сообщается начальная скорость v_0. Доказать, что в момент времени $t > 0$ возмущенная

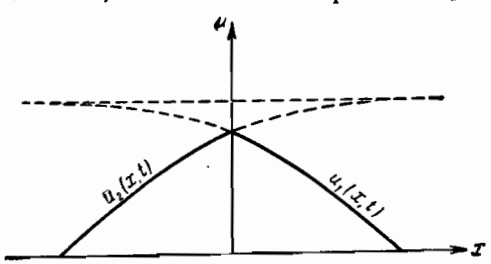


Рис. 22.

струна имеет вид, указанный на рис. 22, где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются формулами

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T}\left[1 - e^{\frac{2T}{Ma^2}(x-at)}\right] & \text{при } x - at < 0 \quad \text{(прямая волна)}, \\ 0 & \text{при } x - at > 0; \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \dfrac{Mav_0}{2T}\left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x+at)}\right] & \text{при } x - at < 0 \text{ (обратная волна)}, \\ 0 & \text{при } x - at > 0. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться условием

$$M\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0, t) = M\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(0, t) = T\frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - T\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t).$$

10. Решить задачу о распространении электрических колебаний в бесконечном проводе при условии

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$$

и при произвольных начальных условиях.

Ответ: $v(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t}[\varphi(x - at) + \psi(x + at)]$,

$$i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\, e^{-\frac{R}{L}t}[\varphi(x - at) - \psi(x + at)].$$

Если

$$v(x, 0) = f(x), \quad i(x, 0) = \sqrt{\frac{C}{L}}\, F(x),$$

то

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + F(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - F(x)}{2}.$$

11. Найти решение интегрального уравнения колебаний для полуограниченной струны при граничных условиях третьего рода.

12. На конце $x = 0$ полуограниченного стержня укреплена мембрана, оказывающая сопротивление продольным колебаниям стержня, пропорциональное скорости $u_t(0, t)$. Найти процесс колебания, если заданы начальные смещения и $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$.

§ 3. Метод разделения переменных

1. Уравнение свободных колебаний струны. *Метод разделения переменных*, или *метод Фурье*, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода мы проведем для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах. Решение указанной задачи мы рассмотрим с исчерпывающей подробностью и при дальнейшем изложении курса будем ссылаться на этот параграф, опуская повторения доказательств.

Итак, будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим *основную вспомогательную задачу*: найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{4}$$

где $X(x)$ — функция только переменного x, $T(t)$ — функция только переменного t.

Подставляя предполагаемую форму решения (4) в уравнение (1), получим:

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X \tag{5}$$

или, после деления на XT,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{6}$$

Чтобы функция (4) была решением уравнения (1), равенства (5) и (6) должны удовлетворяться тождественно, т. е. для всех значений независимых переменных $0 < x < l$, $t > 0$. Правая часть равенства (6) является функцией только переменного t, а левая — только x. Фиксируя, например, некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части равенства (6) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{7}$$

где λ — постоянная, которую для удобства последующих выкладок берем со знаком минус, ничего не предполагая при этом о ее знаке.

Из соотношения (7) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{8}$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \tag{9}$$

Граничные условия (2) дают:

$$u(0, t) = X(0)\, T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l)\, T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{10}$$

так как иначе мы имели бы

$$T(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u(x, t) \equiv 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции $T(t)$ в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции $X(x)$ мы приходим к простейшей *задаче о собственных значениях*:

требуется найти значения λ, называемые собственными значениями, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$X'' + \lambda X = 0,$$

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{11}$$

называемые собственными функциями, а также найти эти решения. Формулированную таким образом задачу часто называют *задачей Штурма-Лиувилля*.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При $\lambda < 0$ задача не имеет нетривиальных решений. Общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \qquad (\alpha = l\sqrt{-\lambda}),$$

т. е.

$$C_1 = -C_2 \quad \text{и} \quad C_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае α — действительно и положительно, так что $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$. Поэтому

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = ax + b.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = [ax + b]_{x=0} = b = 0,$$

$$X(l) = al = 0,$$

т. е. $a = 0$ и $b = 0$ и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения содержит мнимые показатели и поэтому может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Если $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \tag{12}$$

или

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n — любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи возможны лишь при значениях

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Итак, только при значениях λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \tag{13}$$

существуют нетривиальные решения

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{14}$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положим равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (9)

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{\pi n}{l}at + B_n\sin\frac{\pi n}{l}at, \tag{15}$$

где A_n и B_n — коэффициенты, подлежащие определению.

Возвращаясь к задаче (1)—(3), заключаем, что функции

$$u_n(x,\ t) = X_n(x)\,T_n(t) = \left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at + B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{16}$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (2) и представимыми в виде произведения (4) двух функций, одна из которых зависит только от x, другая — от t. Эти решения могут удовлетворить начальным условиям (3) нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Обратимся к решению задачи в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at + B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{17}$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). На этом вопросе мы подробнее остановимся несколько позже (см. п. 3 этого параграфа). Начальные условия дают:

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}aB_n\sin\frac{\pi n}{l}x. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{19}$$

где [1])

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \tag{20}$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi, \tag{21}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \tag{22}$$

Сравнение этих рядов с формулами (18) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a}\psi_n, \tag{23}$$

чем полностью определяется функция (17), дающая решение исследуемой задачи.

Мы определили решение в виде бесконечного ряда (17). Если ряд (17) расходится или функция, определяемая этим рядом, не является дифференцируемой, то он, конечно, не может представлять решение нашего дифференциального уравнения.

---

[1]) Обычно рассматриваются периодические функции с периодом $2l$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x + b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

Если функция $F(x)$ нечетна, то $a_n = 0$, так что

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi = \frac{2}{l}\int_0^l F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

Если функция $F(x)$ задана только в промежутке $(0, l)$, то мы можем продолжить ее нечетно и вести разложение в промежутке от $-l$ до $+l$, что и приводит нас к формулам (19) и (20).

В настоящем пункте мы ограничимся формальным построением решения. Выяснение условий, при которых ряд (17) сходится и представляет решение, будет проведено в п. 3.

2. Интерпретация решения. Обратимся теперь к интерпретации полученного решения. Функцию $u_n(x,\ t)$ можно представить в виде

$$u_n(x,\ t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x =$$

$$= a_n \cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{24}$$

где

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2},\quad \frac{\pi n}{l}a\delta_n = -\operatorname{arc\,tg}\frac{B_n}{A_n}. \tag{25}$$

Каждая точка струны x_0 совершает гармонические колебания

$$u_n(x_0,\ t) = a_n \cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x_0$$

с амплитудой

$$a_n \sin\frac{\pi n}{l}x_0.$$

Движение струны такого типа называется *стоячей волной*. Точки $x = m\frac{l}{n}$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$, в которых $\sin\frac{\pi n}{l}x = 0$, в течение всего процесса остаются неподвижными и называются *узлами* стоячей волны $u_n(x,\ t)$. Точки $x = \frac{2m+1}{2n}l$ $(m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$, в которых $\sin\frac{\pi n}{l}x = \pm 1$, совершают колебания с максимальной амплитудой a_n и называются *пучностями* стоячей волны.

Профиль стоячей волны в любой момент времени представляет синусоиду

$$u_n(x,\ t) = C_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где

$$C_n(t) = a_n \cos\omega_n(t+\delta_n)\quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l}a\right).$$

В момент времени t, при котором $\cos\omega_n(t+\delta_n) = \pm 1$, отклонения достигают максимальных значений, а скорость движения равна нулю. В моменты времени t, при которых $\cos\omega_n(t+\delta_n) = 0$, отклонение равно нулю, а скорость движения максимальна. Частоты колебаний всех точек струны одинаковы и равны

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}a. \tag{26}$$

Частоты ω_n называются *собственными частотами* колебаний струны. Для поперечных колебаний струны $a^2 = \frac{T}{\rho}$ и, следовательно,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{27}$$

Энергия n-й стоячей волны (n-й *гармоники*) для случая поперечных колебаний струны равна

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2}\int_0^l \left[\rho\omega_n^2 \sin^2 \omega_n (t+\delta_n) \sin^2 \frac{\pi n}{l} x + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2 \omega_n (t+\delta_n) \times\right.$$

$$\left. \times \cos^2 \frac{\pi n}{l} x\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2}\frac{l}{2}\left[\rho\omega_n^2 \sin^2 \omega_n (t+\delta_n) + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2 \omega_n (t+\delta_n)\right], \tag{28}$$

так как

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x\, dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x\, dx = \frac{l}{2}.$$

Пользуясь выражением для α_n, ω_n, а также равенством $T = a^2\rho$, получаем:

$$E_n = \frac{\rho\alpha_n^2\omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \tag{29}$$

где $M = l\rho$ — масса струны.

Колебания струны воспринимаются нами обычно по звуку, издаваемому струной. Не останавливаясь на процессе распространения колебаний в воздухе и восприятия звуковых колебаний нашим ухом, можно сказать, что звук струны является наложением «*простых тонов*», соответствующих стоячим волнам, на которые разлагается колебание. Это разложение звука на простые тона не является операцией только математического характера. Выделение простых тонов можно произвести экспериментально при помощи резонаторов.

Высота тона зависит от частоты колебаний, соответствующих этому тону. Сила тона определяется его энергией и, следовательно, его амплитудой. Самый низкий тон, который может создавать струна, определяется самой низкой собственной частотой $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ и называется *основным тоном* струны. Остальные тона, соответствующие частотам, кратным ω_1, называются *обертонами*. Тембр звука

зависит от присутствия наряду с основным тоном обертонов и от распределения энергии по гармоникам.

Низший тон струны и ее тембр зависят от способа возбуждения колебаний. Действительно, способ возбуждения колебаний определяет начальные условия

$$u(x,\ 0)=\varphi(x);\qquad u_t(x,\ 0)=\psi(x), \tag{3}$$

через которые выражаются коэффициенты A_n и B_n. Если $A_1=B_1=0$, то низшим тоном будет тон, соответствующий частоте ω_n, где n—наименьшее число, для которого A_n или B_n отличны от нуля.

Обычно струна издает один и тот же тон. В самом деле, приведем струну в колебание, оттягивая ее в одну сторону и отпуская без начальной скорости. В этом случае

$$u_t(x,\ 0)=0,\quad u(x,\ 0)=\varphi(x)>0$$

и

$$A_1=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi}{l}\xi\,d\xi>0,$$

так как

$$\sin\frac{\pi}{l}\xi>0.$$

Следующие коэффициенты, вообще говоря, значительно меньше A_1, так как функция $\sin\frac{\pi n}{l}\xi$ знакопеременна при $n\geqslant 2$. В частности, если $\varphi(x)$ симметрична относительно середины отрезка, то $A_2=0$. Таким образом, если привести струну в колебание, оттягивая ее в одну сторону ($\varphi(x)>0$), то низшим тоном будет тон струны, энергия которого, вообще говоря, больше энергии других гармоник.

Привести струну в колебание можно и другими способами. Например, если начальная функция нечетна относительно середины струны, то

$$A_1=0$$

и низший тон соответствует частоте

$$\omega=\omega_2=\frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если к звучащей струне прикоснуться точно в середине, то звук ее резко меняется и она звучит в октаву к своему тону. Этот прием изменения тона часто применяется при игре на скрипке, гитаре и других струнных инструментах и носит название *флажолета*. С точки зрения теории колебания струн это явление совершенно ясно. В момент прикосновения к середине струны мы гасим стоячие волны, имеющие в этой точке пучности, и сохраняем лишь гармоники, имеющие в этой

точке узлы. Таким образом, остаются только четные гармоники, и самой низкой частотой будет

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если прикоснуться к струне на расстоянии $^1/_8$ ее длины от края, то высота основного тона повышается втрое, так как при этом сохраняются лишь гармоники, имеющие узлы в точке $x = \frac{l}{3}$.

Формулы

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{и} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{T}}, \tag{30}$$

определяющие частоту и, соответственно, период основного колебания, объясняют следующие законы колебания струн, открытые впервые экспериментально.

1. Для струн одинаковой плотности и одинакового натяжения период колебания струны пропорционален ее длине.

2. При заданной длине струны период меняется обратно пропорционально корню квадратному из натяжения.

3. При заданной длине и натяжении период меняется пропорционально корню квадратному из линейной плотности струны.

Эти правила легко демонстрируются на монохорде.

В настоящем пункте мы установили существование стоячих волн в процессе колебания струны с закрепленными концами. Вопрос о существовании решения вида

$$u(x, t) = X(x)\,T(t)$$

эквивалентен вопросу о существовании стоячих волн, так как профили этого решения для различных моментов времени пропорциональны.

3. Представление произвольных колебаний в виде суперпозиции стоячих волн. В пункте 1 мы рассмотрели задачу о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах, и доказали существование частных решений в виде стоячих волн. Там же была дана формальная схема представления произвольного колебания в виде бесконечной суммы стоячих волн. В настоящем пункте дается обоснование возможности представления произвольного решения в виде суперпозиции стоячих волн. В первую очередь рассмотрим обобщение хорошо известного для конечных сумм принципа суперпозиции на случай бесконечных рядов.

Пусть $L(u)$ — линейный дифференциальный оператор, так что $L(u)$ равен сумме некоторых производных функции (обыкновенных или частных) с коэффициентами, являющимися функциями независимых переменных.

Докажем лемму (*обобщенный принцип суперпозиции*):

Если функции u_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ являются частными решениями линейного и однородного диффе-

ренциального уравнения $L(u)=0$ (обыкновенного или с частными производными), то ряд $u=\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ является также решением этого уравнения, если вычисление производных от u, фигурирующих в уравнении $L(u)=0$, можно совершить при помощи почленного дифференцирования.

В самом деле, если производные u, фигурирующие в уравнении $L(u)=0$, вычисляются почленным дифференцированием

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial t^{n-m}}=\sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{\partial^n u_i}{\partial x^m \partial t^{n-m}},$$

то в силу линейности уравнения

$$L(u)=L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i)=0,$$

так как сходящиеся ряды можно складывать почленно. Тем самым доказано, что функция u удовлетворяет уравнению. В качестве достаточного условия для возможности почленного дифференцирования ряда мы постоянно будем пользоваться условием равномерной сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{\partial^n u_i}{\partial x^m \partial t^{n-m}}, \tag{31}$$

получаемого после дифференцирования [1]).

Вернемся теперь к нашей краевой задаче. Мы должны прежде всего убедиться в непрерывности функции

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at+B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right)\sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{32}$$

откуда будет следовать, что $u(x,\ t)$ непрерывно примыкает к своим начальным и граничным значениям. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда для $u(x,\ t)$, так как общий член этого ряда — непрерывная функция, а равномерно сходящийся ряд непрерывных функций определяет непрерывную функцию. Пользуясь неравенством

$$|u_n(x,\ t)|\leqslant|A_n|+|B_n|,$$

заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|A_n|+|B_n|) \tag{33}$$

[1]) См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, 1937.

является мажорантным для ряда (32). Если мажорантный ряд (33) сходится, то ряд (32) сходится равномерно, то-есть функция $u(x, t)$ непрерывна.

Чтобы убедиться в том, что $u_t(x, t)$ непрерывно примыкает к своим начальным значениям, надо доказать непрерывность этой функции, для чего достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l}\left(-A_n \sin \frac{\pi n}{l} at + B_n \cos \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (34)$$

или сходимость мажорантного ряда

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n\,(|A_n| + |B_n|). \quad (35)$$

Наконец, чтобы убедиться в том, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению, т. е. применим обобщенный принцип суперпозиции, достаточно доказать возможность двукратного почленного дифференцирования ряда для $u(x, t)$, для чего в свою очередь достаточно доказать равномерную сходимость рядов

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

которым с точностью до множителей пропорциональности соответствует общий мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,(|A_n| + |B_n|). \quad (36)$$

Так как

$$A_n = \varphi_n, \qquad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n,$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x\, dx, \qquad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x\, dx,$$

то наша задача сводится к доказательству сходимости рядов

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k = 0,\ 1,\ 2), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k = -1,\ 0,\ 1). \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

С этой целью мы используем известные[1]) свойства рядов Фурье.

Если периодическая с периодом $2l$ функция $F(x)$ имеет k непрерывных производных, а $(k+1)$-я производная ее кусочно-непрерывна, то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|), \tag{38}$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье, сходится. Если речь идет о разложении в ряд по $\sin\frac{\pi n}{l}x$ функции $f(x)$, заданной только в промежутке $(0, l)$, то надо, чтобы предшествующие требования были выполнены для функции $F(x)$, получающейся при нечетном продолжении $f(x)$. В частности, для непрерывности $F(x)$ необходимо, чтобы $f(0)=0$, так как в противном случае при нечетном продолжении получится разрыв в точке $x=0$; аналогично этому в точке $x=l$ должно быть $f(l)=0$, так как продолженная функция непрерывна и периодична с периодом $2l$. Непрерывность первой производной при $x=0$, $x=l$ получается автоматически при нечетном продолжении. Вообще для непрерывности четных производных продолженной функции надо потребовать, чтобы

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(l) = 0 \qquad (k = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n). \tag{39}$$

Непрерывность нечетных производных имеет место без дополнительных требований.

Итак, для сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \qquad (k = 0,\ 1,\ 2)$$

достаточно потребовать, чтобы начальное отклонение $\varphi(x)$ удовлетворяло следующим требованиям.

1° Производные функции до 2-го порядка непрерывны, третья производная кусочно-непрерывна и, кроме того,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0; \qquad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \tag{40}$$

Для сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \qquad (k = -1,\ 0,\ 1)$$

на начальную скорость $\psi(x)$ следует наложить требования:

2° Функция $\psi(x)$ непрерывно-дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и, кроме того,

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{41}$$

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, 1937.

Таким образом, нами доказано, что любое колебание $u(x, t)$ при начальных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющих требованиям 1° и 2°, представляется в виде суперпозиции стоячих волн. Условия 1° и 2° являются достаточными условиями, связанными с примененными здесь способами доказательства.

Аналогичная задача была нами решена в п. 5 § 2 методом распространяющихся волн

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x-at) + \Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha, \tag{42}$$

где Φ и Ψ являются нечетными относительно 0 и l продолжениями начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданных на отрезке $(0, l)$. Функции Φ и Ψ, как было показано, периодичны с периодом $2l$ и поэтому могут быть представлены рядами

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \qquad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Подставляя эти ряды в формулу (42) и пользуясь теоремой о синусе и косинусе суммы и разности, получим выражение

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos\frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{43}$$

совпадающее с представлением, даваемым методом разделения переменных.

Следовательно, формула (43) имеет место при тех же предположениях, что и формула (42) (см. п. 1 § 3), которая была получена при условии, что функция $\Phi(x)$ непрерывно-дифференцируема дважды, а функция $\Psi(x)$ — один раз.

Переходя к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, мы помимо условий дифференцируемости должны потребовать выполнения условий

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0,$$
$$\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \tag{44}$$

Таким образом, условия 1° и 2°, являющиеся достаточными для обоснования метода разделения переменных, зависят от метода доказательства и содержат дополнительные условия по сравнению с условиями, обеспечивающими существование решения.

При обосновании возможности представления решения как результата суперпозиции стоячих волн мы привели первый метод доказательства сходимости рядов, поскольку он не связан со специальной формой (42), применимой только к простейшему уравнению колебаний, и без труда может быть перенесен на ряд других задач, хотя этот метод предъявляет несколько повышенные требования к начальным функциям.

4. Неоднородные уравнения. Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \qquad a^2 = \frac{k}{\rho}, \qquad 0 < x < l \tag{45}$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{46}$$

и однородными граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t) &= 0, \\ u(l,\ t) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad t > 0. \tag{47}$$

Будем искать решение задачи в виде разложения в ряд Фурье по x

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{48}$$

рассматривая при этом t как параметр. Для нахождения $u(x, t)$ надо определить функцию $u_n(t)$. Представим функцию $f(x, t)$ и начальные условия в виде рядов Фурье:

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad & f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,\ t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi\, d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi\, d\xi; \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi\, d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (48) в исходное уравнение (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0,$$

видим, что оно будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \tag{50}$$

Для определения $u_n(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Начальные условия дают:

$$u(x,\ 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x,\ 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Эти дополнительные условия вполне определяют решение уравнения (50). Функцию $u_n(t)$ можно представить в виде

$$u_n(t) = u_n^{(\mathrm{I})}(t) + u_n^{(\mathrm{II})}(t),$$

где

$$u_n^{(\mathrm{I})}(t) = \frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\cdot f_n(\tau)\,d\tau \tag{52}$$

есть решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями [1]) и

$$u_n^{(\mathrm{II})}(t) = \varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}at + \frac{l}{\pi n a}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}at \tag{53}$$

— решение однородного уравнения с заданными начальными условиями. Таким образом, искомое решение запишется в виде

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot f_n(\tau)\,d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}at + \frac{l}{\pi n a}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{54}$$

Вторая сумма представляет решение задачи о свободных колебаниях струны при заданных начальных условиях и была нами исследована ранее достаточно подробно. Обратимся к изучению первой суммы, представляющей вынужденные колебания струны под действием внешней силы при нулевых начальных условиях. Пользуясь выражением (49) для $f_n(t)$, находим:

$$u^{(\mathrm{I})}(x,\ t) = \int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\}\times \\ \times f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau = \int_0^t\int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau)f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{55}$$

где

$$G(x,\ \xi,\ t-\tau) = \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi. \tag{56}$$

[1]) См. мелкий шрифт в конце настоящего пункта.

Выясним физический смысл полученного решения. Пусть функция $f(\xi, \tau)$ отлична от нуля в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$$

Функция $\rho f(\xi, \tau)$ представляет плотность действующей силы; сила, приложенная к участку $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$, равна

$$F(\tau) = \rho \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi,$$

причем

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} F(\tau)\, d\tau = \rho \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

есть импульс этой силы за время $\Delta\tau$. Если применить теорему о среднем значении к выражению

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

будем иметь:

$$u(x, t) = G(x, \bar{\xi}, t-\bar{\tau}) \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{57}$$

где

$$\xi_0 < \bar{\xi} < \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 < \bar{\tau} < \tau_0 + \Delta\tau.$$

Переходя в формуле (57) к пределу при $\Delta\xi \to 0$ и $\Delta\tau \to 0$, получим функцию

$$u(x, t) = G(x, \xi_0, t-\tau_0)\, \frac{I}{\rho}, \tag{58}$$

которую можно трактовать как влияние мгновенного сосредоточенного импульса мощности I.

Если известна функция $\frac{1}{\rho} G(x, \xi, t-\tau)$, представляющая действие единичного сосредоточенного импульса, то непосредственно ясно, что действие непрерывно распределенной силы $f(x, t)$ должно представляться формулой

$$u(x, t) = \int_0^l \int_0^t G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{59}$$

совпадающей с формулой (55), полученной выше.

Функция влияния сосредоточенного импульса для бесконечной прямой была рассмотрена в предыдущем параграфе. Напомним, что она является кусочно-постоянной функцией, равной $\frac{1}{2a}\frac{I}{\rho}$ внутри верхнего характеристического угла для точки (ξ, τ) и нулю вне этого угла. Функция влияния сосредоточенного импульса для закрепленной струны $(0, l)$ может быть получена из функции влияния для бесконечной струны путем нечетного продолжения относительно точек $x=0$ и $x=l$.

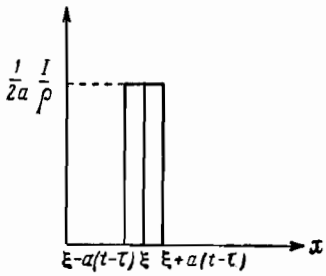


Рис. 23.

Рассмотрим момент времени t, достаточно близкий к τ, когда влияние отражения от концов $x=0$ и $x=l$ еще не сказывается. Для этого момента функция влияния изображается графиком, приведенным на рис. 23. Разложим эту функцию (полагая $I=\rho$) в ряд Фурье по $\sin\frac{\pi n}{l}x$; коэффициенты Фурье будут равны

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l G(\alpha,\ \xi,\ t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\alpha\,d\alpha=\frac{1}{al}\int_{\xi-a(t-\tau)}^{\xi+a(t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}\alpha\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{a\pi n}\left\{\cos\frac{\pi n}{l}[\xi-a(t-\tau)]-\cos\frac{\pi n}{l}[\xi+a(t-\tau)]\right\}=$$

$$=\frac{2}{a\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau).$$

Отсюда получаем формулу

$$G(x,\ \xi,\ t-\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi, \qquad (60)$$

которая совпадает с формулой (56), найденной методом разделения переменных.

Для значений $t\geqslant\tau$, когда начинает сказываться влияние закрепленных краев, построение функции влияния при помощи характеристик громоздко; представление же в форме ряда Фурье сохраняет силу и в этом случае.

Мы ограничимся приведенной здесь формальной схемой решения, не выясняя условий применимости полученной формулы.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(u)=u^{(n)}+p_1u^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}u^{(1)}+p_nu=f(t) \qquad (1^*)$$

$$\left(u^{(i)}=\frac{d^iu}{dt^i}\right)$$

и начальными условиями

$$u^{(i)}(0) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2*}$$

Его решение дается формулой

$$u(t) = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{3*}$$

где $U(t)$ — решение однородного уравнения

$$L(U) = 0$$

с начальными условиями

$$U^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2),\ U^{(n-1)}(0) = 1. \tag{4*}$$

В самом деле, вычисляя производные $u(t)$ дифференцированием правых частей по t, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
u^{(1)}(t) &= \int_0^t U^{(1)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U(0) f(t) \quad [U(0) = 0],\\
u^{(2)}(t) &= \int_0^t U^{(2)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U^{(1)}(0) f(t) \quad [U^{(1)}(0) = 0],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u^{(n-1)}(t) &= \int_0^t U^{(n-1)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U^{(n-2)}(0) f(t) \quad [U^{(n-2)}(0) = 0],\\
u^{(n)}(t) &= \int_0^t U^{(n)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U^{(n-1)}(0) f(t) \quad [U^{(n-1)}(0) = 1].
\end{aligned}\right\} \tag{5*}$$

Подставляя эти производные в уравнение (1*), получаем:

$$L(u) = \int_0^t L[U(t-\tau)] f(\tau)\, d\tau + f(t) = f(t),$$

т. е. уравнение удовлетворяется. Очевидно, что начальные условия (2*) также выполнены.

Нетрудно дать наглядную физическую интерпретацию функции $U(t)$ и формулы (3*). Обычно функция $u(t)$ представляет смещение некоторой системы, а $f(t)$ — силу, действующую на эту систему. Пусть для $t < 0$ наша система находилась в состоянии покоя, и ее смещение создается функцией $f_\varepsilon(t)$ ($\geqslant 0$), отличной от нуля только в промежутке времени $0 < t < \varepsilon$. Импульс этой силы обозначим

$$I = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Обозначим $u_\varepsilon(t)$ функцию, соответствующую $f_\varepsilon(t)$, считая ε параметром и полагая $I = 1$. Нетрудно убедиться, что при $\varepsilon \to 0$ существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t)$, не

зависящий от способа выбора $f_\varepsilon(t)$, и что этот предел равен функции $U(t)$, определенной выше

$$U(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t),$$

если положить $U(t) \equiv 0$ для $t < 0$. Таким образом, функцию $U(t)$ естественно назвать функцией влияния мгновенного импульса.

В самом деле, рассматривая формулу (3*) и применяя теорему среднего значения, получаем:

$$u_\varepsilon(t) = U(t - \tau_\varepsilon^*) \int_0^\varepsilon f(\tau)\, d\tau = U(t - \tau_\varepsilon^*) \qquad (0 \leqslant \tau_\varepsilon^* < \varepsilon < t).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, видим, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} U(t - \tau_\varepsilon^*) = U(t),$$

что и доказывает наше утверждение.

Перейдем к представлению решения неоднородного уравнения через $U(t)$ — функцию влияния мгновенного импульса. Разбивая промежуток $(0, t)$ точками τ_i на равные части

$$\Delta\tau = \frac{t}{m},$$

представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t),$$

где

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_i \text{ и } t \geqslant \tau_{i+1}, \\ f(t) & \text{при } \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Тогда функция

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t),$$

где $u_i(t)$ суть решения уравнения $L(u_i) = f_i$ с нулевыми начальными данными.

Если m достаточно велико, то функцию $u_i(t)$ можно рассматривать как функцию влияния мгновенного импульса интенсивности

$$I = f_i(\tau_i)\,\Delta\tau = f(\tau_i)\,\Delta\tau,$$

так что

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} U(t - \tau_i) f(\tau_i)\,\Delta\tau \underset{\Delta\tau \to 0}{\to} \int_0^t U(t - \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

т. е. мы приходим к формуле

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

показывающей, что влияние непрерывно действующей силы можно представлять суперпозицией влияний мгновенных импульсов.

В рассмотренном выше случае $u_n^{(1)}$ удовлетворяет уравнению (50) и условиям $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$. Для функции влияния $U(t)$ имеем:

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \qquad U(0) = 0, \qquad \dot{U}(0) = 1,$$

так что

$$U(t) = \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} at.$$

Отсюда и из (3*) получаем формулу (52)

$$u_n^{(1)}(t) = \int_0^t U(t-\tau) f_n(\tau) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau.$$

Полученное выше интегральное представление (3*) решения обыкновенного дифференциального уравнения (1*) имеет, как мы убедились, тот же физический смысл, что и формула (59), дающая интегральное представление решения однородного уравнения колебаний.

5. Общая первая краевая задача. Рассмотрим *общую первую краевую задачу* для уравнения колебаний: найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{45}$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x); \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{47'}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, полагая:

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

так что $v(x, t)$ представляет отклонение функции $u(x, t)$ от некоторой известной функции $U(x, t)$.

Эта функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - U(x, 0), \\ v_t(x, 0) &= \bar{\psi}(x); & \bar{\psi}(x) &= \psi(x) - U_t(x, 0); \\ v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), & \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t); & \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x, t)$, таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \text{ и } \bar{\mu}_2(t) = 0;$$

для этого достаточно положить

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тем самым общая краевая задача для функции $u(x, t)$ сведена к краевой задаче для функции $v(x, t)$ при нулевых граничных условиях. Метод решения этой задачи изложен выше (см. п. 4).

6. Краевые задачи со стационарными неоднородностями. Весьма важным классом задач являются краевые задачи со стационарными неоднородностями, когда граничные условия и правая часть уравнения не зависят от времени

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \tag{45'}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= u_1, \\ u(l, t) &= u_2. \end{aligned}\right\} \tag{47'}$$

В этом случае решение естественно искать в виде суммы

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

где $\bar{u}(x)$ — стационарное состояние (статический прогиб) струны, определяемое условиями

$$a^2\bar{u}''(x) + f_0(x) = 0,$$
$$\bar{u}(0) = u_1,$$
$$\bar{u}(l) = u_2,$$

а $v(x, t)$ — отклонение от стационарного состояния. Нетрудно видеть, что функция $\bar{u}(x)$ равна

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{x}{l}\int_0^l d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2.$$

В частности, если $f_0 = \text{const}$, то

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2}(lx - x^2).$$

Функция $v(x, t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}.$$

с однородными граничными условиями

$$v(0,\ t) = 0,$$
$$v(l,\ t) = 0$$

и начальными условиями

$$v(x,\ 0) = \overline{\varphi}(x),\quad \overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - \overline{u}(x),$$
$$v_t(x,\ 0) = \psi(x).$$

Таким образом, v является решением простейшей краевой задачи, рассмотренной нами в п. 1 настоящего параграфа.

При выводе уравнения колебаний струны и в ряде других случаев мы не принимали во внимание действие силы тяжести. Из сказанного выше следует, что вместо явного учета силы тяжести (и вообще сил, не зависящих от времени) достаточно брать отклонение от стационарного состояния.

Решим простейшую задачу подобного типа при нулевых начальных условиях:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \tag{45''}$$
$$u(x,\ 0) = 0,\ u_t(x,\ 0) = 0, \tag{46'}$$
$$u(0,\ t) = u_1,\ u(l,\ t) = u_2. \tag{47''}$$

В этом случае для функции $v(x,\ t)$ получаем задачу

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$
$$v(x,\ 0) = \varphi(x) = -\overline{u}(x),\quad v_t(x,\ 0) = 0,$$
$$v(0,\ t) = 0,\ v(l,\ t) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что для решения этой задачи нет необходимости пользоваться точным аналитическим выражением для $\overline{u}(x)$.

Выражение для $v(x,\ t)$ согласно формуле (17) имеет вид

$$v(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t)\, X_n(x),$$

где

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n}\, x \qquad \left(\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}\right)$$

есть собственная функция следующей краевой задачи:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$
$$X(0) = 0,\quad X(l) = 0, \tag{10}$$

Из начальных условий следует, что

$$B_n = 0$$

и

$$A_n = -\frac{2}{l}\int_0^l \overline{u}(x)\, X_n(x)\, dx.$$

Для вычисления этого интеграла весьма удобным является следующий метод. Пользуясь уравнением (8), находим:

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} X_n''(x).$$

Подставим это выражение в формулу для A_n и выполним двукратное интегрирование по частям

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n} \int_0^l \bar{u}(x) X_n''(x)\,dx = \frac{2}{l\lambda_n} \left\{ \bar{u} X_n'(x) \Big|_0^l - \bar{u}' X_n \Big|_0^l + \int_0^l \bar{u}'' X_n(x)\,dx \right\},$$

откуда, учитывая уравнение и граничные условия для $\bar{u}(x)$, находим:

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n} \left[u_2 X_n'(l) - u_1 X_n'(0) - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x)\,dx \right]$$

или

$$A_n = \frac{2}{\pi n} \left[u_2 (-1)^n - u_1 + \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x)\,dx \right].$$

В частности, для однородного уравнения ($f_0(x) = 0$) имеем:

$$A_n = \frac{2}{l\sqrt{\lambda_n}} [u_2 (-1)^n - u_1] = \frac{2}{\pi n} [u_2 (-1)^n - u_1].$$

Этим методом удобно вычислять коэффициенты Фурье для граничных условий второго и третьего рода, а также в случае краевой задачи для неоднородной струны

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] + \lambda\rho(x) X = 0,$$

если известны собственные функции и собственные значения.

7. Задачи без начальных условий. Как было показано выше, задача о колебании струны при заданном граничном режиме может быть сведена к решению неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями.

Однако этот прием зачастую усложняет решение задачи, которое может быть найдено непосредственно.

При изучении влияния граничного режима важно найти какое-нибудь частное решение (однородного уравнения), удовлетворяющее заданным граничным условиям, так как вычисление поправки на начальные данные сводится к решению того же уравнения с нулевыми граничными условиями.

Весьма важным классом задач о распространении граничного режима являются «задачи без начальных условий».

Если граничный режим действует достаточно долго, то благодаря трению, присущему всякой реальной физической системе, влияние

начальных данных с течением времени ослабевает. Таким образом, мы естественно приходим к задаче без начальных условий (I).

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \qquad (\alpha > 0) \tag{61}$$

при заданных граничных условиях:

$$u(0,\ t) = \mu_1(t),$$
$$u(l,\ t) = \mu_2(t).$$

Слагаемое αu_t в правой части уравнения соответствует трению, пропорциональному скорости.

Рассмотрим сначала задачу о распространении периодического граничного режима:

$$u(l,\ t) = A\cos\omega t \ (\text{или } u(l,\ t) = B\sin\omega t), \tag{62}$$

$$u(0,\ t) = 0. \tag{63}$$

Для дальнейшего нам удобнее записать граничное условие в комплексной форме

$$u(l,\ t) = Ae^{i\omega t}. \tag{64}$$

Если

$$u(x,\ t) = u^{(1)}(x,\ t) + iu^{(2)}(x,\ t)$$

удовлетворяет уравнению (61) с граничными условиями (62) и (63), то $u^{(1)}(x,\ t)$ и $u^{(2)}(x,\ t)$ — его действительная и мнимая части — в отдельности удовлетворяют тому же уравнению (в силу его линейности), условию (63) и граничным условиям при $x = l$

$$u^{(1)}(l,\ t) = A\cos\omega t,$$
$$u^{(2)}(l,\ t) = A\sin\omega t.$$

Итак, найдем решение задачи

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \\ u(0,\ t) &= 0, \\ u(l,\ t) &= Ae^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Полагая

$$u(x,\ t) = X(x)\, e^{i\omega t}$$

и подставляя это выражение в уравнение, получим для функции $X(x)$ следующую задачу:

$$X'' + k^2 X = 0 \qquad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha\frac{\omega}{a^2}\right), \tag{66}$$

$$X(0) = 0, \tag{67}$$

$$X(l) = A. \tag{68}$$

Из уравнения (66) и граничного условия (67) находим:

$$X(x) = C \sin kx.$$

Условие при $x = l$ дает:

$$C = \frac{A}{\sin kl}, \tag{69}$$

так что

$$X(x) = A \frac{\sin kx}{\sin kl} = X_1(x) + iX_2(x), \tag{70}$$

где $X_1(x)$ и $X_2(x)$ — действительная и мнимая части $X(x)$.

Искомое решение можно представить в виде

$$u(x, t) = [X_1(x) + iX_2(x)]\, e^{i\omega t} = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t),$$

где

$$u^{(1)}(x, t) = X_1(x) \cos \omega t - X_2(x) \sin \omega t,$$
$$u^{(2)}(x, t) = X_1(x) \sin \omega t + X_2(x) \cos \omega t.$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$, найдем, что

$$\bar{k} = \lim_{\alpha \to 0} k = \frac{\omega}{a} \tag{71}$$

и, соответственно,

$$\bar{u}^{(1)}(x, t) = \lim_{\alpha \to 0} u^{(1)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t, \tag{72}$$

$$\bar{u}^{(2)}(x, t) = \lim_{\alpha \to 0} u^{(2)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t. \tag{73}$$

Функции $\bar{u}^{(1)}(x, t)$ и $\bar{u}^{(2)}(x, t)$, очевидно, являются решениями уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}^{(1)}(0, t) = 0, && \bar{u}^{(2)}(0, t) = 0, \\ &\bar{u}^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t, && \bar{u}^{(2)}(l, t) = A \sin \omega t. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Решение задачи при $\alpha = 0$ существует не всегда. Если частота вынужденных колебаний ω совпадает с собственной частотой ω_n колебаний струны с закрепленными концами

$$\omega = \omega_n = \frac{\pi n}{l} a,$$

то знаменатель в формулах для $\bar{u}^{(1)}$ и $\bar{u}^{(2)}$ обращается в нуль и решения задачи без начальных условий не существует.

Этот факт имеет простой физический смысл: при $\omega = \omega_n$ наступает резонанс, т. е. не существует установившегося режима. Амплитуда, начиная с некоторого момента $t = t_0$, неограниченно нарастает.

При наличии трения ($\alpha \neq 0$) установившийся режим возможен при любом ω.

Если $f(t)$ — периодическая функция, представимая в виде ряда

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t), \tag{74}$$

где ω — наименьшая частота, A_n и B_n — коэффициенты Фурье, то решение задачи для случая $\alpha = 0$ принимает вид

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t) \frac{\sin \frac{\omega n}{a} x}{\sin \frac{\omega n}{a} l},$$

если только ни одна из частот ωn не совпадает с собственными частотами закрепленной струны.

Если же $f(t)$ — непериодическая функция, то, разлагая ее в интеграл Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Отметим, что решение задачи без начальных условий при $\alpha = 0$ определено неоднозначно, если только не накладывать каких-либо дополнительных условий. В самом деле, прибавляя к какому-либо решению этой задачи любую комбинацию стоячих волн

$$\sum \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \cos \frac{\pi n}{l} x,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные, видим, что эта сумма будет удовлетворять тому же уравнению и тем же граничным условиям.

Чтобы получить единственное решение задачи (I) при $\alpha = 0$, введем дополнительное условие «исчезающего трения»:

Решение задачи (II) *мы называем удовлетворяющим условию «исчезающего трения», если оно является решением задачи* (I) *при* $\alpha \to 0$.

Аналогично решается задача, если конец $x = l$ закреплен, а при $x = 0$ задан граничный режим.

Решение общей задачи без начальных условий

$$u(0, t) = \mu_1(t), \qquad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определяется в виде суммы двух слагаемых, для каждого из которых неоднородно лишь одно из граничных условий.

Докажем единственность ограниченного решения задачи без начальных условий для уравнения (61). При этом мы будем предполагать непрерывность решения вместе с его производными до второго порядка включительно

в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $-\infty < t < t_0$, если граничные значения

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определены в области $-\infty < t < t_0$.

Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два ограниченных решения рассматриваемой задачи (I),

$$|u_1| < M, \quad |u_2| < M,$$

где $M > 0$ — некоторое число.

Разность этих функций

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

ограничена ($|v| < 2M$), удовлетворяет уравнению (61) и однородным граничным условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Коэффициенты Фурье для функции v

$$v_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l v(x, t) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx$$

очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\ddot{v}_n + d\dot{v}_n + \omega_n^2 v_n = 0 \qquad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} u\right), \tag{*}$$

так как вторые производные функции $v(x, t)$ непрерывны для $0 \leqslant x \leqslant l$.

Общее решение уравнения (*) имеет вид

$$v_n(t) = A_n e^{-q_n^{(1)} t} + B_n e^{-q_n^{(2)} t}, \tag{**}$$

где $q_n^{(1)}$ и $q_n^{(2)}$ — корни характеристического уравнения, равные

$$q_n^{(1)} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \omega_n^2}, \quad q_n^{(2)} = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \omega_n^2} \qquad (a > 0).$$

Возможны лишь два случая: 1) корни вещественны и отрицательны. 2) Корни комплексны и имеют отрицательную вещественную часть. Отсюда следует, что всякое решение (**) уравнения (*) либо тождественно равно нулю, либо неограниченно возрастает по абсолютной величине при $t \to -\infty$. В нашем случае $|v_n| < 4M$ для всех n и потому $v_n \equiv 0$ для любого n.

Таким образом

$$v(x, t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

8. Сосредоточенная сила. Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенной силы, приложенной в точке $x = x_0$. Если сила распределена на некотором участке $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то решение находится по формуле (55). Совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, можно получить решение поставленной задачи.

С другой стороны, при выводе уравнения колебаний мы видели (см. (8), п. 1 § 1), что в точке x_0, к которой приложена сосредоточенная сила, происходит разрыв первой производной, а сама функция остается непрерывной. Решение задачи $u(x, t)$ о колебаниях

струны под действием силы, сосредоточенной в точке x_0, можно представить двумя различными функциями:

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ t) &= u_1(x,\ t) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u(x,\ t) &= u_2(x,\ t) \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Эти функции должны удовлетворять уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{76}$$

граничным и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u_1(0,\ t) &= 0, \quad u\ (x,\ 0) = \varphi(x), \\ u_2(l,\ t) &= 0; \quad u_t\ (x,\ 0) = \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

и условиям сопряжения в точке $x = x_0$, состоящим из условия непрерывности функции $u(x,\ t)$:

$$u_1(x_0,\ t) = u_2(x_0,\ t), \tag{78}$$

и условия, связывающего величину разрыва производной с силой $f(t)$, сосредоточенной в точке x_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0,\ t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0,\ t) = -\frac{f(t)}{k}. \tag{79}$$

Заботиться о соблюдении начальных условий нет необходимости. Если мы найдем частное решение уравнений (76), удовлетворяющее граничному условию из (77), а также (78) и (79), то, прибавляя к нему решение однородного уравнения колебаний, мы всегда сможем удовлетворить заданным начальным условиям.

Рассмотрим частный случай

$$f(t) = A\cos\omega t, \quad -\infty < t < +\infty$$

и найдем решение, удовлетворяющее лишь граничным условиям, предполагая, что сила действует все время, начиная от $t = -\infty$ (установившийся режим), т. е. решим задачу без начальных данных. Будем искать решение в виде

$$u_1(x,\ t) = X_1(x)\cos\omega t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0,$$

$$u_2(x,\ t) = X_2(x)\cos\omega t \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l.$$

Из уравнения (76) следует:

$$\left.\begin{aligned} X_1'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_1 &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ X_2'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_2 &= 0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Функции X_1 и X_2, кроме того, должны удовлетворять граничным условиям

$$X_1(0) = 0, \quad X_2(l) = 0, \tag{81}$$

вытекающим из (77), и условиям сопряжения

$$X_1(x_0) = X_2(x_0), \quad X_1'(x_0) - X_2'(x_0) = \frac{A}{k}, \tag{82}$$

вытекающим из (78) и (79).

Из уравнения (80) и условий (81) находим:

$$X_1(x) = C \sin \frac{\omega}{a} x, \quad X_2(x) = D \sin \frac{\omega}{a}(l - x);$$

условия сопряжения (82) дают:

$$C \sin \frac{\omega}{a} x_0 - D \sin \frac{\omega}{a}(l - x_0) = 0,$$

$$C \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} x_0 + D \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a}(l - x_0) = \frac{A}{k}.$$

Определяя отсюда коэффициенты C и D, получаем:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{Aa}{k\omega} \dfrac{\sin \frac{\omega}{a}(l - x_0)}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \dfrac{\omega}{a} x \cos \omega t & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_2 = \dfrac{Aa}{k\omega} \dfrac{\sin \frac{\omega}{a} x_0}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \dfrac{\omega}{a}(l - x) \cos \omega t & \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Аналогично записывается решение при $f(t) = A \sin \omega t$.

Итак, получено решение для случая $f(t) = A \cos \omega t$ или $f(t) = A \sin \omega t$. Если $f(t)$ — периодическая функция, равная

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t)$$

(ω — наименьшая частота), то, очевидно,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{k} \left\{ \dfrac{\alpha_0 x}{2} \left(1 - \dfrac{x_0}{l}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a \sin \frac{\omega n}{a}(l - x_0)}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \dfrac{\omega n x}{a} \times \right. \\ \qquad \left. \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0; \right. \quad (83)^{1}) \\ u_2 = \dfrac{1}{k} \left\{ \dfrac{\alpha_0 x_0}{2} \left(1 - \dfrac{x}{l}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a \sin \frac{\omega n}{a} x_0}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \dfrac{\omega n (l - x)}{a} \times \right. \\ \qquad \left. \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t) \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \right. \end{cases}$$

[1]) Первые слагаемые этих сумм соответствуют стационарному прогибу, определяемому по величине силы

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} = \text{const},$$

Если функция $f(t)$ непериодическая, то, представляя ее в виде интеграла Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Нетрудно изучить явления резонанса в процессе, описываемом функциями (83). Резонанс возникает, если знаменатель у этих функций равен нулю

$$\sin \frac{\omega n l}{a} = 0, \quad \omega n = \frac{\pi m}{l} a = \omega_m,$$

т. е. если спектр частот возбуждающей силы содержит одну из частот собственных колебаний.

Если точка приложения силы x_0 является одним из узлов стоячей волны, соответствующей свободному колебанию с частотой ω_m, то

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 0, \quad \sin \frac{\omega_m}{a} (l - x_0) = 0.$$

При этом числители соответствующих слагаемых для u обращаются в нуль, и явление резонанса не имеет места. Если же точка приложения силы, действующей с частотой ω_m, является пучностью соответствующей стоячей волны с частотой ω_m, то

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 1,$$

и явление резонанса будет выражено наиболее резко.

Отсюда следует правило, что для возбуждения резонанса струны при действии на нее сосредоточенной силой надо, чтобы частота ее ω была равна одной из собственных частот струны, а точка приложения силы совпадала с одной из пучностей стоячей волны.

9. Общая схема метода разделения переменных. Метод разделения переменных применим не только для уравнения колебаний однородной струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, но и для уравнения колебаний неоднородной струны

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)u = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{84}$$

Рассмотрим, например, первую краевую задачу для уравнения (84):

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0; \tag{85}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \tag{86}$$

как нетрудно видеть, функциями:

$$u = \begin{cases} u_1(x, t) = u_1(x) = \dfrac{1}{k}\dfrac{a_0}{2} x \left(1 - \dfrac{x_0}{l}\right) & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_2(x, t) = u_2(x) = \dfrac{1}{k}\dfrac{a_0}{2} x_0 \left(1 - \dfrac{x}{l}\right) & \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Здесь k, q и ρ зависят от x и положительны ($k > 0$, $\rho > 0$, $q \geqslant 0$)[1]. Проведем решение этой задачи методом разделения переменных. Для отыскания частных решений обратимся, как и раньше, к вспомогательной задаче:

найти нетривиальное решение уравнения (84), удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

и представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)\, T(t).$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение и пользуясь граничными условиями, после разделения переменных получаем:

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\,\frac{dX}{dx}\right] - qX + \lambda\rho X = 0,$$
$$T'' + \lambda T = 0.$$

Для определения функции $X(x)$ мы получим следующую *краевую задачу на собственные значения*:

найти значения λ, называемые собственными значениями, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$L[X] + \lambda\rho X = 0, \tag{87}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{88}$$

а также найти эти нетривиальные решения, называемые собственными функциями задачи[2].

Формулируем основные свойства собственных функций и собственных значений краевой задачи (87) и (88), необходимые для дальнейшего изложения.

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \ldots$, которым соответствуют нетривиальные решения задачи — собственные функции $X_1(x)$, $X_2(x)$, $\ldots$, $X_n(x)$, $\ldots$

2. При $q \geqslant 0$ все собственные значения λ_n положительны.

---

[1]) Тот случай, когда $k(x)$ в некоторых точках обращается в нуль, рассматривается отдельно (см. Дополнение).

[2]) При $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $k = k_0 = \text{const}$ мы получаем краевую задачу о собственных колебаниях структуры с закрепленными концами:

$$X'' + \mu X = 0 \qquad \left(\mu = \frac{\rho_0}{k_0}\lambda\right),$$
$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

исследованную в § 2.

3. Собственные функции ортогональны между собой с весом $\rho(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n). \tag{89}$$

4. (*Теорема разложимости В. А. Стеклова.*) Произвольная функция $F(x)$, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничным условиям $F(0) = F(l) = 0$, разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{X_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x), \qquad F_n = \frac{1}{N_n} \int_0^l F(x) X_n(x) \rho(x) dx, \tag{90}$$

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x)\, dx.$$

Доказательство утверждений 1 и 4 основывается обычно на теории интегральных уравнений, и мы не будем здесь его приводить. В настоящем пункте мы остановимся на доказательствах свойств 2 и 3.

Прежде чем переходить к доказательству этих свойств, выведем так называемую формулу Грина. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — произвольные функции, дважды дифференцируемые на интервале $a < x < b$ и имеющие непрерывную первую производную на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Рассмотрим выражение

$$uL[v] - vL[u] = u(kv')' - v(ku')' = [k(uv' - vu')]'.$$

Интегрируя это равенство по x от a до b, получим *формулу Грина*

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])\, dx = k(uv' - vu')\Big|_a^b. \tag{91}$$

Докажем свойство 3. Пусть $X_m(x)$ и $X_n(x)$ — две собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_m и λ_n. Полагая в формуле (91) $u = X_m(x)$, $v = X_n(x)$ и учитывая граничные условия (88), будем иметь [1]):

$$\int_0^l \{X_m L[X_n] - X_n L[X_m]\}\, dx = 0 \qquad (a = 0,\ b = l),$$

---

[1]) Производные X_m' и X_n' непрерывны всюду на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, включая точки $x = 0$ и $x = l$, так как уравнение (87) дает:

$$k(x) X_m'(x) = \int_x^{x_0} (q - \lambda_m \rho) X_m\, dx + C.$$

Отсюда и следует существование производной X_m' при $x = 0$ и $x = l$.

откуда, пользуясь уравнением (87), получаем:

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_m(x) X_n(x)\, dx = 0.$$

Таким образом, если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то имеет место условие

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0, \tag{92}$$

выражающее ортогональность с весом $\rho(x)$ собственных функций $X_m(x)$ и $X_n(x)$. Докажем теперь, что каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция [1]). В самом деле, всякая собственная функция определяется однозначно как решение дифференциального уравнения 2-го порядка по значению самой функции и ее первой производной при $x = 0$. Допустив существование двух функций $\overline{X}$ и $\overline{\overline{X}}$, отвечающих одному и тому же значению λ и обращающихся в нуль при $x = 0$, и беря функцию

$$X^*(x) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}(x),$$

видим, что эта функция удовлетворяет тому же уравнению 2-го порядка (87) и тем же начальным условиям, что и функция $\overline{X}(x)$:

$$X^*(0) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}(0) = 0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}'(0) = \overline{X}'(0).$$

Тем самым доказано, что $X^*(x) = \overline{X}(x)$ и что

$$\overline{X}(x) = A \overline{\overline{X}}(x) \qquad \left(A = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\right).$$

Отметим, что в процессе доказательства мы пользовались условием $\overline{\overline{X}}'(0) \neq 0$, которое безусловно выполняется, так как решение линейного уравнения (87), определяемое начальными условиями

$$\overline{\overline{X}}(0) = 0, \quad \overline{\overline{X}}'(0) = 0,$$

---

[1]) Это свойство первой краевой задачи основано на том, что два линейно независимых решения дифференциального уравнения 2-го порядка не могут обращаться в нуль в одной и той же точке. Это утверждение относится к краевой задаче с нулевыми граничными условиями. При других граничных условиях (например, $X(0) = X(l)$, $X'(0) = X'(l)$) могут существовать две различные собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению.

тождественно равно нулю и тем самым не может быть собственной функцией.

В силу линейности и однородности уравнения и краевых условий очевидно, что если $X_n(x)$ является собственной функцией при собственном значении λ_n, то функция $A_nX_n(x)$ (A_n — произвольная постоянная) также является собственной функцией для того же λ_n. Выше было доказано, что этим вполне исчерпывается класс собственных функций. Собственные функции, отличающиеся множителем, мы, разумеется, не считаем существенно различными. Чтобы исключить неопределенность в выборе множителя, можно подчинить собственные функции требованию нормировки

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x)\,\rho(x)\,dx = 1.$$

Если некоторая функция $\hat{X}_n(x)$ не удовлетворяет этому требованию, то ее можно «нормировать», умножая на коэффициент A_n,

$$A_n\hat{X}_n(x) = X_n(x), \quad A_n = \frac{1}{\sqrt{\int_0^l \hat{X}_n^2(x)\,\rho(x)\,dx}}.$$

Таким образом, собственные функции $\{X_n(x)\}$ нашей краевой задачи (87 — 88) образуют ортогональную и нормированную систему

$$\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Обратимся к доказательству свойства 2. Докажем сначала, что $\lambda \geqslant 0$ при $q \geqslant 0$. Пусть $X_n(x)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, так что

$$L[X_n] = -\lambda_n\rho(x)\,X_n(x).$$

Умножая обе части этого равенства на $X_n(x)$ и интегрируя по x от 0 до l, получаем:

$$\lambda_n\int_0^l X_n^2(x)\,\rho(x)\,dx = -\int_0^l X_n(x)\,L[X_n]\,dx$$

или

$$\lambda_n = -\int_0^l X_n\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX_n}{dx}\right]dx + \int_0^l q(x)\,X_n^2(x)\,dx,$$

так как функция $X_n(x)$ предполагается нормированной. Интегрируя по частям и пользуясь граничными условиями (88), получаем:

$$\lambda_n = -X_n k X_n' \Big|_0^l + \int_0^l k(x)[X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x)\, dx =$$

$$= \int_0^l k(x)[X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x)\, dx, \tag{93}$$

откуда и следует, что

$$\lambda_n > 0,$$

так как по условию $k(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$.

Оставляя доказательство теоремы разложимости в стороне, остановимся вкратце на вычислении коэффициентов разложения.

Нетрудно видеть, что

$$F_n = \frac{\int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x) dx}{\int_0^l \rho(x) X_n^2(x)\, dx}. \tag{94}$$

В самом деле, умножая обе части равенства

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)$$

на $\rho(x) X_n(x)$, интегрируя по x от 0 до l и учитывая ортогональность собственных функций, получаем написанное выше выражение для коэффициентов F_n (*коэффициентов Фурье*).

Вернемся теперь к уравнению с частными производными. Для функции $T(t)$ мы имеем уравнение

$$T'' + \lambda_n T = 0 \tag{95}$$

без каких-либо дополнительных условий. В силу доказанной положительности λ_n его решение имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

где A_n и B_n — неопределенные коэффициенты. Таким образом, вспомогательная задача имеет бесчисленное множество решений вида

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

Обратимся к решению задачи с заданными начальными условиями. Будем искать решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, t) X_n(x). \tag{96}$$

Формальная схема удовлетворения начальным условиям (86) основывается на теореме разложимости 4 и проводится совершенно так же, как и для однородной струны. Из равенств

$$u(x,\ 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x,\ 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x)$$

находим, что

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \tag{97}$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при разложении по ортогональной с весом $\rho(x)$ системе функций $\{X_n(x)\}$.

Ограничиваясь общей схемой метода разделения переменных, мы не приводим условий применимости этого метода как в отношении коэффициентов уравнения, так и в отношении начальных функций.

Основополагающие работы по обоснованию этого метода принадлежат В. А. Стеклову [1]).

ЗАДАЧИ

1. Найти функцию $u(x, t)$, определяющую процесс колебания струны $(0, l)$, закрепленной на концах и возбуждаемой (рис. 24)

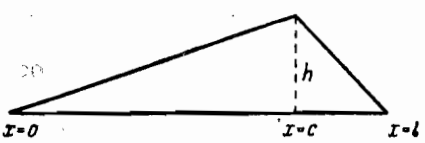


Рис. 24.

оттягиванием ее в точке $x = c$ на величину h, т. е. $u(c, 0) = h$ (см. приложение I).

2. Закрепленная на концах струна в точке $x = c$ оттянута силой F_0. Найти колебания струны, если в начальный момент сила перестает действовать.

3. Найти функцию $u(x, t)$, определяющую процесс колебания струны $(0, l)$, закрепленной на концах и возбуждаемой импульсом K, распределенным на отрезке $(c-\delta,\ c+\delta)$: а) равномерно, б) по закону $v_0 \cos\frac{x-c}{2\delta}\pi$ (см. приложение I).

---

[1]) «Сообщения Харьковского математического общества», вторая серия, т. 5, № 1 и 2 (1896), а также «Основные задачи математической физики», т. 1 (1922).

4. Найти функцию $u(x, t)$, определяющую колебания струны $(0, l)$, закрепленной на концах и возбуждаемой импульсом K, приложенным в точке $x = c$ (см. приложение I).

5. Доказать аддитивность энергии отдельных гармоник для процесса колебаний при граничных условиях $u = 0$, $u_x = 0$. Рассмотреть также случай граничного условия $u_x + hu = 0$ (все ряды предполагать равномерно сходящимися). Вычислить энергию отдельных гармоник в задачах 1, 2, 3, 4.

6. Пружина, закрепленная одним концом в точке $x = 0$, растянута грузом массы M, подвешенным в точке $x = l$. Найти колебания пружины, если в момент $t = 0$ груз падает и в дальнейшем на конец $x = l$ не действуют никакие силы.

7. Один конец стержня закреплен, а на второй действует сила F_0. Найти колебания стержня, если в начальный момент сила перестает действовать.

8. Найти процесс колебания пружины, один конец которой закреплен, а ко второму концу в начальный момент подвешивается груз массы M. Начальные условия нулевые.

9. К однородной струне с закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$ в точке $x = c$ прикреплена масса M. Найти отклонение струны $u(x, t)$, если: а) в начальный момент в точке $x = c$ струна оттянута на величину h от положения равновесия и отпущена без начальной скорости; б) начальное отклонение и начальная скорость равны нулю (см. приложение III).

10. Найти процесс колебания пружины со свободными концами при равномерном начальном растяжении (представить модель этой задачи).

11. Найти процесс колебания пружины с упруго закрепленными концами при одинаковых коэффициентах жесткости, если начальные условия произвольны.

Решение исследовать при малых h («мягкое» закрепление) и при больших h («жесткое» закрепление) и вычислить соответствующие поправки к собственным значениям для струны со свободными и закрепленными концами.

12. Найти отклонение $u(x, t)$ струны с жестко закрепленными концами, если колебания происходят в среде, сопротивление которой пропорционально скорости, а начальные условия произвольны.

Ответ:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu u_t, \qquad \nu > 0,$$

$$u(x, t) = e^{-\nu t} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \sqrt{\lambda_n}\, x,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \sqrt{\lambda_n}\, x\, dx, \qquad b_n = \nu \frac{a_n}{\omega_n} + \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l \psi(x) \sin \sqrt{\lambda_n}\, x\, dx,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad \omega_n = \sqrt{a^2 \lambda_n - \nu}.$$

13. Изолированный электрический провод длины l с характеристиками L, R, C и $G=0$ заряжен до некоторого постоянного потенциала v_0. В начальный момент один конец провода заземляется, а второй остается все время изолированным. Найти распределение напряжения в проводе.

Ответ:

$$v(x, t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{2n+1}{l} \pi x \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2 l^2}{L\pi^2 (2n+1)^2}},$$

$$a_n = \frac{4v_0}{\pi(2n+1)\sin\varphi_n}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_n = 2\omega_n \frac{L}{R}.$$

14. Струна с жестко закрепленными концами колеблется под действием гармонической силы, распределенной с плотностью $f(x, t) = \Phi(x)\sin\omega t$. Найти отклонение $u(x, t)$ струны при произвольных начальных условиях. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

15. Решить задачу 14, предполагая, что колебания происходят в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Найти установившиеся колебания, составляющие главную часть решения при $t \to \infty$.

16. Упругий стержень длины l расположен вертикально и жестко прикреплен верхним концом к свободно падающему лифту, который, достигнув скорости v_0, мгновенно останавливается. Найти колебания стержня, предполагая его нижний конец свободным.

17. Решить уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u + A$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B,$$

где b, A и B — постоянные.

18. Решить дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \operatorname{sh} x$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

где A, B и C — постоянные.

19. К однородной струне с жестко закрепленными концами $x=0$ и $x=l$ в точке $x=c$ $(0 < c < l)$ приложена гармоническая сила

$$F(t) = P_0 \sin\omega t,$$

действующая, начиная с момента $t=0$. Найти отклонение струны $u(x, t)$, предполагая начальные условия нулевыми.

20. Решить задачу о колебаниях неоднородного стержня длины l с жестко закрепленными концами, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке $x=c\,(0<c<l)$, если начальное отклонение имеет вид

$$u(x, 0)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant c,\\ \dfrac{h}{l-c}(l-x) & \text{при } c\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

а начальные скорости равны нулю.

21. Найти установившиеся колебания пружины, один конец которой закреплен, а на второй действует сила

$$F(t)=A\sin\omega_1 t+B\sin\omega_2 t.$$

22. Найти установившиеся колебания неоднородного стержня, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке $x=c$, если один конец стержня закреплен, а второй движется по закону

$$u(l, t)=A\sin\omega t.$$

§ 4. Задача с данными на характеристиках

1. Постановка задачи. Рассмотрим ряд задач, являющихся развитием первой краевой задачи для уравнения колебаний струны. Для простоты будем изучать явления вблизи одного края, считая другой край удаленным в бесконечность, т. е. в качестве исходной задачи возьмем задачу для полубесконечной прямой.

Уравнение колебаний струны $u_{t't'}=a^2u_{xx}$ симметрично относительно переменных x и t, если положить $a^2=1$, т. е. изменить масштаб времени, введя переменную $t=at'$. Однако дополнительные условия вносят асимметрию в математическое толкование x и t: в начальных условиях (при $t=0$) задаются две функции $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$, в то время как в граничных условиях (при $x=0$) задается только одна функция $u(0, t)$.

Как было отмечено в § 2, п. 7, между функциями и их нормальными производными при $t=0$ и $x=0$ существует соотношение

$$u_t(0, z)+u_x(0, z)=u_t(z, 0)+u_x(z, 0)\qquad (a^2=1)$$

при произвольном значении z. Отсюда следует, что при $x=0$ и $t=0$ нельзя независимым образом задать все эти функции; произвольными являются только три условия, что и указывает на невозможность симметричной постановки дополнительных условий.

Дополнительные условия могут задаваться либо на прямых линиях $x=0$, $t=0$ (с задачами подобного рода мы имели дело до сих пор), либо на некоторых кривых в фазовой плоскости. Например, граничные значения можно задавать на некоторой кривой $C_1\,(x=f_1(t))$, однако для разрешимости такой задачи кривая C_1 должна помимо достаточной гладкости удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям.

Рассмотрим процесс колебаний газа в трубе с подвижной границей (подвижным поршнем). Ясно, что скорость перемещения границы, движущейся по закону $x=f_1(t)$, нельзя считать произвольной: она не должна превосходить скорость звука a $\left(\frac{df_1(t)}{dt}<a\right)$. Геометрическим следствием этого является то, что кривая $C_1\,(x=f_1(t))$ должна быть отделена характеристикой от линии $t=0$, несущей начальные значения (рис. 25). Если хотя бы в одной точке линия C_1 лежала ниже характеристики $x=at$, то значение функции $u(x, t)$ вполне определялось бы начальными условиями и не могло бы задаваться произвольно. Физический смысл этого связан с тем, что при движении газа со скоростями, превосходящими скорость звука, уравнение акустики теряет силу, и надо пользоваться нелинейными уравнениями газовой динамики [1]).

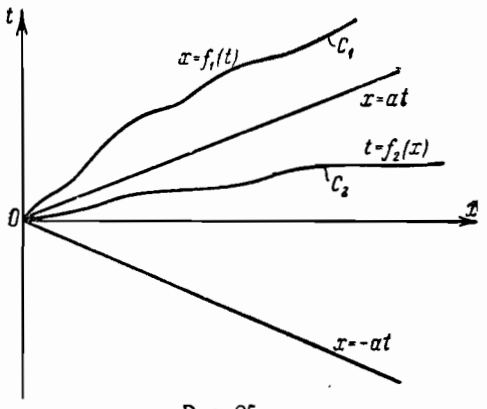


Рис. 25.

Начальные условия можно задавать не только на оси $t=0$, но и на некоторой линии $C_2\,(t=f_2(x))$, которая должна удовлетворять требованию $|f_2'(x)|<\frac{1}{a}$. Задачи подобного типа легко решаются с помощью интегрального уравнения колебаний (см. § 2, п. 7).

Не ставя своей целью дать полный перечень всех возможных краевых задач, рассмотрим более подробно задачу определения решения по данным на характеристиках. Эту краевую задачу часто называют *задачей Гурса*. Задача с данными на характеристиках представляет большой интерес с точки зрения физических приложений. Она встречается, например, при изучении процессов сорбции и десорбции газов (см. приложение V), процессов сушки (см. задачу 2) и многих других задач.

[1]) См. приложение IV, стр. 153.

2. Метод последовательных приближений. Рассмотрим простейшую задачу с данными на характеристиках

$$\left.\begin{aligned} u_{xy} &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Дополнительные условия даны на прямых $x = 0$ и $y = 0$, являющихся характеристиками уравнения (1). Будем предполагать, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условию сопряжения $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Интегрируя последовательно по x и y уравнение (1), получим:

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y)\, d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi$$

или

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{2}$$

Таким образом, для простейшего уравнения, не содержащего первых производных u_x, u_y и искомой функции, решение представляется в явной аналитической форме (2). Из формулы (2) непосредственно следует единственность и существование решения поставленной задачи.

Перейдем к решению линейного уравнения гиперболического типа

$$u_{xy} = a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u + f(x, y) \tag{3}$$

при дополнительных условиях на характеристиках $x = 0$, $y = 0$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x),$$
$$u(0, y) = \varphi_2(y),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ удовлетворяют требованиям дифференцируемости и сопряжения. Коэффициенты a, b и c будем предполагать непрерывными функциями x и y.

Формула (3) показывает, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$u(x, y) = \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)\, u_\xi + b(\xi, \eta) u_\eta + c(\xi, \eta)\, u]\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{4}$$

Для его решения воспользуемся методом последовательных приближений. Выберем в качестве нулевого приближения функцию

$$u_0(x, y) = 0.$$

Тогда (4) дает для последовательных приближений следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x \left[a(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \right. \\ &\qquad \left. + b(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, u_{n-1}\right] d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Отметим попутно, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y \left[a(x, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta)\, u_{n-1}\right] d\eta, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x \left[a(\xi, y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y)\, u_{n-1}\right] d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей

$$\{u_n(x, y)\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)\right\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y)\right\}.$$

Для этого рассмотрим разности

$$z_n(x, y) = u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y) =$$

$$= \int_0^y \int_0^x \left[a(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, z_{n-1}(\xi, \eta)\right] d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} =$$

$$= \int_0^y \left[a(x, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta)\, z_{n-1}(x, \eta)\right] d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} =$$

$$= \int_0^x \left[a(\xi, y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y)\, z_{n-1}(\xi, y)\right] d\xi.$$

Пусть M — верхняя граница абсолютных величин коэффициентов $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и H — верхняя граница абсолютных величин z_0 и ее производных

$$|z_0| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < H$$

при изменении x и y внутри некоторого квадрата ($0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$). Построим мажорантные оценки для функций z_n, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$. Очевидно, что

$$|z_1| < 3HMxy < 3HM\frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < 3HMy < 3HM(x+y),$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < 3HMx < 3HM(x+y).$$

Предположим, что имеют место рекуррентные оценки

$$|z_n| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

где $K > 0$ — некоторое постоянное число, значение которого уточним ниже. Пользуясь этими оценками и формулой для $(n+1)$-го приближения после ряда упрощений, усиливающих неравенство, получим:

$$|z_{n+1}| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}\left(\frac{x+y}{n+3}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial y}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где

$$K = 2L + 2.$$

В правых частях этих равенств с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения e^{2KLM}. Эти оценки

показывают, что последовательности функций

$$u_n = u_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1},$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

сходятся равномерно к предельным функциям, которые мы обозначим

$$u(x, y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, y),$$
$$v(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y),$$
$$w(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y).$$

Переходя к пределу под знаком интеграла в формулах (5) и (6), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) v + b(\xi, \eta) w + c(\xi, \eta) u]\, d\xi\, d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta) v + b(x, \eta) w + c(x, \eta) u]\, d\eta, \\ w(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y) v + b(\xi, y) w + c(\xi, y) u]\, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Вытекающие отсюда равенства

$$v = u_x,$$
$$w = u_y$$

позволяют установить, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) u_\xi + b(\xi, \eta) u_\eta + c(\xi, \eta) u]\, d\xi\, d\eta, \quad (4)$$

а также исходному дифференциальному уравнению (3), что проверяется непосредственно дифференцированием (4) по x и y. Функция $x(x, y)$, как нетрудно убедиться, удовлетворяет и дополнительным условиям.

Докажем теперь единственность решения рассматриваемой задачи. Допуская существование двух решений $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, сразу же получаем для их разности

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU)\, d\xi\, d\eta.$$

Обозначая далее через H_1 верхнюю грань абсолютных величин

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y) < H_1, \quad |U_y(x, y) < H_1$$

для $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$ и повторяя оценки, проведенные для функций $z_n(x, y)$, убеждаемся в справедливости неравенства

$$|U| < 3H_1M^{n+1}K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

при любом значении n. Отсюда и следует

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \text{или} \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y),$$

что и доказывает единственность решения задачи с данными на характеристиках.

Если коэффициенты a, b и c постоянны, то уравнение (3) с помощью подстановки

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

приводится к виду

$$v_{xy} + C_1 v = f. \tag{8}$$

При $C_1 = 0$ мы получаем задачу для простейшего уравнения (1), решение которой дается формулой (2).

Если $C_1 \neq 0$, то решение задачи для уравнения (8) также может быть получено в явной аналитической форме методом, изложенным в § 5.

ЗАДАЧИ

1. Через трубу $(x > 0)$, заполненную веществом, содержащим влагу, продувается воздух (со скоростью v). Пусть $v(x, t)$ — концентрация влаги в поглощающем веществе, $u(x, t)$ — концентрация свободных паров. Вывести уравнение для функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$, описывающих процесс сушки, если: 1) процесс изотермический и 2) изотерма сушки имеет вид $u = \gamma v$, где γ — постоянная изотермы (см. также приложение V).

2. По трубе $(x > 0)$ пуопускается со скоростью v горячая вода. Пусть u — температура воды в трубе, v — температура стенок трубы,

u_0 — температура окружающей среды. Вывести уравнения для u и v, пренебрегая распределением температуры по сечению трубы и стенок и считая, что на границах вода — стенка и стенка — среда существует перепад температур и происходит теплообмен по закону Ньютона (см. главу III, § 1).

§ 5. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа

1. Сопряженные дифференциальные операторы. Установим некоторые вспомогательные формулы, нужные нам для представления решений краевых задач в интегральной форме. Пусть

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)\,u_x + b(x, y)\,u_y + c(x, y)\,u \qquad (1)$$

($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — дифференцируемые функции) — линейный дифференциальный оператор, соответствующий линейному уравнению гиперболического типа. Умножая $\mathscr{L}[u]$ на некоторую функцию v, запишем отдельные слагаемые в виде

$$\begin{aligned} vu_{xx} &= (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, \\ vu_{yy} &= (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy}, \\ vau_x &= (avu)_x - u(av)_x, \\ vbu_y &= (bvu)_y - u(bv)_y, \\ vcu &= ucv. \end{aligned}$$

Суммируя отдельные слагаемые, получаем:

$$v\mathscr{L}[u] = u\mathscr{M}[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \qquad (2)$$

где

$$\mathscr{M}[v] = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \qquad (3)$$

$$H = vu_x - v_x u + avu = (vu)_x - (2v_x - av)\,u = \qquad (4)$$

$$= -(vu)_x + (2u_x + au)\,v, \qquad (4')$$

$$K = -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + (2v_y + bv)\,u = \qquad (5)$$

$$= (uv)_y - (2u_y - bu)\,v. \qquad (5')$$

Два дифференциальных оператора называются *сопряженными*, если разность

$$v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v]$$

является суммой частных производных по x и y от некоторых выражений H и K.

Рассматриваемые нами операторы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$, очевидно, являются сопряженными.

Если $\mathscr{L}[u] = \mathscr{M}[u]$, то оператор $\mathscr{L}[u]$ называется самосопряженным.

Двойной интеграл от разности $v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v]$ по некоторой области G, ограниченной кусочно-гладким контуром C, равен

$$\iint_G (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\,d\xi\,d\eta = \int_C (H\,d\eta - K\,d\xi), \tag{6}$$

где u и v — произвольные дважды дифференцируемые функции (формула Грина).

2. Интегральная форма решения. Воспользуемся формулой (6) для решения следующей задачи:

найти решение линейного уравнения гиперболического типа

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)\,u_x + b(x, y)\,u_y + c(x, y)\,u = -f(x, y), \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиям на кривой C,

$$u|_C = \varphi(x),$$

$$u_n|_C = \psi(x)$$

(u_n — производная по направлению нормали к кривой C).

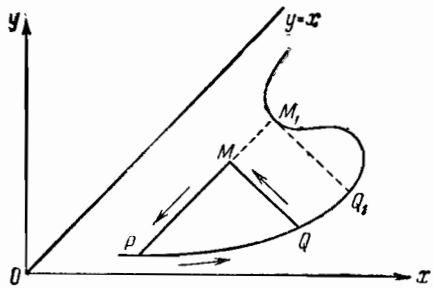


Рис. 26.

Кривая C задана при этом уравнением

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция. Наложим на кривую C условие, чтобы всякая характеристика семейств $y - x = \text{const}$ и $y + x = \text{const}$ пересекала кривую C не более одного раза (для этого надо, чтобы $|f'(x)| < 1$). Формула (6) для криволинейного треугольника MPQ, ограниченного дугой PQ, кривой C и отрезками характеристик MP и MQ (рис. 26), дает:

$$\iint_{MPQ} (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\,d\xi\,d\eta = \int_Q^M (H\,d\eta - K\,d\xi) + \int_M^P (H\,d\eta - K\,d\xi) + \int_P^Q (H\,d\eta - K\,d\xi).$$

Преобразуем первые два интеграла, взятые вдоль характеристик MQ и MP. Принимая во внимание, что

$$\left.\begin{aligned} d\xi = -d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} &\quad \text{на } QM, \\ d\xi = d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} &\quad \text{на } MP \end{aligned}\right\}$$ (ds элемент дуги вдоль QM и MP)

и пользуясь формулами (4) и (5), получим:

$$\int_Q^M (H\,d\eta - K\,d\xi) = -\int_Q^M d(uv) + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}v\right)u\,ds =$$

$$= -(uv)_M + (uv)_Q + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}v\right)u\,ds$$

и аналогично

$$\int_M^P (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}}v\right)u\,ds.$$

Отсюда и из формулы (6) следует:

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v\right)u\,ds + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}v\right)u\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_P^Q (H\,d\eta - K\,d\xi) - \frac{1}{2}\iint_{MPQ} (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\,d\xi\,d\eta. \qquad (8)$$

Эта формула является тождеством, верным для любых достаточно гладких функций u и v.

Пусть u — решение поставленной выше задачи с начальными условиями, а функция v зависит от точки M как от параметра и удовлетворяет следующим требованиям:

$$\mathscr{M}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_\xi - (bv)_\eta + cv = 0 \quad \text{внутри } \triangle MPQ \qquad (9)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v \text{ на характеристике } MP,\\ &\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}}v \text{ на характеристике } MQ,\\ &v(M) = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (9a)$$

Из условий на характеристиках и последнего условия находим:

$$v = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\,ds} \quad \text{на } MP,$$

$$v = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}}\,ds} \quad \text{на } MQ,$$

где s_0 — значение s в точке M. Как мы видели в § 4, уравнение (9) и значения функции v на характеристиках MP и MQ полностью определяет ее в области MPQ. Функцию v часто называют *функцией Римана*.

Таким образом, формула (8) для функции u, удовлетворяющей уравнению (7), принимает следующий окончательный вид:

$$u(M)=\frac{(uv)_P+(uv)_Q}{2}+\frac{1}{2}\int_P^Q [v(u_\xi\,d\eta+u_\eta\,d\xi)-u(v_\xi\,d\eta+v_\eta\,d\xi)+$$

$$+uv(a\,d\eta-b\,d\xi)]+\frac{1}{2}\iint_{MPQ} v(M,\,M')f(M')\,d\sigma_{M'}\quad (d\sigma_{M'}=d\xi\,d\eta). \tag{10}$$

Эта формула решает поставленную задачу, так как выражения, стоящие под знаком интеграла вдоль PQ, содержат функции, известные на дуге C. В самом деле, функция v была определена выше, а функции

$$u|_C=\varphi(x),$$

$$u_x|_C=u_s\cos(x,\,s)+u_n\cos(x,\,n)=\frac{\varphi'(x)+\psi(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}},$$

$$u_y|_C=u_s\cos(y,\,s)+u_n\cos(y,\,n)=\frac{\varphi'(x)f'(x)+\psi(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

вычисляются при помощи начальных данных.

Формула (10) показывает, что если начальные данные известны на дуге PQ, то они полностью определяют функцию в $\triangle PMQ$, если функция $f(x,\,y)$ известна в этой области [1]).

Формула (10), полученная в предположении существования решения, определяет его через начальные данные и правую часть уравнения (7) и тем самым по существу доказывает единственность решения (ср. с формулой Даламбера, гл. II, § 2, стр. 51).

Можно показать, что функция u, определяемая формулой (10), удовлетворяет условиям задачи. Однако мы на этом не останавливаемся.

3. Физическая интерпретация функции Римана. Выясним физический смысл функции $v(M,\,M')$. Для этого найдем решение неоднородного уравнения

$$\mathscr{L}[u]=-2f_1\quad (f=2f_1)$$

---

[1]) Если характеристика пересекает кривую C в двух точках P и M_1 (см. рис. 26), то значение $u(M_1)$ не может задаваться произвольно, а определяется по формуле (10) с начальными данными на дуге PQ_1 и значениями $f(x,\,y)$ в $\triangle PM_1Q_1$.

с нулевыми начальными условиями на кривой C. Обращаясь к формуле (10), видим, что искомое решение имеет вид

$$u(M) = \iint\limits_{MPQ} v(M,\ M') f_1(M')\, d\sigma_{M'}. \tag{11}$$

Предположим, что $f_1(M)$ — локальная функция точки M_1, равная нулю всюду, кроме малой окрестности S_ε точки M_1, и удовлетворяющая условию нормировки

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = 1. \tag{12}$$

Предыдущая формула в этом случае принимает вид

$$u_\varepsilon(M) = \iint\limits_{S_\varepsilon} v(M,\ M') f_1(M')\, d\sigma_{M'}. \tag{13}$$

Пользуясь теоремой о среднем значении, можно написать:

$$u_\varepsilon(M) = v(M,\ M_1^*) \iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = v(M,\ M_1^*),$$

где M_1^* — некоторая точка области S_ε.

Стягивая ε-окрестность S_ε в точку M_1 $(\varepsilon \to 0)$, находим:

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(M) = v(M,\ M_1). \tag{14}$$

Функция f_1, как мы видели на ряде примеров, обычно является плотностью силы, а переменная y — временем. Выражение

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = \iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{15}$$

представляет собой импульс силы. Отсюда в силу формулы (11) заключаем, что $v(M,\ M_1)$ является функцией влияния единичного импульса, приложенного в точке M_1.

Функция $v(M,\ M_1) = v(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ была определена как функция параметров $M(x,\ y)$, удовлетворяющая по координатам ξ, η точки M_1 уравнению

$$\mathcal{M}_{(\xi,\ \eta)}[v] = 0 \tag{16}$$

с дополнительными условиями (9а).

Рассмотрим функцию

$$u = u(M,\ M_1),$$

являющуюся функцией параметров $M_1(\xi,\ \eta)$ и удовлетворяющую по координатам x, y точки M уравнению

$$\mathcal{L}_{(x,\ y)}[u] = 0 \tag{17}$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{b-a}{2\sqrt{2}}u \quad \text{на характеристике } M_1Q_1,\\ &\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{b+a}{2\sqrt{2}}u \quad \text{на характеристике } M_1P_1,\\ &u(M_1,\ M_1)=1. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из этих условий находим:

$$u(M,\ M_1)=\left\{\begin{aligned} &e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b-a}{2\sqrt{2}}ds} \quad \text{на } M_1Q_1,\\ &e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b+a}{2\sqrt{2}}ds} \quad \text{на } M_1P_1, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$u(M_1,\ M_1)=1.$$

Уравнение (17) и условия (18) полностью определяют функцию u в четырехугольнике $MP_1M_1Q_1$, ограниченном отрезками характеристик MP_1, MQ_1 и M_1P_1, M_1Q_1 (рис. 27).

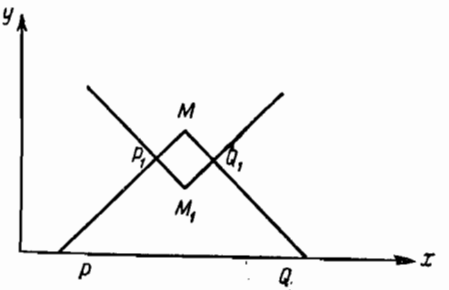


Рис. 27.

Применяя формулу (6) к четырехугольнику $MP_1M_1Q_1$, получаем:

$$\iint\limits_{MP_1M_1Q_1}(v\mathscr{L}[u]-u\mathscr{L}[v])\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\int\limits_{M}^{P_1}(H\,d\eta-K\,d\xi)+\int\limits_{Q_1}^{M}+\int\limits_{M_1}^{Q_1}+\int\limits_{P_1}^{M_1}=0.$$

Пользуясь формулами (4) и (5) для K и H и условиями (9а) на характеристиках для функции v, нетрудно вычислить первые два

интеграла правой части

$$\int_M^{P_1} (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{P_1},$$

$$\int_{Q_1}^{M} (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{Q_1},$$

подобно тому как это было сделано при выводе формулы (10).

Аналогично, пользуясь равенствами (4′), (5′) и условиями (19) для функции $u(M, M_1)$ на характеристиках находим:

$$\int_{P_1}^{M_1} (H\,d\eta - K\,d\xi) = \int_{P_1}^{M_1} [-(vu)_\xi\,d\eta - (uv)_\eta\,d\xi] + \int_{P_1}^{M_1} v\,[(2u_\xi\,d\eta + 2u_\eta\,d\xi) +$$

$$+ (au\,d\eta - bu\,d\xi)] = \int_{P_1}^{M_1} d(uv) + \int_{P_1}^{M_1} 2\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}u\right)v\,ds =$$

$$= (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1} \qquad \left(d\xi = -d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int_{M_1}^{Q_1} (H\,d\eta - K\,d\xi) = (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1} \qquad \left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right).$$

Суммируя эти равенства, получаем:

$$2(uv)_M = 2(uv)_{M_1}$$

или

$$u(M, M_1) = v(M, M_1), \tag{20}$$

так как

$$(u)_{M_1} = (v)_M = 1.$$

Таким образом, мы видим, что функцию влияния единичного импульса, сосредоточенного в точке M_1, можно определить как решение уравнения

$$\mathscr{L}_{(x, y)}[v(M, M_1)] = 0$$

с дополнительными условиями (18).

4. Уравнения с постоянными коэффициентами. В качестве первого примера применения формулы (10) рассмотрим задачу с начальными данными для уравнения колебаний струны:

$$u_{yy} = u_{xx} + f_1(x, t) \qquad \left(y = at,\ f_1 = \frac{f}{a^2}\right),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_y = \psi_1(x) \qquad \left(\psi_1 = \frac{\psi}{a}\right).$$

В формуле (10) дуга PQ является отрезком оси $y=0$.

Оператор

$$\mathscr{L} = u_{xx} - u_{yy}$$

является самосопряженным, поскольку

$$\mathscr{M} = \mathscr{L} = u_{xx} - u_{yy}.$$

Так как $a=0$ и $b=0$, то функция v на характеристиках MP и MQ равна единице. Отсюда следует, что

$$v(M, M') \equiv 1$$

для любой точки M' внутри треугольника PMQ.

Учитывая затем, что в нашем случае

$$d\eta = 0 \quad \text{на} \quad PQ,$$

получаем:

$$u(M) = \frac{u(P)+u(Q)}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q u_\eta\, d\xi + \frac{1}{2}\iint_{PMQ} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Замечая, что $P = P(x-y, 0)$, $Q = Q(x+y, 0)$, где x и y — координаты точки $M = M(x, y)$, и пользуясь начальными условиями, будем иметь:

$$u(x, y) = \frac{u(x-y)+u(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Возвращаясь к переменным x и t, получаем формулу

$$u(x, t) = \frac{u(x-at)+u(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

с которой мы уже встречались в п. 7 § 2.

В качестве второго примера рассмотрим задачу с начальными условиями для уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0 \quad (a, b, c — \text{постоянные числа}), \tag{21}$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \tag{22}$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x). \tag{23}$$

Подстановка

$$U = ue^{\lambda x + \mu y} \tag{24}$$

позволяет привести уравнение (21) к более простому виду

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1 U = 0, \qquad c_1 = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2) \tag{25}$$

с дополнительными условиями

$$U|_{y=0} = \varphi(x)\, e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x), \tag{22'}$$

$$U_y|_{y=0} = \left(\psi(x) - \frac{b}{2}\varphi(x)\right) e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x), \tag{23'}$$

если только выбрать параметры λ и μ соответствующим образом, полагая

$$\lambda = \frac{a}{2}, \qquad \mu = -\frac{b}{2}. \tag{26}$$

Определение функции $U(x, y)$ по начальным данным и уравне-

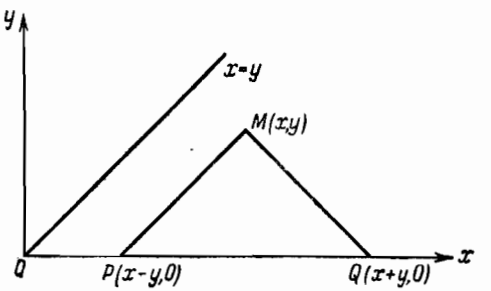


Рис. 28.

нию (25) сводится к построению функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$.

Функция v должна удовлетворять условиям:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = 0, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} &v = 1 \text{ на характеристике } MP, \\ &v = 1 \text{ на характеристике } MQ \text{ (рис. 28).} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Будем искать v в виде

$$v = v(z), \tag{29}$$

где

$$z = \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2} \quad \text{или} \quad z^2 = (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2. \tag{30}$$

На характеристиках MP и MQ переменная z обращается в нуль, так что $v(0) = 1$. Далее, левая часть уравнения (27) преобразуется следующим образом:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = v''(z)(z_x^2 - z_y^2) + v'(z)(z_{xx} - z_{yy}) + c_1 v = 0.$$

Дифференцируя выражение для z^2 дважды, по x и y, получим:

$$zz_x = x - \xi,$$
$$zz_y = -(y - \eta),$$
$$zz_{xx} + z_x^2 = 1,$$
$$zz_{yy} + z_y^2 = -1.$$

Отсюда из формулы (30) находим:

$$z_x^2 - z_y^2 = 1, \quad z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{z}.$$

Уравнение для v принимает следующий вид:

$$v'' + \frac{1}{z} v' + c_1 v = 0$$

при условии $v(0) = 1$. Решением этого уравнения является функция Бесселя нулевого порядка (см. Дополнение, часть I, § 1)

$$v(z) = J_0(\sqrt{c_1} z)$$

или

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0(\sqrt{c_1 [(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2]}). \tag{31}$$

Воспользуемся теперь для нахождения $U(x, y)$ формулой (10), которая в нашем случае принимает вид

$$U(M) = \frac{U(P) + U(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q (vU_\eta \, d\xi - Uv_\eta \, d\xi) \quad (d\eta = 0). \tag{32}$$

Вычислим предварительно интеграл по отрезку PQ ($\eta = 0$):

$$\int_P^Q (vU_\eta - Uv_\eta) \, d\xi = \int_{x-y}^{x+y} \left\{ J_0\left(\sqrt{c_1 [(x-\xi)^2 - y^2]}\right) U_\eta(\xi, 0) - \right.$$
$$\left. - \frac{U(\xi, 0) \sqrt{c_1} y J_0'\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right)}{\sqrt{c_1 [(x-\xi)^2 - y^2]}} \right\} d\xi. \tag{33}$$

Пользуясь начальными условиями (22′, 23′), находим:

$$U(x, y) = \frac{\varphi_1(x-y) + \varphi_1(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right) \psi_1(\xi) d\xi -$$
$$- \frac{1}{2} \sqrt{c_1} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right) \varphi_1(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}}, \tag{34}$$

откуда в силу (24), (22′) и (23′) получаем формулу

$$u(x, y)=\frac{\varphi(x-y)e^{-\frac{a-b}{2}y}+\varphi(x+y)e^{\frac{a+b}{2}y}}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int_{x-y}^{x+y}\left\{\frac{b}{2}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{c_1}y\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\right\}e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\psi(\xi)\,d\xi, \quad (35)$$

дающую решение поставленной задачи.

Рассмотрим частный случай $a=0$, $b=0$, т. е. уравнение

$$u_{xx}-u_{yy}+cu=0.$$

Из формулы (35) сразу получаем:

$$u(x, y)=\frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\psi(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{c_1}y\int_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\varphi(\xi)\,d\xi. \quad (36)$$

Полагая здесь $c_1=0$ и $y=at$, приходим к формуле Даламбера

$$u(x, t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\bar{\psi}(\xi)\,d\xi, \quad (37)$$

дающей решение уравнения колебаний струны

$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$$

при начальных условиях

$$u(x, 0)=\varphi(x),$$

$$u_t(x, 0)=\bar{\psi}(x),$$

$$\bar{\psi}(x)=a\psi(x)=au_y(x, 0).$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

1. Решить задачу 1 из § 4, предполагая, что в начальный момент концентрация влаги постоянна вдоль всей трубы и на вход подается поток сухого воздуха.

2. Решить задачу 2 из § 4, считая, что начальная температура системы равна u_0, а температура на конце трубы все время поддерживается равной $v_0 > u_0$.

3. Решить систему телеграфных уравнений (см. § 1 (21)):

$$i_x + Cv_t + Gv = 0,$$
$$v_x + Li_t + Ri = 0$$

для бесконечной линии при начальных условиях

$$i(x, 0) = \varphi(x),$$
$$v(x, 0) = \psi(x).$$

Указание. Свести систему уравнений (§ 1 (21)) к уравнению 2-го порядка для одной из функций $i(x, t)$ или $v(x, t)$, например

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)\, i_t + GRi$$

с начальными условиями

$$i(x, 0) = \varphi(x),$$
$$\frac{\partial i}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i\right)_{t=0} = -\frac{1}{L}\psi'(x) - \frac{R}{L}\varphi(x) = \psi_0(x),$$

и воспользоваться затем формулой (35).

4. Исследовать решение телеграфного уравнения, полученное (формула (35)) для случая малых G и R. Рассмотреть предельный случай $G \to 0$, $R \to 0$ и получить из формулы (35) формулу Даламбера для решения уравнения колебаний струны.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ II

I. О колебании струн музыкальных инструментов

Колеблющаяся струна возбуждает колебания воздуха, воспринимаемые ухом человека как звук, издаваемый струной. Сила звука характеризуется энергией или амплитудой колебаний, тон — периодом колебаний, а тембр — соотношением энергий основного тона и обертонов [1]). Не останавливаясь на физиологических процессах восприятия звука и на процессе передачи звука по воздуху, мы будем характеризовать звук струны ее энергией, периодом и распределением энергии по обертонам.

В музыкальных инструментах обычно возбуждаются поперечные колебания струн. Различают три типа струнных инструментов: смычковые, щипковые и ударные. В ударных инструментах (например, рояль) колебание возбуждается ударом, придающим струне начальную скорость без начального отклонения. В щипковых инструментах (например, арфа, гитара) колебания возбуждаются приданием струне некоторого начального отклонения без начальной скорости.

Свободные колебания струны, возбуждаемой произвольным способом, могут быть представлены в виде (см. главу II, § 3)

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n}{l} x \qquad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right).$$

В качестве упражнения к § 3 была предложена задача 1, лежащая в основе простейшей теории возбуждения струн щипковых инструментов. Решение этой задачи показывает, что если начальное отклонение струны представлено в виде треугольника с высотой h в точке $x = c$ (рис. 29), то

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c\,(l-c)} \sin \frac{\pi n c}{l}, \qquad b_n = 0. \tag{1}$$

---

[1]) Рэлей, Теория звука, т. I, гл. VI, Гостехиздат, 1940.

Энергия n-й гармоники равна

$$E_n = \frac{1}{4}\rho l \omega_n^2 a_n^2 = Mh^2 \frac{l^2 a^2}{\pi^2 n^2 c^2 (l-c)^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \quad (M = \rho l) \qquad (2)$$

и убывает обратно пропорционально n^2.

В задаче 4 к § 3 рассматривается простейшая теория ударного возбуждения струны при помощи сосредоточенного в точке c удара с импульсом K. Решение этой задачи представляется в виде

$$u(x, t) = \frac{2K}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right), \qquad (3)$$

$$E_n = \frac{K^2}{M} \sin^2 \frac{\pi n c}{l}. \qquad (4)$$

Таким образом, при возбуждении струны ударом, сосредоточенным на небольшом интервале длины δ, энергии различных гармоник (для которых δ мало по сравнению с расстоянием между узлами) будут мало различаться между собой, и тон, издаваемый так возбужденной струной, насыщен обертонами. Это заключение легко проверяется экспериментально. Если натянутую струну (на монохорде) ударить лезвием ножа, то струна зазвенит: звук будет насыщен обертонами. В рояле струна возбуждается ударом молоточка, обтянутого кожей. Такое возбуждение струны можно представить при помощи следующих схем:

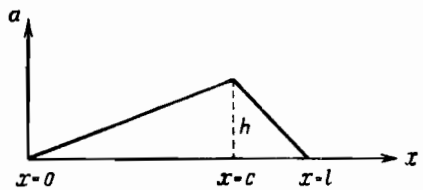


Рис. 29.

1. Струна возбуждается заданием постоянной начальной скорости v_0 на интервале $(c-\delta, c+\delta)$. Этот случай соответствует плоскому жесткому молоточку, имеющему ширину 2δ и ударяющему в точке c. Процесс колебаний описывается функцией (см. задачу 3 § 3)

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t,$$

и энергии отдельных гармоник равны

$$E_n = \frac{4Mv_0^2}{n^2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n \delta}{l}.$$

2. Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \dfrac{x-c}{\delta} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (x-c) < \delta, \\ 0 & (x-c) > \delta. \end{cases}$$

Этот случай соответствует жесткому выпуклому молоточку ширины 2δ. Такой молоточек в центре интервала 2δ возбуждает наибольшую начальную скорость, что схематически может быть описано приведенной выше функцией. Возбужденное таким образом колебание имеет вид (см. задачу 3 § 3)

$$u(x,\ t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\cos\frac{\pi n}{l}\delta\cdot\sin\frac{\pi n}{l}c}{1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\omega_n t$$

и энергии гармоник равны

$$E_n = \frac{16v_0^2\delta^2\rho}{l\pi^2}\cdot\frac{1}{\left[1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]^2}\cdot\cos^2\frac{\pi n\delta}{l}\cdot\sin^2\frac{\pi nc}{l}.$$

3. Молоточек, возбуждающий колебания струны, не является идеально жестким. В этом случае колебания определяются уже не начальной скоростью, а силой, меняющейся со временем. Таким образом, мы приходим к неоднородному уравнению с правой частью

$$F(x,\ t) = \begin{cases} F_0\cos\frac{x-c}{\delta}\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{\tau}, & \text{если } |x-c|<\delta,\ 0\leqslant t\leqslant\tau, \\ 0 & \text{если } |x-c|>\delta,\ t>\tau. \end{cases}$$

Решение этого уравнения для $t>\tau$ представляется в виде

$$u(x,\ t) = \frac{16F_0\tau\delta}{\pi^3\rho a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\cos\frac{\pi n\delta}{l}\cos\frac{\omega_n\tau}{2}\sin\frac{\pi nc}{l}}{\left[1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{na\tau}{l}\right)^2\right]}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\omega_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right).$$

Рассмотренные примеры показывают, что ширина интервала, по которому производится удар, и продолжительность времени удара имеют весьма существенное влияние на величину энергии высоких обертонов. Отметим, кроме того, что присутствие множителя $\sin\frac{\pi n}{l}c$ показывает, что если центр удара молоточка приходится на узел n-й гармоники, то энергия соответствующей гармоники равна нулю.

Наличие высоких обертонов (начиная с 7-го) нарушает гармоничность звука и вызывает ощущение диссонанса[1]). Наличие низких обертонов, наоборот, вызывает ощущение полноты звука. В рояле место удара молоточка выбирают близко от точки закрепления струны

[1]) Например, если основная частота (первая гармоника) в 440 колебаний в секунду соответствует «ля» первой октавы, то в семь раз бо́льшая частота соответствует «соль» четвертой октавы. Интервал ля — соль, так называемая малая септима, имеет неприятный для слуха, диссонирующий характер.

между узлами 7-го и 8-го обертонов, чтобы уменьшить их энергию. Регулируя ширину молоточка и его жесткость, стремятся увеличить относительную энергию низких (3-го и 4-го) обертонов. В старых конструкциях рояля, обладавших более резким, даже до некоторой степени звенящим тоном, пользовались узкими и жесткими молоточками.

II. О колебании стержней

В курсах методов математической физики основное место отводится уравнениям 2-го порядка. Однако большое число задач о колебаниях стержней, пластин и т. д. приводит к уравнениям более высокого порядка.

В качестве примера на уравнения 4-го порядка рассмотрим задачу о собственных колебаниях камертона, эквивалентную задаче о колебаниях тонкого прямоугольного стержня, зажатого одним концом в массивные тиски. Определение формы колебаний камертона и его частоты сводится к решению «уравнения поперечных колебаний стержня»

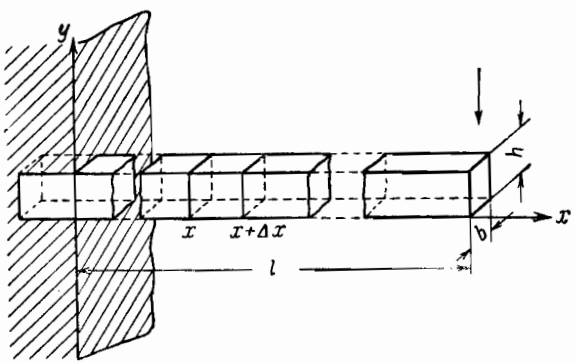


Рис. 30.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

К этому уравнению приходят во многих задачах о колебаниях стержней, при расчете устойчивости вращающихся валов, а также при изучении вибрации кораблей [1]).

Приведем элементарный вывод уравнения (1). Рассмотрим прямоугольный стержень длиной l ($0 \leqslant x \leqslant l$), высотой h и шириной b (рис. 30). Выделим элемент длины dx. После изгиба торцевые сечения выделенного элемента стержня, предполагаемые плоскими, образуют угол $d\varphi$. Если деформации малы, а длина оси стержня при

[1]) См., например, монографию А. Н. Крылова «Вибрация судов».

изгибе не меняется ($dl = dx$), то

$$d\varphi = \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_x - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+dx} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx.$$

Слой материала, отстоящий от оси стержня $y = 0$ на расстоянии η, изменяет свою длину на величину $\eta\,d\varphi$ (рис. 31). По закону Гука сила натяжения, действующая вдоль слоя, равна

$$dN = E \cdot b\,d\eta \cdot \frac{\eta\,d\varphi}{dx} = -E \cdot b\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\eta\,d\eta,$$

где E — модуль упругости материала стержня. Полный изгибающий момент сил, действующих в сечении x, равен

$$M = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\eta^2\,d\eta = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,J, \qquad (2)$$

где

$$J = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\eta^2\,d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

— момент инерции прямоугольного сечения относительно своей горизонтальной оси. Обозначим через $M(x)$ момент, действующий на правую часть стержня в каждом сечении. В сечении $x + dx$, очевидно, действует момент сил, равный $-(M + dM)$.

Избыточный момент — dM уравновешивается моментом тангенциальных сил

$$dM = F\,dx.$$

Отсюда в силу равенства (2) получаем величину тангенциальной силы

$$F(x,\ t) = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \qquad (3)$$

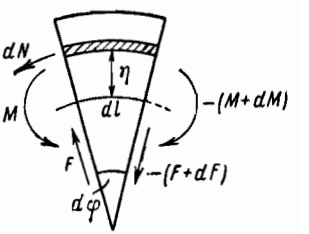


Рис. 31.

Приравняв действующую на элемент результирующую силу

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = -EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\,dx$$

произведению массы элемента на ускорение

$$\rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dx,$$

где ρ — плотность стержня, S — площадь поперечного сечения (при этом мы пренебрегаем вращательным движением при изгибе), получаем

уравнение поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \left(a^2 = \frac{EJ}{\rho S}\right). \tag{1}$$

Граничными условиями для заделанного конца $x = 0$ являются неподвижность стержня и горизонтальность касательной

$$y|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{4}$$

На свободном конце должны равняться нулю изгибающий момент (2) и тангенциальная сила (3), откуда следует, что

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=l} = 0. \tag{5}$$

Для того чтобы полностью определить движение стержня, нужно еще задать начальные условия — начальное отклонение и начальную скорость

$$y|_{t=0} = f(x) \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{6}$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1) с граничными условиями (4), (5) и с начальными условиями (6).

Будем решать задачу методом разделения переменных, полагая

$$y = Y(x)\,T(t). \tag{7}$$

Подставляя предполагаемую форму решения в (1), имеем:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = -\lambda.$$

Для функции $Y(x)$ получаем задачу о собственных значениях

$$Y^{(4)} - \lambda Y = 0, \tag{8}$$

$$Y|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d^2Y}{dx^2}\right|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{d^3Y}{dx^3}\right|_{x=l} = 0. \tag{9}$$

Общее решение уравнения (8) представляется в виде

$$Y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}\, x + B \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}\, x + C \cos \sqrt[4]{\lambda}\, x + D \sin \sqrt[4]{\lambda}\, x.$$

Из условий $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0$ находим $C = -A$, $D = -B$. Отсюда следует, что

$$Y(x) = A(\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}\, x - \cos \sqrt[4]{\lambda}\, x) + B(\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}\, x - \sin \sqrt[4]{\lambda}\, x).$$

Условия $Y''(l) = 0$ и $Y'''(l) = 0$ дают:

$$A(\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}\, l + \cos \sqrt[4]{\lambda}\, l) + B(\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}\, l + \sin \sqrt[4]{\lambda}\, l) = 0,$$

$$A(\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}\, l - \sin \sqrt[4]{\lambda}\, l) + B(\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}\, l + \cos \sqrt[4]{\lambda}\, l) = 0.$$

Эта однородная система имеет нетривиальные решения A и B, если определитель системы равен нулю. Приравнивая этот определитель нулю, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений

$$\operatorname{sh}^2 \sqrt[4]{\lambda} l - \sin^2 \sqrt[4]{\lambda} l = \operatorname{ch}^2 \sqrt[4]{\lambda} l + 2 \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} l \cos \sqrt[4]{\lambda} l + \cos^2 \sqrt[4]{\lambda} l.$$

Так как $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, то это уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{ch} \mu \cdot \cos \mu = -1 \qquad (\mu = \sqrt[4]{\lambda} l). \tag{10}$$

Корни уравнения (10) без труда вычисляются, например, графически [1])

$$\begin{gathered} \mu_1 = 1{,}875, \\ \mu_2 = 4{,}694, \\ \mu_3 = 7{,}854, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{gathered}$$

$$\mu_n \approx \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad \text{при} \quad n > 3.$$

Последняя формула дает значение μ_n с точностью до трех десятичных знаков, начиная с $n = 3$, и с точностью до шестого знака для $n \geqslant 7$.

Рассмотрим теперь частоты колебаний камертона. Уравнению

$$T'' + a^2 \lambda_n T = 0$$

удовлетворяют тригонометрические функции

$$T_n(t) = a_n \cos 2\pi \nu_n t + b_n \sin 2\pi \nu_n t$$

с частотой

$$\nu_n = \frac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}.$$

Частоты ν_n собственных колебаний относятся как квадраты μ_n. Так как

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6{,}267, \qquad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17{,}548,$$

то второй собственный тон выше основного тона более чем на две с половиной октавы, т. е. выше шестой гармоники струны при равном основном тоне, третье же собственное колебание выше основного тона более чем на четыре октавы. Например, если камертон имеет основную частоту в 440 колебаний в секунду (принятый стандарт для a' — ноты *ля* первой октавы), то следующая собственная частота

---

[1]) О вычислении корней уравнения (10) см. Рэлей, Теория звука, т. I, гл. VIII, 1940.

камертона будет равна 2757,5 колебания в секунду (между $c''' = 2637{,}3$ и $f''' = 2794{,}0$ — между нотами *ми* и *фа* четвертой октавы равномерно-темперированной гаммы), третья же собственная частота в 7721,1 колебания в секунду уже выходит за пределы шкалы собственно музыкальных звуков.

При возбуждении колебаний камертона ударом присутствует не только первая, но и высшие гармоники, чем и объясняется металлический звук в начальный момент. Однако с течением времени высшие гармоники быстро затухают и камертон издает чистый звук основного тона.

III. Колебания нагруженной струны

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о колебаниях закрепленной на концах струны $(0, l)$, в нескольких точках которой $x = x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ помещены сосредоточенные массы M_i.

Условия в точке x_i можно получить двумя способами. Если в точке $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ приложена сосредоточенная сила $F_i(t)$, то должны выполняться соотношения

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \tag{1}$$

$$ku_x\big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \tag{2}$$

В данном случае под F_i следует понимать силу инерции. Подставляя в формулу (2)

$$F_i = -M_i u_{tt}(x_i, t),$$

получим:

$$M_i u_{tt}(x_i, t) = ku_x\big|_{x_i-0}^{x_i+0}. \tag{3}$$

Возможен и другой вывод условия (3). Распределим массу M_i на участке $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ с постоянной плотностью δ_i и воспользуемся уравнением колебаний для неоднородной струны

$$(\rho + \delta_i) u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \tag{4}$$

где ρ — плотность струны. Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ — решение этого уравнения.

Интегрируя уравнение (4) по x в пределах от $x_i - \varepsilon$ до $x_i + \varepsilon$ и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим условие (3) для функции $u(x, t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t)$. На обосновании предельного перехода мы не останавливаемся.

Формулируем полностью нашу задачу:

найти решение уравнения колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{5}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t) &= 0, \\ u(l,\ t) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

условиям сопряжения в точках $x = x_i$

$$\left.\begin{aligned} &u(x_i - 0,\ t) = u(x_i + 0,\ t), \\ &M_i u_{tt}(x_i,\ t) = k u_x \big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

2. Собственные колебания нагруженной струны. Остановимся, прежде всего, на исследовании собственных частот и профилей стоячих волн для нагруженной струны. Для этого мы должны найти решение поставленной задачи, представляемое в виде произведения

$$u(x,\ t) = X(x)\,T(t). \tag{9}$$

Подставляя это выражение в уравнение (5) и пользуясь граничными условиями, получим после разделения переменных

$$T'' + \lambda T = 0 \tag{10}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(kX') + \lambda \rho X = 0, \\ &X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Условия сопряжения дают:

$$X(x_i - 0) = X(x_i + 0),$$
$$M_i X(x_i)\,T'' = kX' \big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} T.$$

Принимая во внимание уравнение (10), перепишем последнее соотношение в виде

$$kX' \big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} = -\lambda M_i X(x_i).$$

Таким образом, для функции $X(x)$ мы получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{d}{dx}(kX') + \lambda \rho X = 0, \tag{11}$$

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &X(x_i - 0) = X(x_i + 0) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \\ &kX'(x_i + 0) - kX'(x_i - 0) + \lambda M_i X(x_i) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Отличительной особенностью рассматриваемой краевой задачи является то, что параметр λ входит не только в уравнение, но и в дополнительные условия.

Выведем условия ортогональности собственных функций

$$X_1(x), \quad X_2(x), \ldots$$

Как было показано в главе II (см. § 3), собственные функции для краевой задачи

$$\frac{d}{dx}(kX') + \lambda\rho X = 0,$$
$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

ортогональны с весом ρ на интервале $(0, l)$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n). \tag{14}$$

Распределяя каждую массу M_i с постоянной плотностью δ_i на некотором интервале $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малое число, мы придем к задаче о собственных колебаниях неоднородной струны с плотностью $\rho_\varepsilon(x)$. Пусть $\lambda_{\varepsilon n}$ и $\{X_{\varepsilon n}(x)\}$ — собственные значения и собственные функции этой задачи, для которых должно выполняться условие ортогональности

$$\int_0^l X_{\varepsilon m}(x) X_{\varepsilon n}(x) \rho_\varepsilon(x)\, dx = 0. \tag{15}$$

Выделяя в равенстве (15) интегралы по участкам $(x_i - \varepsilon, \ x_i + \varepsilon)$ и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, мы получим соотношение

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} M_i X_m(x_i) X_n(x_i) = 0 \quad (m \neq n), \tag{16}$$

называемое условием ортогональности с нагрузкой [1]).

Мы снова оставляем в стороне вопрос о возможности такого перехода.

Условие ортогональности (16) может быть получено и чисто формальным путем из уравнения и условий (11) — (13). Пусть $X_m(x)$ и $X_n(x)$ — собственные функции задачи (1), соответствующие собственным значениям λ_m и λ_n, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX_m}{dx}\right) + \lambda_m \rho X_m = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX_n}{dx}\right) + \lambda_n \rho X_n = 0.$$

---

[1]) Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. VI, 1951.

Умножим первое уравнение на $X_n(x)$, второе — на $X_m(x)$ и вычтем из первого результата второй. Интегрируя полученное равенство последовательно по участкам $(0, x_1)$; (x_1, x_2); ...; (x_k, l) и складывая, будем иметь:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx - \\ - \sum_{i=0}^{k}\int_{x_i}^{x_i+1} \frac{d}{dx}[X_m kX_n' - X_n kX_m']\,dx = 0, \quad (17)$$

причем мы полагаем $x_0 = 0$, $x_{k+1} = l$. Выполняя интегрирование в каждом из слагаемых суммы и объединяя члены, соответствующие подстановкам $x = x_i - 0$ и $x = x_i + 0$, получим сумму слагаемых вида

$$A_i = (X_m kX_n' - X_n kX_m')_{x=x_i-0} - (X_m kX_n' - X_n kX_m')_{x=x_i+0}.$$

При этом подстановки при $x = 0$ и $x = l$ в силу граничных условий обращаются в нуль.

Дли вычисления A_i воспользуемся условиями сопряжения

$$\left.\begin{aligned} X_j(x_i - 0) &= X_j(x_i + 0), \\ kX_j'(x_i + 0) - kX_j'(x_i - 0) &= -M_i\lambda_j X_j(x_i) \end{aligned}\right\} \quad (j = m,\ n). \quad (13')$$

Переписывая A_i в виде

$$A_i = X_m(x_i)\,[kX_n'(x_i - 0) - kX_n'(x_i + 0)] - \\ - X_n(x_i)\,[kX_m'(x_i - 0) - kX_m'(x_i + 0)]$$

и пользуясь формулой (13), находим:

$$A_i = X_m(x_i)\,M_i\lambda_n X_n(x_i) - X_n(x_i)\,M_i\lambda_m X_m(x_i) = \\ = M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\,(\lambda_n - \lambda_m).$$

Теперь равенство (17) можно написать в виде

$$(\lambda_m - \lambda_n)\left\{\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\right\} = 0.$$

Если $\lambda_m \neq \lambda_n$, то отсюда сразу же следует условие ортогональности с нагрузкой (16).

Норма собственных функций $X_n(x)$ определяется по формуле

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x)\,\rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i X_n^2(x_i). \quad (18)$$

Мы не будем здесь останавливаться на доказательствах существования бесчисленного множества собственных значений и собственных функций, положительности собственных значений, теоремы разложимости. Эта краевая задача, так же как и задачи обычного типа, рассмотренные нами в § 3 главы II, сводится к некоторому интегральному уравнению, которое в данном случае является *нагруженным* интегральным уравнением и эквивалентно интегральному уравнению в интегралах Стильтьеса.

Очевидно, что при разложении некоторой функции $f(x)$ в ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$$

коэффициенты разложения будут определяться по формуле

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x)\, X_n(x)\, \rho(x)\, dx + \sum_{i=1}^{k} M_i f(x_i)\, X_n(x_i)}{N_n}. \qquad (19)$$

Задача с начальными условиями, поставленная в п. 1, решается по обычной схеме метода разделения переменных. Аналогично рассматривается задача о колебании стержня (или балки) при наличии сосредоточенных масс.

Задача о колебаниях струны, нагруженной сосредоточенными массами, находит широкое применение в физике и технике. Еще Пуассон решал задачу о продольном движении груза, подвешенного к упругой нити. А. Н. Крылов показал [1]), что к этой задаче сводится теория индикатора паровой машины, крутильных колебаний вала с маховиком на конце, разного рода «дрожащих» клапанов и т. д. Для теории многих измерительных приборов важно изучение крутильных колебаний нити, к концу которой подвешена масса (например, зеркальце).

Особую актуальность задача подобного типа приобрела в связи с изучением устойчивости вибраций крыльев самолета. Для решения этой задачи необходимо вычисление собственных частот крыла (балки переменного сечения), нагруженного массами (моторы). Кроме того, рассматриваемая задача встречается при расчете собственных колебаний антенн, нагруженных сосредоточенными емкостями и самоиндукциями (в связи с этим см. приложение, посвященное аналогии между механическими и электромагнитными колебаниями).

Мы не останавливаемся здесь на приближенных методах нахождения собственных значений и функций задачи, аналогичных приближенным методам нахождения соответствующих величин для неоднородной струны.

---

[1]) А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, гл. VII, изд. АН СССР, 1932.

3. Струна с грузом на конце. Значительный практический интерес представляет задача о колебаниях однородной струны, один конец которой ($x = 0$) закреплен, а ко второму концу ($x = l$) прикреплен груз массы M.

В этом случае условие при $x = l$ принимает вид

$$Mu_{tt} = -ku_x(l, t)$$

и для амплитуды стоячих волн получается уравнение

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

с граничными условиями

$$X_n(0) = 0, \qquad X_n'(l) = \frac{M}{\rho}\lambda_n X_n(l).$$

Отсюда находим

$$X_n(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}x}{\sin \sqrt{\lambda_n}l},$$

где λ_n определяется из уравнения

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_n}l = \frac{M}{\rho}\sqrt{\lambda_n}. \tag{20}$$

Условие ортогональности функций $\{X_n(x)\}$ принимает вид

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho(x)\, dx + MX_n(l) X_m(l) = 0.$$

Вычислим норму

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x)\, \rho\, dx + MX_n^2(l).$$

Используя уравнение (20), получаем:

$$N_n = \frac{l\rho}{2} + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{2\rho}\lambda_n l.$$

Задача с начальными данными решается обычным методом.

4. Поправки для собственных значений. Вычислим поправки для собственных частот в случае больших и малых нагрузок M. Для простоты рассмотрим тот случай, когда груз подвешен к концу струны. Возможны два предельных случая.

1. $M = 0$. Конец $x = l$ свободен. Собственные значения определяются из формулы

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l}.$$

2. $M = \infty$. Конец $x = l$ жестко закреплен: $u(l, t) = 0$. Собственные значения определяются из формулы

$$\sqrt{\lambda_n^{(2)}} = \frac{\pi n}{l}.$$

Нас будет интересовать случай малых M ($M \to 0$) и больших M ($M \to \infty$).

1° M мало. Найдем поправку к собственному значению $\lambda_n^{(1)}$, полагая

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(1)}} + \varepsilon M, \tag{21}$$

где ε — некоторое число. Подставляя (21) в уравнение (20) и пренебрегая M^2 и более высокими степенями M, получим:

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)}\left(1 - \frac{2M}{\rho l}\right), \tag{22}$$

т. е. собственные частоты нагруженной струны при $M \to 0$ возрастают, приближаясь к собственным частотам струны со свободным концом.

2° M велико. Выбирая $\frac{1}{M}$ в качестве параметра малости, положим:

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \varepsilon \frac{1}{M}.$$

Уравнение (20) дает:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_n^{(2)} l}}.$$

При этом мы пренебрегли членами, содержащими $\frac{1}{M^2}$ и более высокие степени $\frac{1}{M}$.

Таким образом,

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(2)} l}} \frac{\rho}{M}, \qquad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Ml}, \tag{23}$$

т. е. при увеличении нагрузки собственные частоты убывают, равномерно приближаясь к собственным частотам струны с закрепленными концами.

IV. Уравнения газодинамики и теория ударных волн

1. Уравнения газодинамики. Закон сохранения энергии. Уравнения акустики (см. § 1) были получены в предположении малости скоростей движения газа и малых изменений давления, что позволило линеаризовать уравнения гидродинамики.

В задачах, возникающих при изучении полета ракет и скоростных самолетов, в теории баллистики, взрывных волн и т. п., приходится иметь дело с гидродинамическими процессами, характери-

зующимися большими скоростями и градиентами давлений. В этом случае линейное приближение акустики непригодно и необходимо пользоваться нелинейными уравнениями гидродинамики. Поскольку с такого рода движениями на практике приходится встречаться для газов, то принято о гидродинамике больших скоростей говорить как о газовой динамике или *газодинамике*.

Уравнения газодинамики в случае одномерного движения газа (в направлении оси x) имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \qquad \text{(уравнение непрерывности)}, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{(уравнение движения)}, \tag{2}$$

$$p = f(\rho, T) \qquad \text{(уравнение состояния)}. \tag{3}$$

Таким образом, уравнения газодинамики представляют собой уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил.

Перейдем теперь к выводу закона сохранения энергии. Энергия единицы объема равна

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon, \tag{4}$$

где первый член есть кинетическая энергия, второй — внутренняя энергия. Здесь ε, очевидно, обозначает *внутреннюю энергию* единицы массы.

Для идеального газа $\varepsilon = c_v T$, где c_v — теплоемкость при постоянном объеме, T — температура. Вычислим изменение энергии в единицу времени

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon). \tag{5}$$

Производя дифференцирование в первом слагаемом и пользуясь уравнениями (1) и (2), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) - \rho v \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) - v \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{6}$$

Для преобразования производной $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon)$ обратимся к первому началу термодинамики, выражающему закон сохранения энергии

$$dQ = d\varepsilon + p\, d\tau, \tag{7}$$

где dQ — количество тепла, получаемое (или отдаваемое) системой извне, $p\, d\tau$ — работа, затрачиваемая при изменении объема на величину $d\tau$ $\left(\tau = \frac{1}{\rho}\right.$ — удельный объем$\left.\right)$.

Если процесс адиабатический (теплообмена со средой нет), то

$$dQ = 0$$

и

$$d\varepsilon = -pd\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2}\,d\rho. \tag{8}$$

Пользуясь этим равенством, будем иметь:

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = \varepsilon\,d\rho + \frac{p}{\rho}\,d\rho = w\,d\rho, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) = w\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{10}$$

где

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \tag{11}$$

— *тепловая функция* или теплосодержание единицы массы.

Производная $\frac{\partial w}{\partial x}$ в силу соотношений (9) и (11) удовлетворяет уравнению

$$\rho v\frac{\partial w}{\partial x} = v\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{12}$$

Учитывая равенства (2), (5), (6), (10), (12), получаем закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right]. \tag{13}$$

Для выяснения физического смысла этого равенства проинтегрируем его по некоторому объему (x_1, x_2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)dx = -\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Слева стоит изменение энергии в единицу времени на интервале (x_1, x_2), справа — поток энергии, вытекающей в единицу времени из рассматриваемого объема.

Если эффектом теплопроводности нельзя пренебречь, то уравнение сохранения энергии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right) - \varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right], \tag{14}$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

2. Ударные волны. Условия динамической совместности. В случае больших скоростей возможны такие движения, при которых на некоторых поверхностях, перемещающихся в пространстве, возникают разрывы непрерывности в распределении гидродинамических величин

(давления, скорости, плотности и др.). Эти разрывы принято называть *ударными волнами*.

На поверхности разрыва (*фронте ударной волны*) должны выполняться условия непрерывности потока вещества, энергии и количества движения (*условия Гюгонио*). Перейдем к выводу этих условий.

Преобразуем уравнение (2) к более удобному для наших целей виду. Умножая (1) на v и складывая с (2), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2). \tag{2'}$$

Перепишем теперь уравнения непрерывности, движения и сохранения энергии в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v), \tag{1'}$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2), \tag{2'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right]. \tag{13}$$

Рассмотрим на плоскости (x, t) линию $x = \alpha(t)$, являющуюся «следом» поверхности разрыва на плоскости (x, t). Пусть AC — некоторая дуга линии разрыва $x = \alpha(t)$, где A и C — точки с координатами x_1, t_1 и $x_2 = x_1 + \Delta x$; $t_2 = t_1 + \Delta t$ соответственно. Построим прямоугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными координатным осям.

Запишем закон сохранения вещества в интегральной форме

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho)_{t_2} - (\rho)_{t_1}]\, dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1}]\, dt, \tag{15}$$

где слева стоит изменение массы на интервале (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2), а справа — количество вещества, вытекающего из интервала (x_1, x_2) за время (t_1, t_2). Если функции ρ и ρv непрерывны и дифференцируемы всюду внутри $ABCD$, то уравнение (15) эквивалентно уравнению (1'). В рассматриваемом случае это не имеет места.

Воспользуемся теоремой среднего значения для каждого слагаемого в отдельности

$$[(\rho)_{t=t_2} - (\rho)_{t=t_1}]\,\frac{\Delta x}{\Delta t} = -(\rho v)_{\substack{x=x^* \\ t=t^*}} + (\rho v)_{\substack{x=x_1 \\ t=t^{**}}},$$

где x^*, x^{**}, t^*, t^{**} — средние значения аргументов x и t.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ $(x_2 \to x_1)$ и $\Delta t \to 0$ $(t_2 \to t_1)$ и обозначая индексом 1 значения функций выше кривой $x = \alpha(t)$ (сзади фронта ударной волны), а индексом 2 — значения функций ниже этой кривой (перед фронтом), получаем:

$$(\rho_2 - \rho_1)\, U = -(\rho v)_1 + (\rho v)_2, \tag{16}$$

где

$$U = \frac{da}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

— скорость ударной волны.

В системе координат, движущейся вместе с ударной волной,

$$u_1 = U - v_1, \quad u_2 = U - v_2$$

обозначают скорости частиц перед фронтом и, соответственно, сзади фронта ударной волны. Полученное выше соотношение (16) можно переписать в виде

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \tag{16'}$$

Это равенство выражает непрерывность потока вещества через фронт ударной волны.

Записывая в интегральной форме закон сохранения количества движения, имеем:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho v)_{t_2} - (\rho v)_{t_1}]\, dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(p + \rho v^2)_{x_2} - (p + \rho v^2)_{x_1}]\, dt,$$

где справа стоит сумма импульса действующих сил (давления) и потока количества движения. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$, получаем закон сохранения потока количества движения на фронте

$$U[(\rho v)_2 - (\rho v)_1] = -(p + \rho v^2)_1 + (p + \rho v^2)_2$$

или

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \tag{17}$$

Аналогично получается также уравнение сохранения энергии на фронте

$$\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_2 U - \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_1 U = -\rho_1 v_1 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_1 + \rho_2 v_2 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_2,$$

которое после несложных преобразований принимает вид

$$\rho_1 u_1 \left(w_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) = \rho_2 u_2 \left(w_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)$$

или в силу условия (16)

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \tag{18}$$

Таким образом, на фронте ударной волны должны выполняться уравнения (*условия динамической совместности* или *условия Гюгонио*)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \tag{16'}$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \tag{17}$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \tag{18}$$

Из первых двух уравнений (16) и (17) выразим u_1 и u_2 через p и ρ:

$$u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2}; \quad u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

откуда

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}(p_1 - p_2).$$

Подставляя затем это выражение в уравнение (18), находим соотношение между значениями энергии по обе стороны фронта

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2}(\rho_1 + \rho_2)(p_1 - p_2)$$

и

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2}(\rho_1 - \rho_2)(p_1 + p_2).$$

Рассмотрим идеальный газ, для которого

$$p = R\rho T; \quad \varepsilon = c_v T; \quad w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

т. е.

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \tag{19}$$

Пользуясь формулой (19), после несложных преобразований приходим к так называемому уравнению *адиабаты Гюгонио*

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_1} \tag{20}$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1)\rho_2 - (\gamma - 1)\rho_1}{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_2}. \tag{21}$$

По этой формуле можно определить одну из величин p_1, ρ_1, p_2, ρ_2, если известны три остальные величины.

Ударная волна всегда движется относительно газа от областей с бо́льшим давлением к областям с меньшим давлением: $p_2 > p_1$ (*теорема Цемплена*). Отсюда следует, что плотность газа за фронтом больше плотности перед фронтом.

Формула (20) выражает зависимость между p_2 и ρ_2 при заданных p_1 и ρ_1. Функция $\rho_2 = \rho_2(p_2)$ при заданных p_1 и ρ_1 является монотонно возрастающей функцией, стремящейся к конечному пределу при $\frac{p_2}{p_1} \to \infty$ (ударная волна большой амплитуды)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \tag{22}$$

Эта формула показывает максимальный скачок плотности (уплотнение), который может существовать на фронте ударной волны. Для

двухатомного газа $\gamma = \frac{7}{5}$ и максимальное уплотнение равно 6

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6.$$

Пользуясь равенствами (16′, 17 и 20) и полагая $p_1 = 0$, находим:

$$u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}; \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

Если ударная волна движется по покоящемуся газу ($v_1 = 0$), то скорость распространения ударной волны равна

$$U = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}},$$

т. е. она растет пропорционально квадратному корню из p_2.

Рассмотрим простейшую задачу теории ударных волн, допускающую аналитическое решение. В цилиндрической трубе $x > 0$, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой ($x = 0$), находится покоящийся газ с постоянной плотностью ρ_1 и при постоянном давлении p_1. В начальный момент $t = 0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x. Перед поршнем возникает ударная волна, которая в начальный момент совпадает с поршнем, а затем удаляется от него со скоростью $U > v$. Между поршнем и фронтом ударной волны возникает область 2, в которой газ движется со скоростью поршня. Перед фронтом (область 1) газ находится в невозмущенном состоянии: $\rho = \rho_1$, $p = p_1$, ($v = 0$).

Пользуясь условиями на фронте (16), (17) и (18), нетрудно определить скорость фронта, а также величину скачка, плотности и давления.

Введем безразмерные величины

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \tilde{U} = \frac{U}{c_1}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{c_1}; \quad \tilde{p} = \frac{\gamma p_2}{\rho_1 c_1^2}, \tag{23}$$

где $c_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}$ — скорость звука перед фронтом (в невозмущенной области 1). Тогда уравнения сохранения запишутся в виде

$$\omega \tilde{U} = \tilde{U} - \tilde{v} \quad \text{или} \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{v}}{1-\omega}, \tag{24}$$

$$\tilde{p} = 1 + \gamma \tilde{U} \tilde{v} \quad \text{или} \quad \tilde{p} = 1 + \gamma \frac{\tilde{v}^2}{1-\omega}, \tag{25}$$

$$\tilde{p}\omega = 1 + (\gamma - 1)\left(\tilde{U}\tilde{v} - \frac{1}{2}\tilde{v}^2\right). \tag{26}$$

Исключая отсюда $\tilde{p}$ и $\tilde{U}$, получаем квадратное уравнение для определения ω:

$$2\omega^2 - \omega[4 + (\gamma+1)\tilde{v}^2] + [2 + (\gamma-1)\tilde{v}^2] = 0. \tag{27}$$

Так как по смыслу $\omega < 1$; $(\rho_2 > \rho_1)$, то выбираем меньший корень

$$\omega_2 = 1 + \frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2 - \tilde{v}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{28}$$

Из уравнений (24) и (28) находим:

$$\tilde{U} = \frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v} + \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}, \tag{29}$$

$$\tilde{p} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2 + \gamma\tilde{v}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{30}$$

Возвращаясь к прежним величинам, получаем:

$$\rho_2 = \rho_1 = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{4}\cdot\frac{v^2}{c_1^2} + \frac{v}{c_1}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}\cdot v^2}}{1 + \frac{(\gamma-1)v^2}{2c_1^2}}, \tag{31}$$

$$U = \frac{\gamma+1}{4}v + c_1\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}, \tag{32}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \left\{1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\frac{v^2}{c_1^2} + \frac{\gamma v}{c_1}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}\right\}. \tag{33}$$

Так как скорость ударной волны постоянна, то для положения фронта в момент t будем иметь:

$$x = a(t) = \left\{\frac{(\gamma+1)}{4}v + c_1\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}\right\}t. \tag{34}$$

В предельном случае $\frac{v}{c_1} \gg 1$ (ударная волна большой интенсивности) из формул (31) — (33) находим предельные соотношения

$$\rho_2 = \rho_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1}; \qquad U = \frac{\gamma+1}{2}v; \qquad p_2 = p_1\cdot\frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\cdot\frac{v^2}{c_1^2},$$

полученные нами ранее.

Если $\frac{v}{c_1} \ll 1$ (волна малой интенсивности), то можно пренебречь членами $\frac{v^2}{c_1^2}$:

$$\rho_2 = \rho_1\left(1 + \frac{v}{c_1}\right),$$

$$U = c_1 + \frac{(\gamma+1)}{4}v,$$

$$p_2 = p_1\left(1 + \frac{\gamma v}{c_1}\right).$$

3. Слабые разрывы. Выше было рассмотрено движение ударной волны, на фронте которой величины ρ, p, v и другие испытывают скачки. Такого рода разрывы называются *сильными*.

Возможны и такие движения, при которых на некоторой поверхности испытывают скачок первые производные величин ρ, p, v и других, в то время как сами эти величины остаются непрерывными. Такие разрывы называются *слабыми*.

В § 2, п. 8 рассмотрено движение разрывов такого рода и установлено, что эти разрывы распространяются вдоль характеристик. При этом мы исходили из уравнения акустики. Однако и для нелинейных задач газодинамики справедлив аналогичный результат.

Нетрудно убедиться в том, что поверхность слабого разрыва распространяется относительно газа со скоростью, равной локальной скорости звука. В самом деле, выделим малую окрестность поверхности слабого разрыва и возьмем средние значения гидродинамических величин в этой окрестности. Слабый разрыв, очевидно, можно рассматривать на фоне средних значений как малое возмущение, которое удовлетворяет уравнению акустики и должно распространяться с локальной скоростью звука.

В качестве примера рассмотрим истечение газа в вакуум (волна разрежения). Пусть в начальный момент $t=0$ газ, заполняющий полупространство $x>0$, покоится и имеет постоянные значения плотности ρ и давления p_0 во всей области $x>0$. При $t=0$ внешнее давление, приложенное к плоскости $x=0$, снимается, и газ начинает двигаться; при этом возникает слабый разрыв (*волна разрежения*), распространяющийся со скоростью звука c_0 в положительном направлении оси x. На переднем фронте газа $x=x_1(t)$ при $t=0$ мы имеем разрыв плотности и давления. Однако этот разрыв сразу же после начала движения исчезает.

В самом деле, из условий непрерывности потоков вещества и количества движения при $x=x_1(t)$

$$0=\rho_1^-(v_1-v_1^-)=\rho_1^+(v_1-v_1^+),$$

$$p_1^-+\rho_1^-(v_1-v_1^-)^2=p_1^++\rho_1^+(v_1-v_1^+)^2,$$

где ρ_1^-, p_1^-, v_1^- — значения слева в точке $x_1(t)$, ρ_1^+, p_1^+, v_1^+ — значения справа в точке $x_1(t)$, получаем

$$p_1^+=0 \text{ и } \rho_1^+=0,$$

так как

$$\rho_1^-=p_1^-=v_1^-=0.$$

Для адиабатического процесса уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma. \tag{35}$$

Решение задачи будем искать в форме

$$\rho = \rho(\xi);\ p = p(\xi);\ v = v(\xi),$$

где

$$\xi = \frac{x}{t}.$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{t}\,\xi\,\frac{df}{d\xi};\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t}\,\frac{df}{d\xi},$$

где $f = \rho$, v или p, и подставляя результаты в уравнения (1) и (2), получим:

$$\left.\begin{aligned}(v-\xi)\frac{d\rho}{d\xi} &= -\rho\frac{dv}{d\xi},\\ (v-\xi)\rho\frac{dv}{d\xi} &= \frac{dp}{d\xi}.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Умножим первое уравнение на $(v-\xi)$ и сложим со вторым:

$$(v-\xi)^2\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{dp}{d\xi}$$

или

$$\frac{dp}{d\rho} = (v-\xi)^2.$$

Отсюда имеем:

$$v - \xi = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \pm c,$$

где c — скорость звука при адиабатическом процессе.

Поскольку мы рассматриваем движение слабого разрыва в положительном направлении оси x, надо выбрать в предыдущей формуле знак —, т. е.

$$v - \xi = -c. \tag{37}$$

Подставляя это решение в уравнения (36), получаем:

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{c}{\rho} \tag{38}$$

или, что одно и то же,

$$\frac{dv}{dp} = \frac{1}{\rho c}.$$

Пользуясь уравнением состояния (35), находим:

$$c^2 = \gamma\frac{p}{\rho}$$

и после интегрирования уравнения (38)

$$v = \frac{2}{\gamma-1}\cdot c_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1\right]. \tag{39}$$

Из последней формулы можно выразить ρ через v:

$$\rho = \rho_0\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \tag{40}$$

Здесь

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

обозначает скорость звука при $v = 0$ (в покоящемся газе). Формулу (39) можно также переписать в виде

$$v = \frac{2}{\gamma-1}(c - c_0). \tag{41}$$

Подставляя выражение (40) для ρ в уравнение состояния (35), находим:

$$p = p_0\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{42}$$

Из уравнений (41) и (37) получаем формулу

$$v = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t} - c_0\right), \tag{43}$$

определяющую зависимость v от x и t. Подставляя затем выражение (43) для v в формулы (40) и (42), получим зависимость ρ и p от x и t в явной форме. Все величины оказываются зависящими от $\frac{x}{t}$. Если измерять расстояния в единицах, пропорциональных t, то картина движения не меняется. Такое движение называется *автомодельным*.

Найдем скорость движения переднего фронта $v_1(t)$. Полагая в равенстве (42) $p = 0$, будем иметь:

$$v_1 = -\frac{2}{\gamma-1}c_0. \tag{44}$$

Отсюда следует, что скорость истечения газа в пустоту конечна. Для двухатомных газов $\gamma = \frac{7}{5}$ и

$$v_1 = -5c_0.$$

Выражение (44) для скорости левого фронта $x = x_1(t)$ можно получить также из уравнения баланса вещества

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho\, dx = \rho_0 x_2 = \rho_0 c_0 t. \tag{45}$$

Вводя переменную

$$\xi = \frac{x}{t},$$

получим:

$$\int_{v_1}^{c_0} \rho \, d\xi = \rho_0 c_0.$$

Подставляя затем выражение для ρ из (40) и полагая

$$1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{\xi - c_0}{c_0} = \lambda,$$

будем иметь:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{\frac{2}{\gamma - 1}} d\lambda = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \tag{46}$$

где

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

После вычисления интеграла (46) получим:

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

т. е.

$$\lambda_1 = 0,$$

откуда и следует:

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}.$$

Задача об истечении газа в вакуум решена.

Мы ограничились выше рассмотрением лишь наиболее простых задач газодинамики. За более подробным ознакомлением с затронутыми здесь вопросами отсылаем читателя к специальной литературе [1]).

V. Динамика сорбции газов

1. Уравнения, описывающие процесс сорбции газа. Рассмотрим задачу о поглощении (*сорбции*) газа [2]). Пусть через трубку (ось которой мы выберем за координатную ось x), заполненную поглощающим

---

[1]) См. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II, гл. I, Гостехиздат, 1948; Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, гл. VII, Гостехиздат, 1944; Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, изд. АН СССР, 1946; Л. И. Седов, Распространение сильных взрывных волн, Прикладная математика и механика, т. X, вып. 2, 1946.

[2]) А. Н. Тихонов, А. А. Жуховицкий и Я. Л. Забежинский, Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала, ЖФХ, **20**, вып. 10, 1946.

веществом (сорбентом), пропускается газовоздушная смесь. Обозначим через $a(x, t)$ количество газа, поглощенного единицей объема сорбента, а через $u(x, t)$ — концентрацию газа, находящегося в порах сорбента в слое x.

Напишем уравнение баланса вещества, предполагая, что скорость v достаточно велика и процесс диффузии не играет существенной роли в переносе газа. Рассмотрим слой сорбента от x_1 до x_2 в течение промежутка времени от t_1 до t_2. Очевидно, для него можно написать уравнение баланса вещества

$$[vu|_{x_1} - vu|_{x_2}] S \Delta t = [(a+u)|_{t_2} - (a+u)|_{t_1}] S \Delta x, \tag{1}$$

которое после сокращения на $\Delta x \Delta t$ и перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ $\Delta t \to 0$ принимает вид

$$-v\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(a+u). \tag{2}$$

Левая часть этого уравнения представляет количество газа, накопляющегося за счет переноса, рассчитанное на единицу длины и времени, правая часть — количество газа, израсходованного на повышение концентрации сорбированного газа и газа, находящегося в порах. К этому уравнению баланса следует присоединить уравнение кинетики сорбции

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - y), \tag{3}$$

где β — так называемый кинетический коэффициент, y — концентрация газа, находящегося в «равновесии» с сорбированным количеством газа.

Величины a и y связаны друг с другом уравнением

$$a = f(y), \tag{4}$$

являющимся характеристикой сорбента.

Кривая $a = f(y)$ называется *изотермой сорбции*. Если

$$f(y) = \frac{y}{u_0 + py},$$

то изотерма называется *изотермой Лэнгмюра*. Наиболее простой вид функции f соответствует так называемой *изотерме Генри*, справедливой в области малых концентраций,

$$a = \frac{1}{\gamma} y, \tag{5}$$

где $\frac{1}{\gamma}$ — коэффициент Генри.

В этом случае мы приходим к следующей задаче: найти функции $u(x, t)$ и $a(x, t)$ из уравнений

$$-\nu\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\beta(u-\gamma a) \tag{6}$$

при дополнительных условиях

$$\left.\begin{aligned} a(x,\ 0)&=0,\\ u(x,\ 0)&=0,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$u(0,\ t)=u_0, \tag{8}$$

где u_0 — концентрация газа на входе.

Пренебрегая производной $\frac{\partial u}{\partial t}$, представляющей расход газа на повышение свободной концентрации в порах сорбента, по сравнению с производной $\frac{\partial a}{\partial t}$, представляющей расход газа на увеличение сорбированного количества газа, получаем [1]):

$$-\nu\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2'}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\beta(u-\gamma a), \tag{6}$$

$$a(x,\ 0)=0,$$

$$u(0,\ t)=u_0.$$

Исключим функцию $a(x, t)$, дифференцируя первое уравнение по t и используя второе уравнение

$$-\nu u_{xt}=\beta u_t-\beta\gamma a_t=\beta u_t+\beta\nu\gamma u_x$$

или

$$u_{xt}+\frac{\beta}{\nu}u_t+\beta\gamma u_x=0.$$

Определим начальное условие для u, полагая в первом уравнении $t=0$,

$$-\nu u_x(x,\ 0)=\beta u(x,\ 0), \qquad u(0,\ 0)=u_0,$$

откуда находим:

$$u(x,\ 0)=u_0 e^{-\frac{\beta}{\nu}x}.$$

---

[1]) Для системы уравнений (2′) и (6) достаточно одного начального условия, так как ось $t=0$ в этом случае становится характеристикой. Подробнее об этом см. примечание на стр. 166.

Задача нахождения функции $u(x, t)$ свелась к интегрированию уравнения

$$u_{xt} + \frac{\beta}{\nu} u_t + \beta\gamma u_x = 0 \tag{9}$$

при дополнительных условиях

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{\nu} x}, \tag{10}$$

$$u(0, t) = u_0. \tag{8}$$

Характеристиками этого уравнения являются линии

$$x = \text{const}, \quad t = \text{const}.$$

Дополнительные условия в этой задаче представляют значения искомой функции $u(x, t)$ на характеристиках. Аналогично ставится задача для функции $a(x, t)$:

$$a_{xt} + \frac{\beta}{\nu} a_t + \beta\gamma a_x = 0, \tag{11}$$

$$a(x, 0) = 0, \tag{7}$$

$$a(0, t) = \frac{u_0}{\gamma}(1 - e^{-\beta\gamma t}). \tag{12}$$

Следует заметить, что подобная задача встречается при рассмотрении ряда других вопросов (например, процесс сушки воздушным потоком, прогревание трубы потоком воды и т. д.) [1]).

---

[1]) Переходя к уравнению (2′), мы пренебрегли членом u_t. Однако нетрудно показать, что мы придем к тому же уравнению, если введем переменные:

$$\tau = t - \frac{x}{\nu}; \quad t = \tau + \frac{\xi}{\nu},$$

$$\xi = x, \qquad x = \xi, \qquad \text{(рис. 32)}$$

в которых время в точке x отсчитывается от $t_0 = \frac{x}{\nu}$ — момента прихода в эту точку потока газовоздушной смеси. В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial u}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

и уравнение (2) принимает вид

$$-\nu\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial a}{\partial \tau}, \tag{2″}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - \gamma a). \tag{6}$$

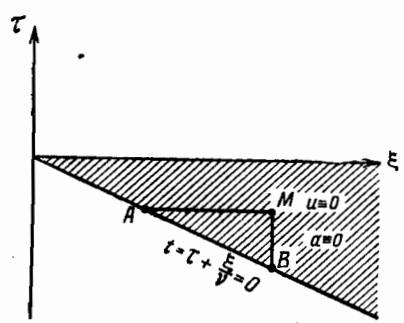


Рис. 32.

Начальные условия (7) и уравнения (2) и (6) дают:

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7′}$$

В области между прямой $t = 0$ и осью ξ мы получаем задачу определения функции u по начальным условиям (7′) (задача Коши). Очевидно, что в этой

Решение уравнения (10) может быть получено в явном виде методом, изложенным в § 5, и дается формулой

$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1}\left[e^{-t_1} I_0(2\sqrt{x_1 t_1}) + \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0(2\sqrt{\tau})\, d\tau\right], \qquad (13)$$

где $x_1 = \frac{\beta x}{v}$, $t_1 = \frac{\beta t}{\gamma}$ — безразмерные переменные, I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Пользуясь асимптотическими формулами для функции I_0, нетрудно получить асимптотическое представление решения при больших значениях аргументов.

2. Асимптотическое решение. Выше мы изучали процесс сорбции газа, подчиняющегося изотерме сорбции Генри, связывающей количество поглощенного вещества a с равновесной концентрацией линейной зависимостью

$$a = \frac{1}{\gamma} y.$$

Рассмотрим изотерму сорбции общего вида

$$a = f(y).$$

Если ввести безразмерные переменные

$$x_1 = \frac{x\beta}{v}, \quad t_1 = \frac{t\beta}{\gamma}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad z = \frac{y}{u_0}, \quad v = \frac{a}{u_0\gamma},$$

то система (2, 6, 7, 8) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial v}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} &= (\bar{u} - z), \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$v = f_1(z) = \frac{1}{u_0\gamma} f(zu_0) \qquad (15)$$

при дополнительных условиях

$$\bar{u}(0, t) = 1, \qquad (16)$$

$$v(x, 0) = 0. \qquad (17)$$

Нас будет интересовать асимптотическое поведение функций, представляющих решение системы (14).

области функция $u(x, t) \equiv 0$ (а также $a \equiv 0$). Из уравнений (2′) и (6) видно, что при $\tau = 0$ функция $u(x, t)$ претерпевает разрыв, в то время как функция $a(x, t)$ остается непрерывной. Таким образом, при $\tau = 0$ функция u, как было показано выше, определяется из уравнения (2′) при $a(x, 0) = 0$. Определяя, как это было сделано на стр. 166 (см. формулы (10) и (12)), значения $u(x, 0)$ и $a(0, t)$, мы получаем для функций $u(x, t)$ и $a(x, t)$ задачи с данными на характеристиках.

Относительно функции $f_1(z)$ мы будем предполагать следующее:

1. $f_1(z)$ — возрастающая функция и $f_1(0)=0$.

2. $f_1(z)$ имеет непрерывную производную для всех значений z, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

3. Луч, идущий из начала координат в точку $(1, f_1(1))$, лежит ниже кривой $f_1(z)$ в промежутке $0 \leqslant z \leqslant 1$ (рис. 33), что, в частности, имеет место для выпуклой изотермы.

Вводя обозначение для обратной функции

$$z = f_1^{-1}(v) = F(v),$$

будем искать асимптотическое решение поставленной задачи в виде распространяющейся волны

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u} &= \psi(\xi), \\ \tilde{v} &= \varphi(\xi), \end{aligned}\right\} \quad \xi = x - \sigma t, \tag{18}$$

где σ — скорость распространения волны, подлежащая определению.

Это означает, что на больших расстояниях (при $x \to \infty$) или через большой промежуток времени (при $t \to \infty$)

$$v(x, t) = \tilde{v} = \varphi(x - \sigma t); \quad \bar{u}(x, t) = \tilde{u} = \psi(x - \sigma t).$$

Концентрации $\bar{u}$ и v должны при $x = \infty$ или $t = \infty$ удовлетворять условию равновесия

$$v = f_1(\bar{u}) \quad \text{или} \quad \bar{u} = F(v).$$

Из условия (16) тогда следует:

$$\bar{u}\Big|_{\substack{x=0 \\ t=\infty}} = \psi(-\infty) = 1; \quad \varphi(-\infty) = v\Big|_{\substack{x=0 \\ t=\infty}} = f_1(1). \tag{19}$$

Из условия (17) следует:

$$v\Big|_{\substack{x=\infty \\ t=0}} = \varphi(+\infty) = 0; \quad \psi(+\infty) = \bar{u}\Big|_{\substack{x=\infty \\ t=0}} = F(0) = 0. \tag{20}$$

Условия (19) означают, что при $t \to \infty$ ($\xi \to -\infty$) должно установиться всюду насыщение.

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнения (14), получим:

$$\psi' = \sigma\varphi' = 0, \tag{21}$$

$$-\sigma\varphi' = \psi - F(\varphi). \tag{22}$$

Из (21) и (20) заключаем, что

$$\psi(\xi) - \sigma\varphi(\xi) = 0. \tag{23}$$

Из уравнений (19) тогда следует, что

$$\sigma = \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)}\Big|_{\xi=-\infty} = \frac{1}{f_1(1)} \tag{24}$$

или, в размерных величинах,

$$\sigma = \gamma \frac{n_0}{a_0}. \tag{24'}$$

Из (22) и (23) находим:

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - F(\varphi)} = d\xi. \tag{25}$$

После интегрирования будем иметь:

$$\omega(\varphi) = \xi - \xi_0, \tag{26}$$

где $\omega(\varphi)$ — какой-либо интеграл левой части, а ξ_0 — постоянная интегрирования. Отсюда искомая функция $\varphi(\xi)$ определится с точностью до неизвестной постоянной ξ_0:

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0), \tag{27}$$

$$\psi = \sigma\omega^{-1}(\xi - \xi_0). \tag{28}$$

Выясним, может ли быть определена функция ω^{-1} и будут ли функции φ и ψ удовлетворять поставленным условиям при $\xi \to \infty$ и $\xi \to -\infty$. Покажем, что производная

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\sigma \frac{1}{\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi)} < 0, \tag{29}$$

т. е.

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi)$$

— монотонно убывающая функция φ. В самом деле, знаменатель в (29) равен

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = \frac{1}{f_1(1)}\varphi - f_1^{-1}(\varphi).$$

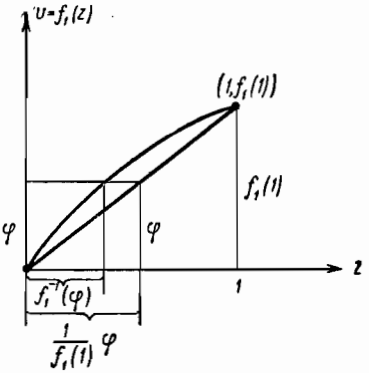


Рис. 33.

Первое слагаемое есть принадлежащая ординате φ абсцисса точки, лежащей на луче, идущем из начала координат в точку $(1, f_1(1))$ (рис. 33). Так как мы условились, что кривая $\varphi = f_1(z)$ лежит выше этого луча, то

$$f_1^{-1}(\varphi) < \frac{1}{f_1(1)}\varphi \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant f_1(1))$$

и, следовательно,

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) > 0.$$

Кроме того,

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0 \quad \text{и при} \quad \varphi = f_1(1).$$

Отсюда следует, что

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = \infty \qquad \text{при} \quad \varphi = 0,$$
$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = -\infty \qquad \text{при} \quad \varphi = f_1(1),$$

Для обратной функции получаем:

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = f_1(1) \quad \text{при} \quad \xi = -\infty,$$
$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \infty.$$

Далее, в силу равенства (29) имеем:

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 1 \quad \text{при} \quad \xi = -\infty,$$
$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \infty.$$

Итак, все условия (19) и (20) удовлетворены, и тем самым доказано, что система уравнений имеет решение в виде распространяющейся волны, содержащей неопределенную постоянную ξ_0.

Для определения ξ_0 интегрируем первое уравнение по t_1 в пределах от 0 до t_0 и по x в пределах от 0 до x_0:

$$\left[\int_0^{t_0} \bar{u}(x_0, \tau)\,d\tau - \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\,d\tau\right] + \left[\int_0^{x_0} v(x, t_0)\,dx - \int_0^{x_0} v(x, 0)\,dx\right] = 0. \quad (30)$$

Полученное равенство выражает закон сохранения вещества. Переходя к пределу при $x_0 \to \infty$ и пользуясь начальными условиями для $\bar{u}$ и v, находим:

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\,dx = \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\,d\tau = t_0.$$

Допустим, что для больших значений t решение нашей задачи приближается к функциям $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, найденным выше в виде распространяющихся волн.

Если мы определим ξ_0 из условия

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\,dx - t_0 \to 0 \quad (t_0 \to \infty), \quad (31)$$

то это и будет то значение ξ_0, которое соответствует функциям $\tilde{u}(x, t)$ и $\tilde{v}(x, t)$.

Преобразуем наш интеграл

$$\int_0^{\infty} \tilde{v}(x, t_0)\,dx = \int_0^{\infty} \varphi(x - \sigma t_0)\,dx = \int_0^{\infty} \omega^{-1}(x - \sigma t_0 - \xi_0)\,dx =$$
$$= \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi)\,d\xi = \int_{\zeta_1}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta \quad \left(\zeta = x - \sigma t_0 - \xi_0,\ \zeta_1 = -\sigma t_0 - \xi_0\right).$$

Обозначим через φ^* значение $\omega^{-1}(\zeta)$ при $\zeta = 0$

$$\omega^{-1}(0) = \varphi^*.$$

Нетрудно видеть, что если $\varphi = \omega^{-1}(\zeta)$ — обратная функция для $\zeta = \omega(\varphi)$, то (рис. 34)

$$\int_{\zeta_1}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta = \int_{\zeta_1}^{0} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta + \int_{0}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \left[-\zeta_1 \omega^{-1}(\zeta_1) + \int_{\varphi^*}^{\omega^{-1}(\zeta_1)} \omega(\varphi)\, d\varphi + \int_{0}^{\varphi^*} \omega(\varphi)\, d\varphi \right]. \quad (32)$$

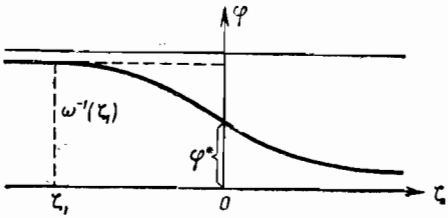


Рис. 34.

Отсюда следует, что вместо предельного равенства (31) можно написать:

$$\int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta - t_0 =$$

$$= \left\{ (\sigma t_0 + \xi_0)\, \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) + \int_{0}^{\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0)} \omega(\varphi)\, d\varphi \right\} - t_0 \to 0 \quad (t_0 \to \infty). \quad (32')$$

Перейдем к пределу при $t_0 \to \infty$. Тогда

$$\sigma\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) \to \sigma\varphi(-\infty) = \sigma f_1(1) = 1. \quad (32'')$$

Чтобы вычислить предел выражения

$$\sigma t_0 \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - t_0,$$

воспользуемся уравнением (25). Разлагая $f^{-1}(\varphi) = F(\varphi)$ в ряд вблизи точки $\varphi_0 = f_1(1)$, получим:

$$\begin{aligned} \sigma\varphi - F(\varphi) &= \sigma(\varphi - \varphi_0) + 1 - F(\varphi) = \\ &= \sigma(\varphi - \varphi_0) - [F(\varphi) - F(\varphi_0)] = \\ &= [\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \ldots, \end{aligned}$$

откуда

$$-\sigma \frac{d\varphi}{[\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \ldots} = d\xi, \quad (33)$$

где точками обозначены члены более высокого порядка относительно $(\varphi - \varphi_0)$.

Из требования 3 для функции f_1 следует, что

$$F'(\varphi_0) > \sigma = \frac{1}{f_1(1)}.$$

Из уравнения (33) находим порядок роста φ при $\xi \to -\infty$:

$$\varphi = Ae^{k\xi} + \varphi_0, \tag{34}$$

где A и $k > 0$ — некоторые постоянные.

Из (34) следует, что

$$\lim_{t_0 \to \infty} t_0 [\sigma\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - 1] = \lim_{t_0 \to \infty} t_0 A\sigma e^{-k(\sigma t_0 + \xi_0)} = 0. \tag{32'''}$$

Совершая в формуле (32′) предельный переход при $t_0 \to \infty$ и принимая во внимание (32″) и (32‴), получаем:

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\, d\varphi. \tag{35}$$

Тем самым профили волны $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ определены полностью.

Особый интерес представляет случай изотермы Лэнгмюра. Найдем асимптотическое решение для процесса сорбции газа, подчиняющегося изотерме Лэнгмюра.

Уравнение (25) принимает вид

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - \frac{\varphi}{1 - p\varphi}} = d\xi, \tag{36}$$

где $\sigma = \frac{1}{f_1(1)} = 1 + p$ — скорость волны. Из (36) находим:

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi),$$

где

$$\omega(\varphi) = \sigma \int \frac{(1 - p\varphi)\, d\varphi}{\varphi - \sigma\varphi(1 - p\varphi)} + A = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma} \ln(\sigma - 1 - p\sigma\varphi) - \ln\varphi\right] + A.$$

Очевидно, что когда φ меняется от 0 до $f_1(1)$, то $\omega(\varphi)$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Выберем A так, чтобы

$$\varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1),$$

т. е. чтобы

$$\omega(\varphi^*) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + p}.$$

При этом условии

$$A = -\frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{1}{2}p\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+p}\right)\right]$$

и

$$\omega(\varphi) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln 2(1 - \sigma\varphi) - \ln 2(1+p)\varphi\right].$$

Значение ξ_0 определяется формулой

$$\xi_0 = \frac{1}{f_1(1)}\int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\, d\varphi = -(\ln 2 - 1)$$

и не зависит от $p = \frac{u_0}{y}$, т. е. от подаваемой концентрации.

Искомое асимптотическое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x,\ t) &= \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \\ \tilde{u}(x,\ t) &= \sigma\omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \end{aligned} \tag{37}$$

где $\omega^{-1}(\xi)$ — обратная для $\omega(\varphi)$ функция.

На рис. 35 приведены результаты численного интегрирования уравнений (14) для изотермы Лэнгмюра методом конечных разностей. Эти

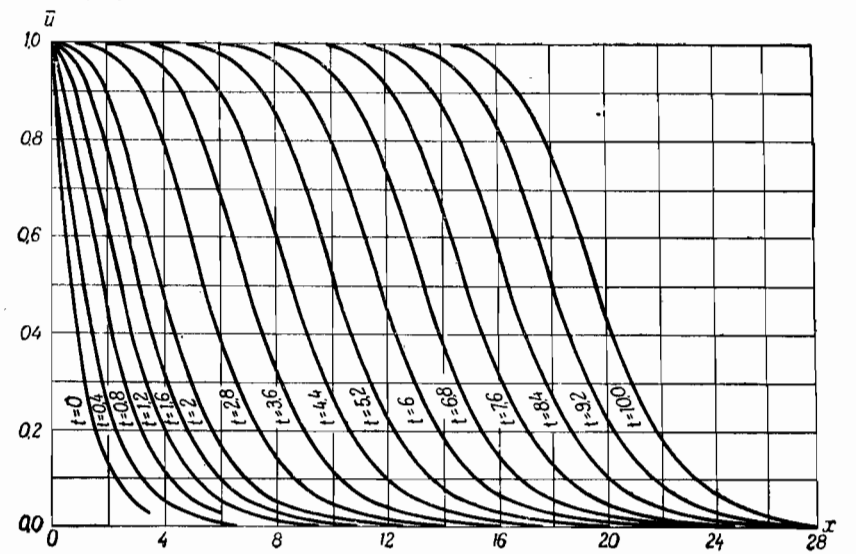


Рис. 35.

графики даны для значений $0 < t \leqslant t_1 = 10$. При $t = t_1$ результаты численного интегрирования совпадают с асимптотическим решением с точностью до 1%. Для значений $t > t_1$ можно пользоваться асимптотическими формулами.

VI. Физические аналогии

При рассмотрении явлений в различных областях физики мы часто обнаруживаем общие черты в этих явлениях. Это приводит к тому, что при математической формулировке задачи мы получаем одни и те же уравнения, описывающие различные физические явления. Простейшим примером может служить уравнение

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+bx=0,$$

описывающее различные колебательные процессы простейших систем: математический маятник, колебание груза под действием силы упругости пружины, электрические колебания в простом контуре с индуктивностью и емкостью и т. д. Общность уравнений для различных физических процессов позволяет на основании изучения свойств одного явления делать заключение о свойствах другого, менее изученного явления. Так, изучение различных акустических явлений может быть значительно облегчено предварительным рассмотрением подобных электрических схем.

Распространение электрических колебаний в системах с распределенными постоянными описывается, как известно, телеграфными уравнениями

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial I}{\partial x}&=C\frac{\partial V}{\partial t}+GV,\\ -\frac{\partial V}{\partial x}&=L\frac{\partial I}{\partial t}+RI,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где C, G, L, R — распределенные емкости, утечка, индуктивность и сопротивление системы. Если можно пренебречь сопротивлением и утечкой тока, то для напряжения и силы тока получаются обычные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=0,$$

а уравнения (1) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial I}{\partial x}&=C\frac{\partial V}{\partial t},\\ -\frac{\partial V}{\partial x}&=L\frac{\partial I}{\partial t}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

При решении задачи о распространении звука в одном направлении, например при изучении движения воздуха в трубах, мы приходим

к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau}\frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где v — скорость колеблющихся частиц, ρ — плотность, p — давление, а $\tau = p_0\gamma$ — коэффициент упругости воздуха.

Подобие уравнений (2) и (3) позволяет установить соответствие между акустическими и электрическими величинами. Разности потенциалов соответствует давление, току — скорость смещения частиц. Плотность, определяющая инерционные свойства газа, соответствует индуктивности электрической цепи, а емкости электрической цепи соответствует $\frac{1}{\tau}$, т. е. обратная величина коэффициента упругости. Это же соответствие можно установить и из выражений кинетической и потенциальной энергий для электрической и акустической систем.

Возвращаясь к уравнениям (1), мы можем ввести акустические аналоги сопротивления и утечки. Величину акустического сопротивления приходится учитывать в тех случаях, когда при рассмотрении движения газа оказывается существенным трение газа о стенки сосуда. По аналогии с электрическим сопротивлением, которое определяется как отношение напряжения к току, можно ввести и акустическое сопротивление, определяемое отношением давления к току в среде, который пропорционален скорости смещения частиц газа,

$$R_A = \frac{p}{uv}.$$

В тех случаях, где рассматривается движение газа в пористой среде, приходится вводить величину, аналогичную утечке в электрических цепях. Эта величина, обозначаемая через P, называется пористостью и определяется частью объема материала, которая оказывается заполненной воздухом.

Механическим аналогом телеграфного уравнения является уравнение продольных колебаний стержня, которое подобно уравнениям (2) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \\ -\frac{\partial T}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \end{aligned}$$

где T — натяжение стержня, v — скорость колеблющихся точек, ρ — плотность и k — коэффициент упругости стержня.

Сравнивая это уравнение с уравнением (2), мы можем установить подобие между механическими и электрическими величинами. Так, устанавливая соответствие между электрическим напряжением

и натяжением струны, током и скоростью движения частиц, мы получим, что обратная величина коэффициента упругости соответствует емкости, а плотность — индуктивности.

Таким образом, рассмотрение подобных динамических задач приводит к установлению соответствия между рядом электрических, акустических и механических величин. Это соответствие можно иллюстрировать следующей таблицей [1]):

	Электрическая система	Акустическая система	Механическая система
Переменные	Напряжение V	Давление p	Натяжение (сила) T
	Ток I	Скорость частиц v	Скорость смещения $\dot{x}$
	Заряд e	Смещение u	Смещение x
Параметры	Индуктивность L	Инертность (плотность) ρ	Плотность массы ρ_m
	Емкость C	Акустическая емкость $C_A = \frac{1}{\tau}$	Мягкость $C_M = \frac{1}{k}$
	Сопротивление R	Акустическое сопротивление R_A	Механическое сопротивление R_M

Развитые выше соображения позволяют в ряде акустических задач получить некоторые сведения о характере явлений до решения задачи.

Так, задача о движении воздуха в порах для простых гармонических волн приводит к уравнениям [2])

$$-i\omega\rho_m u + ru = -\operatorname{grad} p,$$

$$\Delta p + i\frac{\gamma P\omega}{\rho c^2}(r - i\omega\rho_m)p = 0,$$

где u — объемная скорость воздуха через поры, p — давление, ρ — плотность, ρ_m — эффективная плотность воздуха в порах, которая может быть больше ρ, так как в порах вместе с воздухом могут колебаться и частицы вещества, P — пористость, c и ω — скорость и частота звука, r — сопротивление потоку, которое характеризует падение давления в материале. Положив $r = R_A$, $\rho_m = L_A$, $\frac{\gamma P}{\rho c^2} = C_A$, мы получим наши уравнения в виде

$$L_A\frac{\partial u}{\partial t} + R_A u = -\operatorname{grad} p,$$

$$C_A L_A\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + C_A R_A\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p.$$

[1]) См., например, Г. Ольсон, Динамические аналогии, ИЛ, 1947.
[2]) См. В. В. Фурдуев, Электроакустика, Гостехиздат, 1948.

Эти уравнения вполне подобны уравнениям распространения электрических колебаний в линии. Поэтому мы по аналогии с волновым сопротивлением линии

$$z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$$

можем сразу написать выражение для сопротивления, называемого характеристическим импедансом пористого материала

$$Z = c\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{\rho_m - i\frac{r}{\omega}}{\gamma P}},$$

считая при этом $G = 0$. Выражение характеристического импеданса указывает на затухание волн, распространяющихся в пористом материале.

Установленная аналогия между электрическими и акустическими явлениями позволяет заменить изучение ряда акустических задач рассмотрением эквивалентных электрических схем.

Метод подобия в последнее время нашел большое применение в моделирующих счетно-решающих устройствах, в которых для решения уравнения, соответствующего какому-либо физическому процессу, строится эквивалентная электрическая схема.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными 2-го порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_{xx} - u_y = 0$$

обычно называют *уравнением теплопроводности*.

§ 1. Простейшие задачи, приводящиеся к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач

1. Линейная задача о распространении тепла. Рассмотрим однородный стержень длины l, теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Если концы стержня поддерживать при постоянных температурах u_1 и u_2, то, как хорошо известно, вдоль стержня устанавливается линейное распределение температуры (рис. 36)

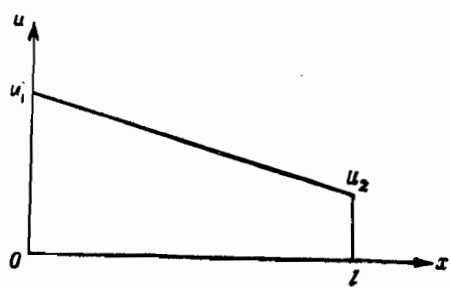


Рис. 36.

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \quad (1)$$

При этом от более нагретого к менее нагретому концу стержня будет перетекать тепло. Количество тепла, протекающее через сечение стержня площади S за единицу времени, дается экспериментальной формулой

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \quad (2)$$

где k — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня.

Величина теплового потока считается положительной, если тепло течет в сторону возрастания x.

Рассмотрим процесс распространения температуры в стержне. Этот процесс может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t. Найдем уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x, t)$. Для этого сформулируем физические закономерности, определяющие процессы, связанные с распространением тепла.

1. *Закон Фурье.* Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой.

Количество тепла, протекающее через сечение x за промежуток времени $(t, t+dt)$, равно

$$dQ = qS\,dt, \tag{3}$$

где

$$q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

— плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекшего в единицу времени через площадь в 1 $см^2$. Этот закон представляет обобщение формулы (2). Ему можно также придать интегральную форму

$$Q = -S\int_{t_1}^{t_2} k\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,dt, \tag{5}$$

где Q — количество тепла, протекающее за промежуток времени (t_1, t_2) через сечение x. Если стержень неоднороден, то k является функцией x.

2. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu, равно

$$Q = cm\,\Delta u = c\rho V\,\Delta u, \tag{6}$$

где c — удельная теплоемкость, m — масса тела, ρ — его плотность, V — объем.

Если изменение температуры имеет различную величину на разных участках стержня или если стержень неоднороден, то

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\,\Delta u(x)\,dx. \tag{7}$$

3. Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т. д.). Выделение тепла может быть характеризовано плотностью тепловых

источников $F(x, t)$ в точке x в момент t [1]). В результате действия этих источников на участке стержня $(x, x+dx)$ за промежуток времени $(t, t+dt)$ выделится количество тепла

$$dQ = SF(x, t)\,dx\,dt \tag{8}$$

или в интегральной форме

$$Q = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x, t)\,dx\,dt, \tag{9}$$

где Q — количество тепла, выделяющегося на участке стержня (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2).

Уравнение теплопроводности получается при подсчете баланса тепла на некотором отрезке (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2). Применяя закон сохранения энергии и пользуясь формулами (5), (7) и (9), можно написать равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_1}\right]d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau = \int_{x_1}^{x_2} c\rho\,[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\,d\xi, \tag{10}$$

которое и представляет уравнение теплопроводности в интегральной форме.

Чтобы получить уравнение теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $u(x, t)$ имеет непрерывные производные u_{xx} и u_t [2]).

Пользуясь теоремой о среднем, получаем равенство

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_1}\right]_{\tau=t_3}\Delta t + F(x_4, t_4)\,\Delta x\,\Delta t = \{c\rho\,[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\}_{\xi=x_3}\Delta x, \tag{11}$$

---

[1]) Если например, тепло выделяется в результате прохождения электрического тока силы I по стержню, сопротивление которого на единицу длины равно R, то $F = 0{,}24 \cdot I^2R$.

[2]) Требуя дифференцируемости функций $u(x, t)$, мы, вообще говоря, можем потерять ряд возможных решений, удовлетворяющих интегральному уравнению, но не удовлетворяющих дифференциальному уравнению. Однако в случае уравнений теплопроводности, требуя дифференцируемости решения, мы фактически не теряем возможных решений, так как можно доказать, что если функция удовлетворяет уравнению (10), то она обязательно должна быть дифференцируема.

которое при помощи теоремы о конечных приращениях можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right]_{\substack{x=x_3\\ t=t_3}}\Delta t\,\Delta x + F(x_4, t_4)\,\Delta x\,\Delta t = \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right]_{\substack{x=x_3\\ t=t_5}}\Delta x\,\Delta t, \qquad (12)$$

где t_3, t_4, t_5 и x_3, x_4, x_5 — промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и (x_1, x_2).

Отсюда, после сокращения на произведение $\Delta x\,\Delta t$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=x_3\\ t=t_3}} + F(x, t)\Big|_{\substack{x=x_4\\ t=t_4}} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t_5\\ x=x_3}}. \qquad (13)$$

Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (x_1, x_2) и (t_1, t_2). Переходя к пределу при $x_1, x_2 \to x$ и $t_1, t_2 \to t$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (14)$$

называемое *уравнением теплопроводности*.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если стержень однороден, то k, c, ρ можно считать постоянными, и уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho},$$

где a^2 — постоянная, называемая *коэффициентом температуропроводности*. Если источники отсутствуют, т. е. $F(x, t) = 0$, то уравнение теплопроводности принимает простой вид:

$$u_t = a^2 u_{xx}. \qquad (14')$$

2. Плотность тепловых источников может зависеть от температуры. В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося *закону Ньютона*, количество тепла, теряемого стержнем [1]), рассчитанное на единицу длины и времени, равно

$$F_0 = h(u - \theta),$$

где $\theta(x, t)$ — температура окружающей среды, h — *коэффициент теплообмена*. Таким образом, плотность тепловых источников в точке x

[1]) Поскольку в нашем приближении не учитывается распределение температуры по сечению, то действие поверхностных источников эквивалентно действию объемных источников тепла.

в момент t равна

$$F = F_1(x,\ t) - h(u - \theta),$$

где $F_1(x,\ t)$ — плотность других источников тепла.

Если стержень однороден, то уравнение теплопроводности с боковым теплообменом имеет следующий вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x,\ t), \tag{15}$$

где $\alpha = \frac{h}{c\rho}$; $f(x,\ t) = \alpha\theta(x,\ t) + \frac{F_1(x,\ t)}{c\rho}$ — известная функция.

3. Коэффициенты k и c, как правило, являются медленно меняющимися функциями температуры. Поэтому сделанное выше предположение о постоянстве этих коэффициентов возможно лишь при условии рассмотрения небольших интервалов изменения температуры. Изучение температурных процессов в большом интервале изменения температур приводит к квазилинейному уравнению теплопроводности, которое для неоднородной среды запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u,\ x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,\ t) = C(u,\ x)\rho(u,\ x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

(см. приложение III).

2. Уравнение диффузии. Если среда неравномерно заполнена газом, то имеет место диффузия его из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление имеет место и в растворах, если концентрация растворенного вещества не постоянна в объеме.

Рассмотрим процесс диффузии в полой трубке или в трубке, заполненной пористой средой, предполагая, что во всякий момент времени концентрация газа (раствора) по сечению трубки одинакова. Тогда процесс диффузии может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей *концентрацию* в сечении x в момент времени t.

Согласно *закону Нернста* масса газа, протекающая через сечение x за промежуток времени $(t,\ t + \Delta t)$, равна

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\,S\,dt, \tag{16}$$

где D — коэффициент диффузии, S — площадь сечения трубки.

По определению концентрации, количество газа в объеме V равно

$$Q = uV;$$

отсюда получаем, что изменение массы газа на участке трубки $(x_1,\ x_2)$ при изменении концентрации на Δu равно

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x)\,\Delta u \cdot S\,dx,$$

где $c(x)$ — *коэффициент пористости* [1]).

[1]) Коэффициентом пористости называется отношение объема пор к полному объему V_0, равному в нашем случае $S\,dx$.

Составим уравнение баланса массы газа на участке (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2):

$$S\int_{t_1}^{t_2}\left[D(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau)\right]d\tau =$$

$$= S\int_{x_1}^{x_2} c(\xi)\,[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\,d\xi.$$

Отсюда, подобно п. 1, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{17}$$

являющееся *уравнением диффузии*. Оно вполне аналогично уравнению теплопроводности. При выводе этого уравнения мы считали, что в трубке нет источников вещества и диффузия через стенки трубки отсутствует. Учет этих явлений приводит к уравнениям, сходным с уравнениями (14) и (15).

Если коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии принимает вид

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

где

$$a^2 = \frac{D}{c}.$$

Если коэффициент пористости $c = 1$, а коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии имеет вид

$$u_t = Du_{xx}.$$

3. Распространение тепла в пространстве. Процесс распространения тепла в пространстве может быть характеризован температурой $u(x, y, z, t)$, являющейся функцией x, y, z и t.

Если температура непостоянна, то возникают тепловые потоки, направленные от мест с более высокой температурой к местам с более низкой температурой. Количество тепла, протекающего через площадку $d\sigma$ в точке (x, y, z) за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$, определяется по закону Фурье формулой

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z, t)\,d\sigma\,dt,$$

где k — коэффициент теплопроводности тела [1]), n — нормаль к элементу поверхности $d\sigma$ в направлении теплового потока. Как известно,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\widehat{n, x}) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\widehat{n, y}) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\widehat{n, z}) = \operatorname{grad} u \cdot n,$$

[1]) Мы рассматриваем однородное изотропное тело.

так что можно написать:

$$dQ = -k \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\, dt.$$

Отсюда следует, что поток тепла, отнесенный к единице времени и единице площади, равен

$$q_n = q\boldsymbol{n}, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{q} = -k \operatorname{grad} u$ — вектор плотности теплового тока.

Для количества тепла, вытекающего через некоторую поверхность S за промежуток времени (t_1, t_2), имеем:

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2}\int_S\int k \frac{\partial u}{\partial n}\, dt\, d\sigma$$

или

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2}\int_S\int k \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_S\int \boldsymbol{qn}\, d\sigma\, dt, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль. Количество тепла, необходимое для изменения температуры точек тела на $\Delta u(x, y, z) = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$, равно

$$Q_2 = \int\int\int_V c\rho\,[u(\xi, \eta, \zeta, t_2) - u(\xi, \eta, \zeta, t_1)]\, dV. \tag{20}$$

Наконец, обозначая через $F(x, y, z, t)$ плотность тепловых источников, получим выражение для количества тепла, выделяющегося в теле V за промежуток времени (t_1, t_2),

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2}\int\int_V\int F(\xi, \eta, \zeta, t)\, dV\, dt. \tag{21}$$

Составим теперь уравнение баланса тепла для некоторого вспомогательного тела V, поверхность которого обозначим S. Очевидно, что

$$Q_2 = Q_3 - Q_1. \tag{22}$$

Предполагая двукратную дифференцируемость функции u по переменным x, y, z и однократную по t и непрерывность этих производных в рассматриваемой области, преобразуем формулы (19), (20) и (21). Пользуясь формулой Остроградского

$$\int_S \boldsymbol{qn}\, d\sigma = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{q}\, dV\ ^{1})$$

---

[1]) Нормаль в этой формуле, так же как и в (19), мы считаем внешней.

и применяя теорему о среднем и теорему о конечных приращениях для функций многих переменных, получим:

$$Q_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{q}(x_1, y_1, z_1, t_3)\, V \Delta t,$$

$$Q_2 = c\rho\,[u(x_2, y_2, z_2, t_2) - u(x_2, y_2, z_2, t_1)]\, V = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x_2, y_2, z_2, t_4)\, V \Delta t,$$

$$Q_3 = F(x_3, y_3, z_3, t_5)\, V \Delta t.$$

После сокращения на $V\Delta t$, уравнение баланса принимает вид

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x_2, y_2, z_2, t_4) = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}(x_1, y_1, z_1, t_3) + F(x_3, y_3, z_3, t_5), \qquad (23)$$

где все значения берутся внутри рассматриваемой области, т. е. в некоторой средней точке объема V для среднего значения времени из интервала (t_1, t_2).

Это равенство имеет место для произвольного объема V внутри тела. Стягивая объем в точку с координатами x, y, z и переходя к пределу при $t_1, t_2 \to t$, получим [1]):

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}(x, y, z, t) + F(x, y, z, t), \qquad (24)$$

где в силу непрерывности производных все значения будут браться в одной точке.

Заменяя $\boldsymbol{q}$ по формуле (18), получим уравнение теплопроводности

$$c\rho\, u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F$$

или

$$c\rho\, u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F. \qquad (25)$$

Если среда однородна, то это уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{c\rho}, \qquad (26)$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, или

$$u_t = a^2 \Delta u + f \qquad \left(f = \frac{F}{c\rho}\right), \qquad (26')$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

4. Постановка краевых задач. Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

---

[1]) Мы предполагаем $F(x, y, z, t)$ непрерывной в рассматриваемой области.

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа состоит лишь в задании значений функции $u(x, t)$ в начальный момент t_0.

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На границе стержня задана температура

$$u(0, t) = \mu(t), \tag{27}$$

где $\mu(t)$ — функция, заданная в некотором промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant T$, причем T есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

2. На границе задано значение производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t). \tag{28}$$

К этому условию мы приходим, если задана величина теплового потока $Q(l, t)$, протекающего через торцевое сечение стержня,

$$Q(l, t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t)$, где $\nu(t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный поток $Q(l, t)$ по формуле

$$\nu(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. На границе задано линейное соотношение между производной и функцией

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)].$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение $x = l$,

$$Q = h(u - \theta)$$

и

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x},$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)], \tag{29}$$

где $\lambda = \frac{h}{k}$ — коэффициент теплообмена, $\theta(t)$ — некоторая заданная

функция. Для сечения $x=0$ стержня $(0, l)$ третье граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = +\lambda [u(0, t) - \theta(t)]. \qquad (29')$$

Граничные условия при $x=0$ и $x=l$ могут быть разных типов, так что число различных краевых задач велико.

Если среда неоднородна и коэффициенты уравнения являются разрывными функциями, то промежуток $(0, l)$, в котором ищется решение задачи, разбивается точками разрыва коэффициентов на несколько частей, внутри которых функция u удовлетворяет уравнению теплопроводности, а на границах — условиям сопряжения.

В простейшем случае эти условия заключаются в непрерывности температуры и непрерывности теплового потока

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$

$$k(x_i - 0)\frac{\partial u(x_i - 0, t)}{\partial x} = k(x_i + 0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, t),$$

где x_i — точки разрыва коэффициентов.

Кроме названных здесь задач часто встречаются их предельные случаи. Рассмотрим процесс теплопроводности в очень длинном стержне. В течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня сказывается весьма слабо, и температура на этом участке определяется в основном лишь начальным распределением температуры. В этом случае точный учет длины стержня не имеет значения, так как изменение длины стержня не окажет существенного влияния на температуру интересующего нас участка; в задачах подобного типа обычно считают, что стержень имеет бесконечную длину. Таким образом, ставится *задача с начальными условиями (задача Коши) о распределении температуры на бесконечной прямой*; найти решение уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < \infty$ и $t \geqslant t_0$, удовлетворяющее условию

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция.

Аналогично, если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень полубесконечен, и координата, отсчитываемая от конца, меняется в пределах $0 \leqslant x \leqslant \infty$.

Приведем в качестве примера формулировку *первой краевой задачи для полубесконечного стержня*:

найти решение уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty$ и $t_0 \leqslant t$, удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ t_0) &= \varphi(x) \quad (0 < x < \infty), \\ u(0,\ t) &= \mu(t) \quad (t \geqslant t_0), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ — заданные функции.

Приведенные выше задачи представляют собой предельный случай (*вырождение*) основных краевых задач. Возможны предельные случаи основной задачи и другого типа, когда пренебрегают точным учетом начальных условий. Влияние начальных условий при распространении температуры по стержню ослабевает с течением времени. Если интересующий нас момент достаточно удален от начального, то температура стержня практически определяется граничными условиями, так как изменение начальных условий не изменило бы температурного состояния стержня в пределах точности наблюдения. В этом случае практически можно считать, что опыт продолжался бесконечно долго, и начальные условия тем самым отпадают.

Таким образом, мы приходим к *краевым задачам без начальных условий*, когда ищем решение уравнения теплопроводности для $0 \leqslant x \leqslant l$ и $-\infty < t$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(0,\ t) &= \mu_1(t), \\ u(l,\ t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \tag{31}$$

В зависимости от характера граничного режима возможны и другие виды задач без начальных условий.

Весьма важной является задача без начальных условий для полубесконечного стержня ($l = \infty$), когда требуется найти решение уравнения теплопроводности для $0 < x < \infty$, $t > -\infty$, удовлетворяющее условию

$$u(0,\ t) = \mu(t), \tag{27}$$

где $\mu(t)$ — заданная функция.

Наиболее часто встречаются задачи без начальных условий при периодическом граничном режиме

$$\mu(t) = A \cos \omega t. \tag{32}$$

(см. приложение I к гл. III).

Естественно считать, что по прошествии большого промежутка времени температура стержня практически также меняется по периодическому закону с той же частотой. Однако, если мы захотим точно учитывать начальные условия, то формально никогда не получим периодического решения, так как влияние начальных условий, хотя и будет ослабевать с течением времени, но в нуль не обратится; учитывать это влияние ввиду ошибок наблюдения нет никакого смысла.

Рассматривая периодическое решение, мы пренебрегаем влиянием начальных данных.

Постановка краевых задач, изложенная выше, относится, конечно, не только к уравнению с постоянными коэффициентами. Под словами «уравнение теплопроводности» мы могли бы понимать любое из уравнений предыдущих пунктов.

Помимо перечисленных выше линейных краевых задач, ставятся также задачи с нелинейными граничными условиями, например вида

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=\sigma[u^4(0,\ t)-\theta^4(0,\ t)]. \tag{33}$$

Это граничное условие соответствует излучению по закону Стефана — Больцмана с торца $x=0$ в среду с температурой $\theta(t)$.

Остановимся более подробно на постановке краевых задач. Рассмотрим первую краевую задачу для ограниченной области.

Решением первой краевой задачи будем называть функцию $u(x,\ t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,\ t)$ определенна и непрерывна в замкнутой области

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad t_0\leqslant t\leqslant T;$$

2) $u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности в открытой области

$$0<x<l,\quad t_0<t;$$

3) $u(x,\ t)$ удовлетворяет начальному и граничным условиям, т. е.

$$u(x,\ t_0)=\varphi(x),\quad u(0,\ t)=\mu_1(t),\quad u(l,\ t)=\mu_2(t),$$

где $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения

$\varphi(0)=\mu_1(t_0)$ $[=u(0,\ t_0)]$

и

$\varphi(l)=\mu_2(t_0)$ $[=u(l,\ t_0)]$,

необходимым для непрерывности $u(x,\ t)$ в замкнутой области.

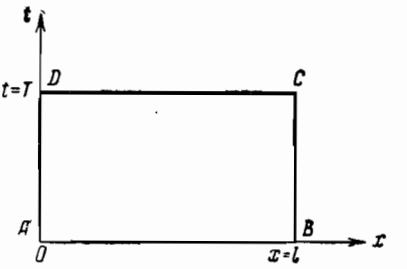


Рис. 37.

Рассмотрим плоскость фазовых состояний $(x,\ t)$ (рис. 37). В нашей задаче ищется функция $u(x,\ t)$, определенная внутри прямоугольника $ABCD$. Эта область определяется самой постановкой задачи, так как изучается процесс распространения тепла в стержне $0\leqslant x\leqslant l$ за промежуток времени $t_0\leqslant t\leqslant T$, в течение которого нам известен тепловой режим на краях. Пусть $t_0=0$; мы предполагаем, что $u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению только при $0<x<l$, $0<t\leqslant T$, но не при $t=0$ (сторона AB) и не при $x=0$, $x=l$ (стороны AD и BC), где начальными и граничными условиями непосредственно задаются

значения этой функции. Если бы мы потребовали, чтобы уравнение удовлетворялось, например, при $t=0$, то этим мы потребовали бы, чтобы существовала производная $\varphi''=u_{xx}(x,\ 0)$, входящая в уравнение. Этим требованием мы ограничили бы область изучаемых физических явлений, исключив из рассмотрения те функции, для которых это требование не выполняется. Условие 3) без предположения непрерывности $u(x,\ t)$ в области $0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T$ (т. е. в замкнутом прямоугольнике $ABCD$) или какого-либо другого условия, заменяющего это предположение, теряет смысл [1]). Действительно, рассмотрим функцию $v(x,\ t)$, определенную следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} v(x,\ t)&=C && (0<x<l,\quad 0<t\leqslant T),\\ v(x,\ 0)&=\varphi(x) && (0\leqslant x\leqslant l),\\ v(0,\ t)&=\mu_1(t),\\ v(l,\ t)&=\mu_2(t) && (0\leqslant t\leqslant T), \end{aligned}\right\}$$

где C — произвольная постоянная. Функция $v(x,\ t)$, очевидно, удовлетворяет условию 2), а также граничным условиям. Однако эта функция не представляет процесса распространения температуры в стержне при начальной температуре $\varphi(x)\neq C$ и граничных температурах $\mu_1(t)\neq C$ и $\mu_2(t)\neq C$, так как она разрывна при $t=0$, $x=0$, $x=l$.

Непрерывность функции $u(x,\ t)$ при $0<x<l$, $0<t<T$ следует из того, что эта функция удовлетворяет уравнению. Таким образом, требование непрерывности $u(x,\ t)$ при $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant T$, по существу относится только к тем точкам, где задаются граничные и начальные значения. В дальнейшем мы под словами «решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям», будем подразумевать функцию, удовлетворяющую требованиям 1), 2), 3), не оговаривая эти условия каждый раз, если в этом нет специальной необходимости.

Аналогично ставятся и другие краевые задачи, в том числе задачи на бесконечном стержне и задачи без начальных условий.

Для задач с несколькими независимыми геометрическими переменными все сказанное выше сохраняет силу. В этих задачах при $t=t_0$ задается начальная температура, на поверхности тела — граничные условия. Можно рассматривать также и задачи для бесконечной области.

В отношении каждой из поставленных задач возникают следующие вопросы [2]):

1) единственность решения поставленной задачи,

2) существование решения,

3) непрерывная зависимость решения от дополнительных условий.

---

[1]) Ниже будут рассмотрены краевые задачи с разрывными граничными и начальными условиями. Для этих задач будет уточнено, в каком смысле понимается выполнение граничных условий.

[2]) Сравни с гл. II, § 2.

Если поставленная задача имеет несколько решений, то слова «решение задачи» не имеют определенного смысла. Поэтому прежде чем говорить о решении задачи, необходимо доказать его единственность. Для практики наиболее существенным является вопрос 2), так как при доказательстве существования решения обычно дается способ вычисления решения.

Как было отмечено ранее (см. главу II, § 2, п. 3) процесс называется физически определенным, если при малом изменении начальных и граничных условий задачи ее решение меняется мало. В дальнейшем будет доказано, что процесс распространения тепла физически определяется своими начальными и граничными условиями, т. е. небольшое изменение начального и граничных условий мало изменяет и само решение.

5. Принцип максимального значения. В дальнейшем мы будем рассматривать уравнение с постоянными коэффициентами

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v. \tag{34}$$

Как мы видели, это уравнение подстановкой

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u \quad \text{при} \quad \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \qquad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

приводится к виду

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{35}$$

Докажем следующее свойство решений этого уравнения, которое мы будем называть *принципом максимального значения.*

Если функция $u(x, t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $0 \leqslant t \leqslant T$ и $0 \leqslant x \leqslant l$, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{35}$$

в точках области $0 < x < l$, $0 < t \leqslant T$, то максимальное и минимальное значения функции $u(x, t)$ достигаются или в начальный момент, или в точках границы $x = 0$, или $x = l$.

Функция $u(x, t) = \text{const}$, очевидно, удовлетворяет уравнению теплопроводности и достигает своего максимального (минимального) значения в любой точке. Однако это не противоречит теореме, так как из ее условия следует, что если максимальное (минимальное) значение достигается внутри области, то оно также (а не только) должно достигаться или при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = l$.

Физический смысл этой теоремы очевиден: если температура на границе и в начальный момент не превосходит некоторого значения M, то внутри тела не может создаться температура, бóльшая M. Остановимся сначала на доказательстве теоремы для максимального значения.

Доказательство теоремы ведется от противного. Обозначим через M максимальное значение $u(x, t)$ при $t=0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ или при $x=0$, или при $x=l$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ [1]) и допустим, что в некоторой точке (x_0, t_0) $(0 < x_0 < l,\ 0 < t_0 \leqslant T)$ функция $u(x, t)$ достигает своего максимального значения, равного

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Сравним знаки уравнения (35) в точке (x_0, t_0). Так как в точке (x_0, t_0) функция достигает своего максимального значения, то необходимо должно быть

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0\ ^{2}). \tag{36}$$

Далее, так как $u(x_0, t)$ достигает максимального значения при $t=t_0$, то [3])

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geqslant 0. \tag{37}$$

Сравнивая знаки правой и левой частей уравнения (35), мы видим, что они различны. Однако это рассуждение еще не доказывает теоремы, так как правая и левая части могут быть равны нулю, что не влечет за собой противоречия. Мы привели это рассуждение, чтобы яснее выделить основную идею доказательства. Для полного доказательства найдем точку (x_1, t_1), в которой $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqslant 0$ и $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \tag{38}$$

---

[1]) Если не предполагать непрерывности $u(x, t)$ в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то функция $u(x, t)$ могла бы не достигать своего максимума ни в одной точке, и дальнейшие рассуждения были бы неприменимы. В силу теоремы о том, что всякая непрерывная функция достигает своего максимального значения в замкнутой области, мы можем быть уверены, что: 1) функция $u(x, t)$ достигает максимального значения на нижней или боковой сторонах прямоугольника, которое мы обозначили через M; 2) если $u(x, t)$ хотя бы в одной точке больше M, то существует точка (x_0, t_0), в которой $u(x, t)$ достигает максимального значения, превосходящего M: $u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, причем $0 < x_0 < l$, $0 < t_0 \leqslant T$.

[2]) Действительно, как известно из анализа, достаточными условиями для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0, лежащей внутри интервала $(0, l)$, имела относительный минимум, являются следующие условия: $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0$, $\frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{x=x_0} > 0$. Таким образом, если в точке x_0 $f(x)$ имеет максимальное значение, то 1) $f'(x_0) = 0$ и 2) не может быть, чтобы $f''(x_0) > 0$, т. е. $f''(x_0) \leqslant 0$.

[3]) При этом ясно, что если $t_0 < T$, то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, если же $t_0 = T$, то $\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$.

где k — некоторое постоянное число. Очевидно, что

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

и

$$k(t_0 - t) \leqslant kT.$$

Выберем $k > 0$ так, чтобы kT был меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, т. е. $k < \frac{\varepsilon}{2T}$; тогда максимальное значение $v(x, t)$ при $t = 0$ или при $x = 0$, $x = l$ не будет превосходить $M + \frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$$v(x, t) \leqslant M + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{при } t = 0 \text{ или } x = 0,\ x = l), \tag{39}$$

так как для этих аргументов первое слагаемое формулы (38) не превосходит M, а второе — $\frac{\varepsilon}{2}$.

В силу непрерывности функции $v(x, t)$ она должна в некоторой точке (x_1, t_1) достигать своего максимального значения. Очевидно, что

$$v(x_1, t_1) \geqslant v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Поэтому $t_1 > 0$ и $0 < x_1 < l$, так как при $t = 0$ или $x = 0$, $x = l$ имеет место неравенство (39). Сравнивая знаки правой и левой частей уравнения (35) в точке (x_1, t_1), получим

$$v_{xx}(x_1, t_1) = u_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0$$

и

$$v_t(x_1, t_1) = u_t(x_1, t_1) - k \geqslant 0 \text{ или } u_t(x_1, t_1) \geqslant k > 0.$$

Таким образом, в точке (x_1, t_1) уравнение (35) не может быть удовлетворено, так как справа и слева стоят величины разных знаков. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Аналогично может быть доказана и вторая часть теоремы о минимальном значении. Впрочем, это не требует отдельного доказательства, так как функция $u_1 = -u$ имеет максимальное значение там, где u — минимальное.

Обратимся теперь к установлению ряда следствий из принципа максимального значения. Прежде всего докажем теорему единственности для первой краевой задачи.

6. Теорема единственности. Если две функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, определенные и непрерывные в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (\text{для } 0 < x < l,\ t > 0), \tag{35}$$

одинаковым начальным и граничным условиям

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = \mu_1(t),$$
$$u_1(l, t) = u_2(l, t) = \mu_2(t),$$

то $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ [1]).

Для доказательства этой теоремы рассмотрим функцию

$$v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t).$$

Поскольку функции $u_1(x, t)$, и $u_2(x, t)$ непрерывны при

$$0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

то и функция $v(x, t)$, равная их разности, непрерывна в этой же области. Как разность двух решений уравнения теплопроводности в области $0 < x < l$, $t > 0$, функция $v(x, t)$ является также решением уравнения теплопроводности в этой области. Таким образом, принцип максимального значения применим к этой функции, т. е. она достигает своего максимального и минимального значений или при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = l$. Однако по условию мы имеем:

$$v(x, 0) = 0, \qquad v(0, t) = 0, \qquad v(l, t) = 0.$$

Поэтому

$$v(x, t) \equiv 0,$$

т. е.

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

Отсюда следует, что решение первой краевой задачи единственно.

Докажем еще ряд прямых следствий из принципа максимального значения. При этом в дальнейшем мы будем говорить просто «решение уравнения теплопроводности» вместо более подробного перечисления свойств функций, удовлетворяющих, кроме того, начальным и граничным условиям.

1. Если два решения уравнения теплопроводности $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ удовлетворяют условиям

$$u_1(x, 0) \leqslant u_2(x, 0),$$
$$u_1(0, t) \leqslant u_2(0, t), \qquad u_1(l, t) \leqslant u_2(l, t),$$

то

$$u_1(x, t) \leqslant u_2(x, t)$$

для всех значений $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

---

[1]) В п. 3 § 2 эта теорема будет усилена и требование непрерывности при $t = 0$ снято.

Действительно, разность $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ удовлетворяет условиям, при которых установлен принцип максимального значения, и, кроме того,

$$v(x, 0) \geqslant 0, \quad v(0, t) \geqslant 0, \quad v(l, t) \geqslant 0.$$

Поэтому

$$v(x, t) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad 0 < x < l, \ 0 < t \leqslant T,$$

так как иначе функция $v(x, t)$ имела бы отрицательное минимальное значение в области

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T.$$

2. Если три решения уравнения теплопроводности

$$u(x, t), \quad \underline{u}(x, t) \quad \bar{u}(x, t)$$

удовлетворяют условиям

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \bar{u}(x, t) \quad \text{при} \quad t = 0, \ x = 0 \quad \text{и} \quad x = l,$$

то эти же неравенства выполняются тождественно, т. е. для всех x, t при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Это утверждение является применением следствия 1 к функциям

$$u(x, t), \ \bar{u}(x, t) \quad \text{и} \quad u(x, t), \ \underline{u}(x, t).$$

3. Если для двух решений уравнения теплопроводности $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ имеет место неравенство

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad t = 0, \quad x = 0, \quad x = l,$$

то

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon$$

тождественно, т. е. имеет место для всех x, t

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Это утверждение вытекает из следствия 2, если его применить к решениям уравнения теплопроводности

$$\underline{u}(x, t) = -\varepsilon,$$
$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$
$$\bar{u}(x, t) = \varepsilon.$$

Вопрос о непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от начального и граничных значений вполне выясняется при помощи установленного следствия 3. Если мы в некоторой физической задаче вместо решения уравнения теплопроводности, соответствующего начальному и граничным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

возьмем решение $u(x, t)$, соответствующее другим начальному и граничным значениям, определяемым функциями $\varphi^*(x)$, $\mu_1^*(t)$, $\mu_2^*(t)$, не отличаемыми в пределах заданной степени точности ε от функций $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$:

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leqslant \varepsilon, \quad |\mu_1(t) - \mu_1^*(t)| \leqslant \varepsilon,$$
$$|\mu_2(t) - \mu_2^*(t)| \leqslant \varepsilon,$$

то функция $u_1(x, t)$ будет отличаться от функции $u(x, t)$ в пределах той же точности ε

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| \leqslant \varepsilon.$$

В этом и заключается принцип физической определенности задачи.

Мы подробно провели изучение вопроса о единственности и физической определенности задачи на примере первой краевой задачи для ограниченного отрезка. Теорема единственности первой краевой задачи для ограниченной области в пространстве двух или трех измерений может быть доказана буквальным повторением приведенных выше рассуждений.

Подобные же вопросы возникают при изучении других задач, целый ряд которых был поставлен нами в предшествующем параграфе. Эти задачи требуют некоторого видоизменения метода доказательства.

Единственность решения задачи для неограниченной области (см. п. 7) или задачи без начальных условий имеет место лишь при наложении некоторых дополнительных условий на изучаемые функции.

7. Теорема единственности для бесконечной прямой. При решении задач на бесконечной прямой существенным является требование ограниченности искомой функции во всей области, т. е. существование такого M, что $|u(x, t)| < M$ для всех $-\infty < x < +\infty$ и $t \geqslant 0$.

Если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — непрерывные, ограниченные во всей области изменения переменных (x, t) функции, удовлетворяющие уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, \ t > 0) \tag{35}$$

и условию

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty),$$

то

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, \ t \geqslant 0).$$

Рассмотрим, как обычно, функцию

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

Функция $v(x, t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, ограничена во всей области

$$|v(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| < 2M \quad (-\infty < x < \infty, \ t \geqslant 0)$$

и удовлетворяет условию

$$v(x, 0) = 0.$$

Принцип максимального значения, которым мы пользовались при доказательстве единственности задачи для отрезка, здесь неприменим, так как в неограниченной области функция $v(x, t)$ может нигде не достигать максимальных значений. Чтобы воспользоваться этим принципом, рассмотрим область

$$|x| \leqslant L,$$

где L — вспомогательное число, которое затем будем неограниченно увеличивать, и функцию

$$V(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right). \tag{40}$$

Функция $V(x, t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, в чем нетрудно убедиться дифференцированием, и, кроме того, обладает следующими свойствами:

$$V(x, 0) \geqslant |v(x, 0)| = 0,$$
$$V(\pm L, t) \geqslant 2M \geqslant v(\pm L, t).$$

Пользуясь принципом максимального значения в области $|x| \leqslant L$, будем иметь:

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \leqslant v(x, t) \leqslant \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right). \tag{41}$$

Фиксируем некоторые значения (x, t) и, воспользовавшись произволом выбора L, будем его неограниченно увеличивать. Переходя к пределу при $L \to \infty$, получим:

$$v(x, t) \equiv 0,$$

что и доказывает теорему.

§ 2. Метод разделения переменных

1. Однородная краевая задача. Перейдем к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Изучение общей первой краевой задачи начнем с решения следующей простейшей задачи (I):

найти решение однородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и нулевым граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \tag{5}$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{5}$$

и представимое в виде

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{6}$$

где $X(x)$ — функция только переменного x,
а $T(t)$ — функция только переменного t.

Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (4) и производя деление обеих частей равенства на a^2XT, получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{7}$$

где $\lambda = \text{const}$, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая — только от x.

Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{8'}$$

Граничные условия (5) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{10}$$

исследованную при решении уравнения колебаний в главе II (см. § 3, п. 1). При этом было показано, что только для значений параметра λ,

равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

существуют нетривиальные решения уравнения (8), равные

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{12}$$

Этим значениям λ_n соответствуют решения уравнения (8′)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \tag{13}$$

где C_n — не определенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x)\, T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{14}$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (I). Составим формально ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{15}$$

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{16}$$

т. е. C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $(0, l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \cdot d\xi. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь ряд (15) с коэффициентами C_n, определяемыми по формуле (17), и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (I). Для этого надо доказать, что функция $u(x, t)$, определяемая рядом (15), дифференцируема, удовлетворяет уравнению в области $0 < x < l$, $t > 0$ и непрерывна в точках границы этой области (при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Так как уравнение (4) линейно, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференцировать почленно дважды по x

и один раз по t (см. лемму главы 2, § 3, п. 3). Покажем, что при $t \geqslant \bar{t} > 0$ ($\bar{t}$ — любое вспомогательное число) ряды производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

сходятся равномерно. В самом деле,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \right| < |C_n| \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}.$$

В дальнейшем будут сформулированы дополнительные требования, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$. Предположим сначала, что $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)| < M$; тогда

$$|C_n| = \left|\frac{2}{l}\right| \left| \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \right| < 2M,$$

откуда следует, что

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad \text{для} \quad t \geqslant \bar{t}$$

и аналогично

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad \text{для} \quad t \geqslant \bar{t}.$$

Вообще

$$\left|\frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \partial x^l}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+l} \cdot n^{2k+l} \cdot a^{2k} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad \text{для} \quad t \geqslant \bar{t}.$$

Исследуем сходимость мажорантного ряда $\{\alpha_n\}$, где

$$\alpha_n = N n^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}}. \tag{15'}$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^q}{n^q} \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (n^2+2n+1)\bar{t}}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 \bar{t}}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (2n+1)\bar{t}} = 0.$$

Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (15) любое число раз в области $t \geqslant \bar{t} > 0$. Далее, пользуясь принципом суперпозиции, заключаем, что функция, определенная этим рядом, удовлетворяет уравнению (4). В силу произвольности $\bar{t}$ это имеет

место для всех $t>0$. Тем самым доказано, что при $t>0$ ряд (15) представляет функцию, дифференцируемую нужное число раз и удовлетворяющую уравнению (4)[1]).

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0)=0$ и $\varphi(l)=0$, то ряд

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{15}$$

определяет непрерывную функцию при $t\geqslant 0$.

Действительно, из неравенства

$$|u_n(x,\ t)|<|C_n| \quad (\text{при } t\geqslant 0,\ 0\leqslant x\leqslant l)$$

сразу же следует равномерная сходимость ряда (15) при $t\geqslant 0$, $0\leqslant x\leqslant l$, что и доказывает справедливость сделанного выше утверждения, если учесть, что для непрерывной и кусочно-гладкой функции $\varphi(x)$ ряд из модулей коэффициентов Фурье сходится, если $\varphi(0)=\varphi(l)=0$[2]).

Итак, задача нахождения решения первой краевой задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями и непрерывным, кусочно-гладким начальным условием решена полностью.

2. Функция источника. Преобразуем полученное решение (15), заменяя C_n их значениями:

$$\begin{aligned}u(x,\ t)&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right]\cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x=\\&=\int_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right]\varphi(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

Изменение порядков суммирования и интегрирования всегда законно при $t>0$ в силу того, что ряд в скобках сходится равномерно по ξ при $t>0$[3]).

---

[1]) При доказательстве того, что ряд (15) удовлетворяет уравнению $u_t=a^2u_{xx}$ при $t>0$, была использована только ограниченность коэффициентов Фурье C_n, которая, в частности, будет иметь место для любой ограниченной $\varphi(x)$.

[2]) См. гл. II, § 3, п. 3.

[3]) Ряд $\sum\alpha_n$, где α_n определяется формулой (15′), при $q=0$ является мажорантным для ряда, стоящего в скобках.

Обозначим

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \tag{18}$$

Пользуясь функцией $G(x, \xi, t)$, можно представить функцию $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \tag{19}$$

Функция $G(x, \xi, t)$ называется *функцией мгновенного* точечного *источника* или, более подробно, функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла.

Покажем, что функция источника $G(x, \xi, t)$, рассматриваемая как функция x, представляет распределение температуры в стержне $0 \leqslant x \leqslant l$ в момент времени t, если температура в начальный момент $t = 0$ равна нулю и в этот момент в точке $x = \xi$ мгновенно выделяется некоторое количество тепла (величину которого мы определим позже), а на краях стержня все время поддерживается нулевая температура.

Выражение «количество тепла Q, выделяющееся в точке ξ» обозначает, как обычно, что мы имеем дело с теплом, выделяющимся на «небольшом» интервале около изучаемой точки ξ. Изменение температуры $\varphi_\varepsilon(\xi)$, вызываемое появлением тепла около точки, будет, очевидно, равно нулю вне интервала $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, на котором выделяется тепло, а внутри этого интервала $\varphi_\varepsilon(\xi)$ можно считать положительной, непрерывной и дифференцируемой функцией, для которой

$$c\rho \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = Q, \tag{20}$$

так как левая часть этого уравнения и представляет количество тепла, вызвавшее изменение температуры на величину $\varphi_\varepsilon(\xi)$. Процесс распространения температуры в этом случае определяется формулой (19):

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi. \tag{21}$$

Совершим теперь предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Принимая во внимание непрерывность G при $t > 0$ и равенство (20) и применяя теорему среднего значения при фиксированных значениях x, t,

будем иметь:

$$u_\varepsilon(x,\ t)=\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi=$$

$$=G(x,\ \xi^*,\ t)\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi=G(x,\ \xi^*,\ t)\frac{Q}{c\rho},\qquad(21')$$

где ξ^* — некоторая средняя точка интервала $(\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$. В силу непрерывности функции $G(x,\ \xi,\ t)$ по ξ при $t>0$ получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,\ t)=\frac{Q}{c\rho}\,G(x,\ \xi,\ t)=$$

$$=\frac{Q}{c\rho}\cdot\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi.\qquad(22)$$

Отсюда следует, что $G(x,\ \xi,\ t)$ представляет температурное влияние мгновенного точечного источника мощности $Q=c\rho$, помещенного в момент $t=0$ в точке ξ промежутка $(0,\ l)$.

Отметим следующее свойство функции $G(x,\ \xi,\ t)$: функция $G(x,\ \xi,\ t)\geqslant 0$ при любых x, ξ и $t>0$. Действительно, рассмотрим начальную функцию $\varphi_\varepsilon(x)$, обладающую перечисленными выше свойствами, и соответствующее ей решение (21′). Из неотрицательности начального и граничных условий в силу принципа максимального значения следует, что

$$u_\varepsilon(x,\ t)\geqslant 0$$

для всех $0\leqslant x\leqslant l$ и $t>0$. Отсюда, воспользовавшись формулой (21′), имеем:

$$u_\varepsilon(x,\ t)=G(x,\ \xi^*,\ t)\frac{Q}{c\rho}\geqslant 0\quad(\text{при}\quad t>0).\qquad(21'')$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, из (21′) получим неравенство

$$G(x,\ \xi,\ t)\geqslant 0\quad\text{при}\quad 0\leqslant x,\ \xi\leqslant l\quad\text{и}\quad t>0,$$

которое и надо было доказать.

Этот результат имеет простой физический смысл. Однако установить его непосредственно из формулы (19) было бы затруднительно, поскольку $G(x,\ \xi,\ t)$ представляется знакопеременным рядом.

3. Краевые задачи с разрывными начальными условиями. Изложенная выше теория относится к решениям уравнения теплопроводности, непрерывным в замкнутой области $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant T$. Эти условия непрерывности являются весьма ограничительными. В самом деле, рассмотрим простейшую задачу об остывании равномерно нагретого стержня при нулевой температуре на краях. Дополнительные условия имеют вид

$$u(x,\ 0)=u_0,\quad u(0,\ t)=u(l,\ t)=0.$$

Если $u_0 \neq 0$, то решение этой задачи должно быть разрывным в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$. Этот пример показывает, что поставленные выше условия непрерывности начального значения и условия сопряжения его с граничными значениями исключают из рассмотрения практически важные случаи. Однако формула (19) дает решение краевой задачи и в этом случае.

Таким образом, если мы хотим пользоваться результатами теории, не выходя за границы условий ее применимости, то мы должны будем заняться обобщением изложенной выше теории с тем, чтобы она охватывала основные задачи. В приложениях часто пользуются формулами, выходящими за границы условий их применимости, зачастую вообще не ставя вопроса об условии применимости формул. Последовательное обоснование всех формул было бы весьма громоздким и часто отвлекало бы внимание исследователя от количественных и качественных сторон явления, характерных для физической сущности процесса.

Однако мы считаем нужным, по крайней мере на простейших примерах, дать обоснование математического аппарата, достаточное для решения основных задач.

Рассмотрим краевые задачи с кусочно-непрерывными начальными функциями, не предполагая, что начальная функция сопряжена с граничными условиями. Этот класс дополнительных условий является достаточно общим для потребностей практики и достаточно простым для изложения теории. Нашей целью является доказать, что та же формула (19) дает решение поставленной задачи. Проведем ее исследование в несколько этапов. Докажем предварительно теорему:

Решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, \ t > 0), \tag{4}$$

непрерывное в замкнутой области $(0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T)$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция, обращающаяся в нуль при $x = 0$, $x = l$, определено однозначно и представляется формулой

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) \, d\xi. \tag{19}$$

Эта теорема была доказана выше в предположении дополнительного условия о кусочно-непрерывной дифференцируемости функции $\varphi(\xi)$.

Освободимся от этого условия. Рассмотрим последовательность непрерывных кусочно-дифференцируемых функций $\varphi_n(\xi)$ $(\varphi_n(0) =$

$= \varphi_n(l) = 0$), равномерно сходящуюся к $\varphi(x)$. (В качестве $\varphi_n(x)$ можно выбрать, например, функции, представимые ломаными линиями, совпадающими с $\varphi(x)$ в точках $\frac{l \cdot k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.) Функции $u_n(x, t)$, определяемые формулой (19) через $\varphi_n(x)$, удовлетворяют всем условиям теоремы, так как $\varphi_n(x)$ удовлетворяют условию кусочной дифференцируемости. Эти функции равномерно сходятся и определяют в пределе непрерывную функцию $u(x, t)$. В самом деле, для любого ε можно указать такое $n(\varepsilon)$, что

$$|\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \quad \text{если} \quad n_1, n_2 \geqslant n(\varepsilon),$$

так как эти функции по условию сходятся равномерно. Отсюда в силу принципа максимальных значений следует также, что

$$|u_{n_1}(x, t) - u_{n_2}(x, t)| < \varepsilon \ (0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T), \text{ если } n_1, n_2 \geqslant n(\varepsilon),$$

что и доказывает равномерную сходимость последовательности функций $u_n(x, t)$ к некоторой непрерывной функции $u(x, t)$.

Если мы, фиксировав точку (x, t), перейдем к пределу под знаком интеграла, то получим, что функция

$$u(x, t) = \lim_{n \to \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \to \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

непрерывна в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяет условиям (2). В силу первой сноски на стр. 201 нетрудно убедиться, что она также удовлетворяет уравнению (4). Доказательство теоремы закончено.

Формула (19) дает единственное непрерывное решение рассматриваемой задачи:

Обратимся к доказательству *теоремы единственности* для случая *кусочно-непрерывной начальной функции* $\varphi(x)$, не предполагая, что эта функция сопряжена с граничными условиями. Докажем, что функция, непрерывная в области $t > 0$, удовлетворяющая уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{4}$$

в области $0 < x < l$, $t > 0$ нулевым граничным условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \tag{5}$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

определена однозначно, если:

1) она непрерывна в точках непрерывности функции $\varphi(x)$ и

2) ограничена в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant \overline{t}_0$, где $\overline{t}_0$ — произвольное положительное число.

Предположим, что такая функция существует. Очевидно, что в силу предшествующей теоремы она может быть представлена в области $t > \overline{t}$ формулой

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t - \overline{t})\, \varphi_{\overline{t}}(\xi)\, d\xi \quad (t > \overline{t} > 0) \tag{19'}$$

при любом $\overline{t}$, где $\overline{t}$ — вспомогательное значение,

$$0 < \overline{t} \leqslant t, \qquad \varphi_{\overline{t}}(x) = u(x, \overline{t}).$$

Совершим предельный переход в этой формуле при $\overline{t} \to 0$, сохраняя x и t неизменными. Покажем [1]), что возможен переход под знаком интеграла и, следовательно, функция $u(x, t)$ представима в виде интеграла

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi \qquad [\varphi(\xi) = u(\xi, 0)], \tag{19}$$

однозначно ее определяющего.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки разрыва функции $\varphi(x)$. Полагая $x_0 = 0$ и $x_{n+1} = l$ (рис. 38) и беря замкнутые отрезки I_k $(x_k + \delta \leqslant x \leqslant x_{k+1} - \delta)$

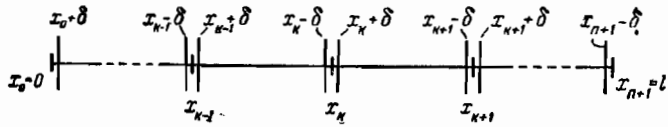


Рис. 38.

$(k = 0, 1, \ldots, n)$, где δ — некоторое фиксированное достаточно малое число, нетрудно убедиться, что подинтегральная функция из (19') равномерно сходится к подинтегральной функции из (19) на всяком отрезке I_k $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$. На отрезках I_k $(x_k - \delta \leqslant x \leqslant x_k + \delta)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$, I_0 $(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta)$, и I_{n+1} $(x_{n+1} - \delta \leqslant x \leqslant x_{n+1})$ подинтегральные выражения в (19) и (19')

---

[1]) Доказываемая ниже теорема является частным случаем теоремы Лебега о возможности перехода к пределу под знаком интеграла, если последовательность функций $F_n(x)$ почти всюду сходится к предельной суммируемой функции $F(x)$ и если эта последовательность ограничена суммируемой функцией. Это доказательство приводится, чтобы избежать пользования теоретико-множественными понятиями. Если воспользоваться теоретико-множественными понятиями, то совершенно аналогично можно доказать теорему о том, что решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям, однозначно определено:

1) если $u(x, t) \leqslant F(x)$, где $F(x)$ — некоторая суммируемая функция и

2) если почти всюду

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — заданная начальная суммируемая функция.

ограничены некоторым числом N при любом $\bar{t}\,(0 \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{t}_0)$ в силу предположенной ограниченности функции $u(x, t)$ и в силу непрерывности $G(x, \xi, t)$ при $0 \leqslant \xi \leqslant l$, $t > 0$. Разбивая разность интегралов (19) и (19′) на $2n+3$ интеграла, взятых по $I_k\,(k = 0, 1, \ldots, n)$ и $\bar{I}_k\,(k = 0, 1, \ldots, n+1)$, видим, что эта разность может быть сделана меньше наперед заданного числа ε, если

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3}\,\frac{1}{4N},$$

так что

$$\left|\int_{\bar{I}_k} [G(x, \xi, t-\bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)]\,d\xi\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3},$$

и если $\bar{t}$ выбрано настолько малым, что

$$|\,G(x, \xi, t-\bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,| < \frac{1}{l}\,\frac{\varepsilon}{2n+3} \text{ для } t \leqslant \bar{t} \text{ на } I_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

так что

$$\int_{\bar{I}_k} [G(x, \xi, t-\bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)]\,d\xi < \frac{\varepsilon}{2n+3} \text{ для } t \leqslant \bar{t}\ (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|\int_0^l [G(x, \xi, t-\bar{t})\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)]\,d\xi\right| < \varepsilon \text{ для } t \leqslant \bar{t},$$

доказывающее законность перехода к пределу под знаком интеграла. Таким образом, если существует функция $u(x, t)$, удовлетворяющая условиям теоремы, то она представима в виде (19), что и доказывает единственность такой функции.

Докажем теперь, что формула (19) представляет ограниченное решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (2) для любой кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$, непрерывное во всех точках непрерывности $\varphi(x)$.

Эту теорему мы докажем в два приема. Докажем, что она верна, если $\varphi(x)$ — линейная функция:

$$\varphi(x) = cx. \tag{2′}$$

Рассмотрим последовательность вспомогательных функций (рис. 39)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} cx \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant l\left(1 - \dfrac{1}{n}\right), \\ \alpha(l-x) \text{ для } l\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

где α определяется из условия непрерывности функции $\varphi_n(x)$ в точке $x = l\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$cl\frac{n-1}{n} = \alpha\frac{l}{n}, \text{ т. е. } \alpha = (n-1)c.$$

Функции $u_n(x, t)$, определенные при помощи формулы (19) для $\varphi_n(x)$, являются непрерывными решениями уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями и начальными условиями

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x).$$

Так как

$$\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

то в силу принципа максимальных значений

$$u_n(x, t) \leqslant u_{n+1}(x, t).$$

Функция $U_0(x) = cx$ является непрерывным решением уравнения теплопроводности. В силу принципа максимального значения

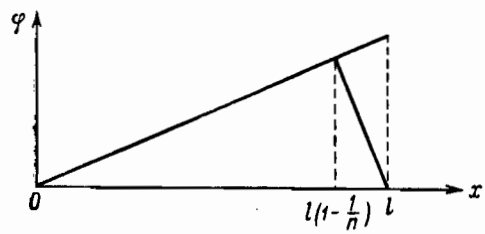


Рис. 39.

$$u_n(x, t) \leqslant U_0(x),$$

так как это неравенство имеет место при $x = 0$, $x = l$ и $t = 0$. Таким образом, $u_n(x, t)$ есть монотонно неубывающая последовательность, ограниченная сверху функцией $U_0(x)$, откуда следует, что эта последовательность сходится. Нетрудно видеть, что

$$u(x, t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^l G(x, \xi, t)\varphi_n(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_0^l G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\,d\xi \leqslant U_0(x),$$

так как переход к пределу под знаком интеграла законен. В силу первой сноски на стр. 201 эта функция удовлетворяет уравнению и нулевым граничным условиям при $t > 0$. Докажем, что эта функция непрерывна при $t = 0$ для $0 \leqslant x < l$. Пусть $x_0 < l$. Выберем n так, чтобы $x_0 < l\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. В этом случае $\varphi_n(x_0) = U_0(x_0)$. Принимая во внимание, что

$$u_n(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant U_0(x)$$

и что

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u_n(x, t) = \lim_{x \to x_0} U_0(x) = \varphi(x_0),$$

заключаем, что существует предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

не зависящий от способа стремления $x \to x_0$ и $t \to 0$. Отсюда и следует непрерывность $u(x, t)$ в точке $(x_0, 0)$. Эта функция ограничена так как она не превосходит $U_0(x)$. Итак, для $\varphi(x) = cx$ теорема доказана.

Заменой x на $l - x$ убеждаемся в том, что теорема верна для

$$\varphi(x) = b(l - x). \qquad (2'')$$

Отсюда следует, что она верна для любой функции типа

$$\varphi(x) = B + Ax,$$

так как подобная функция может быть получена суммированием (2') и (2''). Далее, отсюда следует также, что теорема верна для любой непрерывной функции без предположения о том, что $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. В самом деле, любую функцию $\varphi(x)$ такого типа можно представить в виде

$$\varphi(x) = \left[\varphi(0) + \frac{x}{l}(\varphi(l) - \varphi(0))\right] + \psi(x),$$

где слагаемое в квадратных скобках — линейная функция, а $\psi(x)$ — непрерывная функция, обращающаяся в нуль на концах отрезка: $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Так как мы убедились уже в том, что для каждого слагаемого теорема применима, то отсюда следует, что теорема верна и для $\varphi(x)$.

Обратимся теперь к доказательству теоремы для произвольной кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$. Формула (19) и в этом случае определяет решение, удовлетворяющее уравнению и нулевым граничным условиям.

Пусть точка x_0 — какая-либо точка непрерывности функции $\varphi(x)$. Докажем, что для любого ε можно найти $\delta(\varepsilon)$ такое, что $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$, если $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ и $t < \delta(\varepsilon)$. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0 существует $\eta(\varepsilon)$ такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \eta(\varepsilon),$$

откуда

$$\varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \eta(\varepsilon). \qquad (23)$$

Построим вспомогательные непрерывные дифференцируемые функции $\overline{\varphi}(x)$ и $\underline{\varphi}(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\varphi}(x) &= \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} && \text{для} \quad |x - x_0| < \eta(\varepsilon), \\ \overline{\varphi}(x) &\geqslant \varphi(x) && \text{для} \quad |x - x_0| > \eta(\varepsilon), \end{aligned}\right\} \quad (а)$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\varphi}(x) &= \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} && \text{для} \quad |x - x_0| < \eta(\varepsilon), \\ \underline{\varphi}(x) &\leqslant \varphi(x) && \text{для} \quad |x - x_0| > \eta(\varepsilon). \end{aligned}\right\} \quad (б)$$

На интервале $|x - x_0| > \eta(\varepsilon)$ функции $\overline{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ удовлетворяют только условиям (а) и (б), а в остальном произвольны. В силу неравенств (23),

$$\underline{\varphi}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \overline{\varphi}(x). \quad (24)$$

Рассмотрим функции

$$\overline{u}(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \overline{\varphi}(\xi)\, d\xi,$$

$$\underline{u}(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \underline{\varphi}(\xi)\, d\xi.$$

В силу непрерывности функций $\overline{\varphi}(x)$ и $\underline{\varphi}(x)$ функции $\overline{u}(x, t)$ и $\underline{u}(x, t)$ непрерывны в точке x_0, т. е. найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\left.\begin{aligned} |\overline{u}(x, t) - \overline{\varphi}(x)| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \\ |\underline{u}(x, t) - \underline{\varphi}(x)| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}(x, t) &\leqslant \overline{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon, \\ \underline{u}(x, t) &\geqslant \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon).$$

В силу неотрицательности функции $G(x, \xi, t)$ из формулы (24) следует, что

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \overline{u}(x, t). \quad (25)$$

Отсюда получаем неравенства

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \leqslant u(x, t) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon)$$

или

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

что и требовалось доказать. Ограниченность функции $|u(x, t)|$ следует из (25) и из ограниченности функций $\bar{u}(x, t)$ и $\underline{u}(x, t)$. Этим теорема доказана.

4. Неоднородное уравнение теплопроводности. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = 0 \tag{26}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Будем искать решение этой задачи $u(x, t)$ в виде ряда Фурье по $\sin \frac{\pi n}{l} x$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{27}$$

считая при этом t параметром. Для нахождения функции $u(x, t)$ надо определить функции $u_n(t)$. Представим функцию $f(x, t)$ в виде ряда

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \tag{28}$$

Подставляя предполагаемую форму решения в исходное уравнение (1), будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - f_n(t) \right\} = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$\dot{u}_n(t) = -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) + f_n(t). \tag{29}$$

Пользуясь начальным условием для $u(x, t)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

получаем начальное условие для $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \tag{30}$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (29) с нулевым начальным условием (30)[1]), находим:

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau. \tag{31}$$

Подставляя выражение (31) для $u_n(t)$ в формулу (27), получим решение исходной задачи в виде

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{32}$$

Воспользуемся выражением (28) для $f_n(\tau)$ и преобразуем найденное решение (32):

$$u(x,\ t) = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau) f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{33}$$

где

$$G(x,\ \xi,\ t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \tag{34}$$

совпадает с функцией источника, определяемой формулой (18).

Выясним физический смысл полученного решения

$$u(x,\ t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau) f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{33}$$

Предположим, что функция $f(\xi, \tau)$ отлична от нуля лишь в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0, \tau_0)$

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \Delta\tau_0.$$

Функция $F(\xi, \tau) = cpf(\xi, \tau)$ представляет плотность тепловых источников. Общее количество тепла, выделяющееся на отрезке $(0, l)$ за

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 96.

все время действия источника (т. е. за $\Delta\tau$), равно

$$Q = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} c\rho f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{35}$$

Применим теорему о среднем к выражению

$$u(x,\ t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau) f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x,\ \xi,\ t-\tau)\, f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau = G(x,\ \bar{\xi},\ t-\bar{\tau}) \cdot \frac{Q}{c\rho} = \bar{u}(x,\ t),$$

где

$$\xi_0 < \bar{\xi} < \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 < \bar{\tau} < \tau_0 + \Delta\tau.$$

Переходя к пределу при $\Delta\xi \to 0$ и $\Delta\tau \to 0$, получим функцию

$$u(x,\ t) = \lim_{\substack{\Delta\xi \to 0 \\ \Delta\tau \to 0}} \bar{u}(x,\ t) = \frac{Q}{c\rho} G(x,\ \xi_0,\ t-\tau_0), \tag{36}$$

которую можно интерпретировать как функцию влияния мгновенного источника тепла, сосредоточенного в точке ξ_0 в момент τ_0.

Если известна функция $\frac{Q}{c\rho} G(x,\ \xi,\ t-\tau)$, представляющая действие единичного мгновенного сосредоточенного источника, то действие источников, непрерывно распределенных с плотностью $F(x,\ t) = c\rho f(x,\ t)$, должно выражаться формулой (33), как это непосредственно следует из физического смысла функции $G(x, \xi, t-\tau)$.

Итак, температурное влияние тепловых источников, действующих в области $(\xi_0,\ \xi_0+\Delta\xi)$ $(\tau_0,\ \tau_0+\Delta\tau)$, дается выражением

$$G(x,\ \xi,\ t-\tau) f(\xi,\ \tau)\, \Delta\xi\, \Delta\tau \quad \left(\frac{Q}{c\rho} = f(\xi,\ \tau)\, \Delta\xi\, \Delta\tau\right).$$

Если источники распределены непрерывно, то, суммируя тепловые влияния источников, действующих во всей области $0 \leqslant \xi \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, получим после предельного перехода при $\Delta\xi \to 0$ и $\Delta\tau \to 0$

$$u(x,\ t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau) f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Таким образом, исходя из физического смысла функции источника $G(x,\ \xi,\ t)$, можно было бы сразу написать выражение (33) для функции, дающей решение неоднородного уравнения.

Имея форму, в которой должно представляться решение задачи, можно исследовать условия применимости этой формулы в отношении функции $f(\xi, \tau)$. Мы не будем проводить этого исследования.

Мы рассматривали здесь неоднородное уравнение с нулевыми начальными условиями. Если начальное условие отлично от нуля, то к этому решению следует прибавить решение однородного уравнения с заданным начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$, найденное в п. 1.

5. Общая первая краевая задача. Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

с дополнительными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \tag{37}$$

представляющую отклонение от некоторой известной функции $U(x, t)$.

Эта функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x, t),$$
$$\bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$
$$v(0, t) = \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t),$$
$$v(l, t) = \bar{\mu}_2(t), \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t).$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x, t)$ таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \text{ и } \bar{\mu}_2(t) = 0,$$

для чего достаточно положить [1])

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Таким образом, нахождение функции $u(x, t)$, дающей решение общей краевой задачи, сведено к нахождению функции $v(x, t)$, дающей решение краевой задачи с нулевыми граничными условиями. Метод нахождения функции $v(x, t)$ дан в п. 4.

[1]) См. гл. II, § 3, п. 5.

Изложенная выше формальная схема решения задач при наличии неоднородностей в уравнении и граничных условиях не всегда удобны для представления искомой функции $u(x, t)$. Трудности, возникающие при нахождении вспомогательной функции $v(x, t)$, зависят от функции $U(x, t)$, от которой ищется отклонение.

В частности, для задач со стационарными неоднородностями удобнее выделять стационарное решение и искать отклонение от этого решения [1]).

Рассмотрим, например, задачу для ограниченного стержня $(0, l)$, концы которого поддерживаются при постоянных температурах u_0 и u_1:

$$u_t = a^2 u_{xx},$$
$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u(0, t) = u_0,$$
$$u(l, t) = u_1.$$

Решение будем искать в виде суммы

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

где $\bar{u}(x)$ — стационарная температура, а $v(x, t)$ — отклонение от стационарной температуры.

Для функций $\bar{u}(x)$ и $v(x, t)$ будем иметь условия

$$\begin{aligned} &\bar{u}'' = 0, && v_t = a^2 v_{xx}; \\ &\bar{u}(0) = u_0, && v(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}(x) = \varphi_1(x); \\ &\bar{u}(l) = u_1, && v(0, t) = 0, \\ & && v(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\bar{u}(x) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0).$$

Функцию $v(x, t)$, определяемую начальным условием и однородными граничными условиями, без труда находим методом разделения переменных.

ЗАДАЧИ

1. Вывести уравнение для процесса нагревания однородной тонкой проволоки постоянным электрическим током, если на ее поверхности происходит теплообмен с окружающей средой.

Ответ: $u_t = a^2 u_{xx} - hu + q$, где h и q — некоторые постоянные.

2. Вывести уравнение диффузии в среде, равномерно движущейся в направлении оси x со скоростью w. Рассмотреть случай одной независимой переменной.

Ответ: $u_t = Du_{xx} - wu_x$ (D — коэффициент диффузии).

---

[1]) См. гл. II. § 3, п. 6.

3. Исходя из уравнения Максвелла, предполагая $E_x = E_z = 0$, $H_z = 0$ и пренебрегая токами смещения, показать, что в однородной проводящей среде составляющая электромагнитного поля E_y удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t},$$

где σ — проводимость среды, c — скорость света. Вывести уравнения для H_x.

4. Дать физическое истолкование следующих граничных условий в задачах теплопроводности и диффузии:

а) $u(0, t) = 0$, б) $u_x(0, t) = 0$, в) $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0$, $u_x(l, t) + hu(l, t) = 0$ $(h > 0)$.

5. Решить задачу об остывании равномерно нагретого однородного стержня при нулевой температуре на концах, предполагая отсутствие теплообмена на боковой поверхности.

Ответ: $u(x, t) =$

$$= \frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2(2k-1)^2\pi^2}{l^2}t}\frac{1}{(2k-1)}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x \quad [u(x, 0) = U_0].$$

6. Начальная температура стержня $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$ при $0 < x < l$. Температура концов поддерживается постоянной $u(0, t) = u_1$; $u(l, t) = u_2$ при $0 < t < \infty$. Найти температуру стержня, если теплообмен на боковой поверхности отсутствует. Найти стационарную температуру.

7. Решить задачу 6 при следующих граничных условиях: на одном конце поддерживается постоянная температура, второй конец теплоизолирован.

8. Решить задачу о нагревании тонкой однородной проволоки постоянным электрическим током, если начальная температура, граничная температура, а также температура окружающей среды равны нулю.

9. Цилиндр длины l, заполненный воздухом при давлении и температуре окружающей среды, открывают с одного конца в начальный момент времени, и из окружающей атмосферы, где концентрация некоторого газа равна u_0, начинается диффузия газа в цилиндр. Найти количество газа, диффундировавшего в цилиндр за время t, если начальная концентрация газа в цилиндре равна нулю.

10. Решить задачу 9 в предположении, что левый конец цилиндра закрыт полупроницаемой перегородкой.

11. Решить задачу об остывании однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура $u(x, 0) = \varphi(x)$, а на концах происходит теплообмен со средой нулевой температуры. Рассмотреть частный случай $\varphi(x) = u_0$.

12. Решить задачу 11, предполагая, что температура окружающей среды равна U_0.

13. Решить задачу 11, считая, что на боковой поверхности происходит теплообмен со средой, температура которой:

а) равна нулю

б) постоянна и равна u_1.

14. Найти установившуюся температуру стержня, пренебрегая теплообменом на боковой поверхности и считая, что один конец стержня теплоизолирован, а ко второму концу подводится поток тепла, гармонически меняющийся во времени.

15. Решить задачу 11, считая, что один конец стержня имеет нулевую температуру, а температура второго конца гармонически меняется во времени.

16. Стержень $(0, l)$ составлен из двух однородных кусков одинакового поперечного сечения, соприкасающихся в точке $x = x_0$ и обладающих характеристиками a_1, k_1 и, соответственно, a_2, k_2. Найти установившуюся температуру в таком стержне (тепловые волны), если один конец стержня $(x = 0)$ поддерживается при нулевой температуре, а температура второго меняется синусоидально во времени.

17. Левый конец составного стержня задачи 16 поддерживается при температуре, равной нулю, а правый—при температуре $u(l, t) = u_1$, начальная же температура стержня равна нулю. Найти температуру $u(x, t)$ стержня на регулярном режиме (первый член разложения).

18. Найти температуру $u(x, t)$ стержня, начальная температура которого равна нулю, а граничные условия имеют вид

$$u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, \quad u(l, t) = B,$$

где A, B и $\alpha > 0$ — постоянные.

§ 3. Задачи на бесконечной прямой

1. Функция источника для неограниченной области. В предыдущем параграфе мы получили выражение для функции мгновенного точечного источника на ограниченном отрезке $(0, l)$ в следующем виде [1]):

$$G_l(x, \xi, t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot \sin\frac{\pi n}{l}\xi. \qquad (1)$$

Если точечный источник имеет мощность Q, то процесс распространения температуры будет характеризоваться функцией

$$u(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G_l(x, \xi, t). \qquad (2)$$

---

[1]) Мы вводим у функции $G_l(x, \xi, t)$ индекс l, чтобы отличить ее от функции источника $G(x, \xi, t)$ для бесконечной прямой, которой мы будем заниматься в этом параграфе.

Из того, что было сказано при постановке задачи о распространении тепла на бесконечной прямой, ясно, что искомую функцию $G(x, \xi, t)$ надо понимать как предел соответствующей функции (1) для конечного отрезка, когда оба его конца удаляются в бесконечность. Для вычисления этого предела преобразуем формулу (1) так, чтобы концы заданного отрезка имели координаты $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$. Это достигается введением новых координат x' и ξ'

$$x' = x - \frac{l}{2}, \quad \xi' = \xi - \frac{l}{2}.$$

Функция влияния мгновенного точечного источника мощности $Q = c\rho$, помещенного в точке ξ' отрезка $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, будет иметь вид

$$G_l(x', \xi', t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l}\left(x' + \frac{l}{2}\right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l}\left(\xi' + \frac{l}{2}\right). \quad (1')$$

Преобразуем произведение синусов. Если n четно, т. е. $n = 2m$, то

$$\sin \frac{2\pi m}{l}\left(x' + \frac{l}{2}\right) \cdot \sin \frac{2\pi m}{l}\left(\xi' + \frac{l}{2}\right) = \sin \frac{2\pi m}{l} x' \sin \frac{2\pi m}{l} \xi'.$$

Если n нечетно, т. е. $n = 2m + 1$, то

$$\sin \frac{(2m+1)\pi}{l}\left(x' + \frac{l}{2}\right) \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi}{l}\left(\xi' + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \cos \frac{(2m+1)\pi}{l} x' \cdot \cos \frac{(2m+1)\pi}{l} \xi'.$$

Таким образом,

$$G_l(x', \xi', t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty}{}'' e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x' \sin \frac{\pi n}{l} \xi' +$$
$$+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty}{}' e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \cos \frac{\pi n}{l} x' \cos \frac{\pi n}{l} \xi', \quad (1'')$$

причем штрихи у знака суммы $''$ (или $'$) указывают, что суммирование проводится только по четным (или нечетным) значениям n.

Будем искать предел первой суммы при $l \to \infty$. Ее можно представить в виде

$$\frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty}{}'' e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x' \cdot \sin \lambda_n \xi' = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty}{}'' f_1(\lambda_n) \Delta\lambda, \quad (3)$$

где

$$f_1(\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x' \sin \lambda \xi', \quad \Delta\lambda = \frac{2\pi}{l} \text{ и } \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Сумма (3) подобна интегральной сумме для функции $f_1(\lambda)$ при интегрировании в промежутке $0 \leqslant \lambda < \infty$. Когда $l \to \infty$, то $\Delta\lambda \to 0$. Совершая предельный переход к интегралу, будем иметь [1]):

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty}{}'' f_1(\lambda_n)\,\Delta l = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f_1(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin\lambda x' \cdot \sin\lambda\xi'\,d\lambda. \quad (4)$$

Аналогично, вторую сумму можно представить в виде

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}{}' e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \cos\lambda_n x' \cos\lambda_n \xi' = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}' f_2(\lambda_n)\,\Delta\lambda, \quad (5)$$

где

$$f_2(\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos\lambda x' \cos\lambda\xi', \quad \Delta\lambda = \frac{2\pi}{l} \text{ и } \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Совершая предельный переход, видим, что предел второй суммы равен

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}' f_2(\lambda_n)\,\Delta\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f_2(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos\lambda x' \cos\lambda\xi'\,d\lambda. \quad (6)$$

---

[1]) В формуле (4) мы получили несобственные интегралы в правой части как пределы интегральных сумм, взятых по всему бесконечному отрезку $(0, \infty)$. Для обоснования этого перехода нужно показать, что он не противоречит обычному определению несобственного интеграла:

$$\int_0^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda = \lim_{L \to \infty} \int_0^{L} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Для этого докажем, что если непрерывная функция $f(\lambda)$, определенная для $0 \leqslant \lambda < \infty$, такова, что для некоторого разбиения оси $(0, \infty)$ с равномерными звеньями $(\alpha \leqslant \Delta\lambda_i \leqslant \beta)$ интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i^*)\,(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \qquad (\lambda_{i-1} \leqslant \lambda_i^* \leqslant \lambda_i)$$

при любом выборе λ_i^* сходится, то существует интеграл

$$\int_0^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Докажем, что существует предел последовательности

$$\lim_{\mu_k \to \infty} \int_0^{\mu_k} f(\lambda)\,d\lambda,$$

Интегральные суммы для функций f_1 и f_2 образуются при помощи разбиения промежутка $(0, l)$ на равные интервалы длиной $\Delta\lambda = \frac{2\pi}{l}$. Различие их заключается в том, что в первой сумме промежуточные точки являются правыми концами интервалов, а во второй сумме — средними точками этих интервалов.

Объединяя полученные результаты, будем иметь:

$$G(x, \xi, t) = \lim_{l \to \infty} G_l(x, \xi, t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x \sin \lambda \xi \, d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x \cos \lambda \xi \, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (x - \xi) \, d\lambda.$$

не зависящий от способа стремления μ_k к бесконечности. Рассмотрим сначала случай $\mu_k = \lambda_k$. Разность

$$(*) \qquad \int_0^{\lambda_{k+h}} f(\lambda) \, d\lambda - \int_0^{\lambda_k} f(\lambda) \, d\lambda = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+h}} f(\lambda) \, d\lambda \leqslant \sum_{i=k}^{k+h-1} f(\overline{\lambda_i}) (\lambda_{i+1} - \lambda_i);$$

аналогично

$$(**) \qquad \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+h}} f(\lambda) \, d\lambda \geqslant \sum_{i=k}^{k+h-1} f(\underline{\lambda_i}) (\lambda_{i+1} - \lambda_i),$$

где $f(\overline{\lambda_i})$ и $f(\underline{\lambda_i})$ — наибольшее и соответственно наименьшее значения $f(\lambda)$ в интервале $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$. Из сходимости интегральной суммы по выбранной последовательности λ_k следует, что для любого ε существует такое $N(\varepsilon)$, что при $k > N(\varepsilon)$

$$\left| \sum_{i=k}^{k+h} f(\lambda_i) (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Отсюда и из соотношений (*) и (**) следует, что

$$\left| \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+h}} f(\lambda) \, d\lambda \right| < \varepsilon \text{ для } k > N(\varepsilon).$$

Нетрудно видеть, что из сходимости любой интегральной суммы по данному разбиению следует, что $f(\lambda)$ стремится к нулю при λ, стремящемся к бесконечности. Отсюда следует, что

$$\left| \int_{\mu_k}^{\mu_{k+l}} f(\lambda) \, d\lambda - \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+h}} f(\lambda) \, d\lambda \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon),$$

Итак,

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (x - \xi)\, d\lambda. \tag{7}$$

Вычислим вспомогательный интеграл

$$I = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \alpha} \cos \lambda\beta\, d\lambda \quad (\alpha > 0), \tag{8}$$

где λ_k и λ_{k+h} — точки заданного разбиения, ближайшие к точкам μ_n и μ_{n+l}.

Это и доказывает существование несобственного интеграла

$$\int_0^\infty f(\lambda)\, d\lambda.$$

Покажем теперь, что существует предел

$$\lim_{\Delta\lambda_i \to 0} \sum_{i=0}^{\infty} f(\lambda_i^*)\, \Delta\lambda_i = \int_0^\infty f(\lambda)\, d\lambda.$$

Рассмотрим разность

$$\left| \int_0^\infty f(\lambda)\, d\lambda - \sum_{i=0}^{\infty} f(\lambda_i^*)\, \Delta\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_0^{\lambda_k} f(\lambda)\, d\lambda - \sum_0^{\lambda_k} f(\lambda_i^*)\, \Delta\lambda_i \right| + \left| \int_{\lambda_k}^\infty f(\lambda)\, d\lambda \right| + \left| \sum_{\lambda_k}^{\infty} f(\lambda_i^*)\, \Delta\lambda_i \right|;$$

при надлежащем выборе $\Delta\lambda_i$ и λ_k каждая из сумм в правой части может быть сделана меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, что и доказывает наше утверждение. Итак, наша лемма доказана. (Однако следующее из леммы определение несобственного интеграла является неудобным, так как можно указать примеры функций, удовлетворяющих обычному определению, но не удовлетворяющих данному.)

В нашем случае

$$f(\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x \cos \lambda\xi \text{ или } f(\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x \sin \lambda\xi.$$

Интегральная сумма, составленная при разбиении на равные части $\lambda_i - \lambda_{i-1} = \Delta\lambda$,

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} f(\lambda_i^*)\, \Delta\lambda \right| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \overline{f}\,(\lambda_{i-1})\, \Delta\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_{i-1}^2 a^2 t}\, \Delta\lambda < \Delta\lambda \cdot \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(i-1)^2 (\Delta\lambda)^2 a^2 t}.$$

В сходимости этой суммы легко убедиться на основании признака Даламбера, взяв отношение последующего члена к предыдущему

$$\frac{e^{-i^2 \Delta\lambda^2 a^2 t}}{e^{-(i-1)^2 \Delta\lambda^2 a^2 t}} = e^{-(2i-1)(\Delta\lambda)^2 a^2 t}.$$

зависящий от двух параметров α и β. Фиксируем значение α и обозначаем этот интеграл через $I(\beta)$. Вычислим производную

$$\frac{dI}{d\beta} = -\int_0^\infty e^{-\lambda^2\alpha}\,\lambda \sin \lambda\beta\, d\lambda$$

при помощи дифференцирования под знаком интеграла, которое, очевидно, законно. Интегрируя по частям, получим:

$$\frac{dI}{d\beta} = \sin\lambda\beta\,\frac{1}{2\alpha}\,e^{-\lambda^2\alpha}\Big|_0^\infty - \frac{\beta}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\lambda^2\alpha}\cos\lambda\beta\, d\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta).$$

Таким образом, для $I(\beta)$ мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{I'}{I} = -\frac{\beta}{2\alpha},$$

откуда

$$I(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Полагая $\beta = 0$, найдем значение постоянной

$$C = I(0) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2\alpha}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

так как

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отсюда получаем

$$I(\beta) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2\alpha}\cos\lambda\beta\, d\lambda = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \tag{9}$$

Применяя формулу (9) к интегралу (7), приходим к выражению *функции источника на бесконечной прямой*

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{10}$$

Эту функцию часто называют *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$G(x, \xi, t-t_0) = \frac{Q}{c\rho 2\sqrt{\pi a^2(t-t_0)}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \tag{10'}$$

представляет температуру в точке x в момент времени t, если в начальный момент времени $t = t_0$ в точке ξ выделяется количество тепла $Q = c\rho$.

1) Функция $G(x, \xi, t - t_0)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным (x, t) [1]), что можно проверить непосредственным дифференцированием.

2) Количество тепла, находящееся на оси x в момент $t > t_0$, равно

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0)\, dx = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} =$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = Q = c\rho,$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \sqrt{\pi}$$

$$\left(\alpha = \frac{x - \xi}{2\sqrt{a^2(t - t_0)}}, \quad d\alpha = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t - t_0)}}\right).$$

Таким образом, количество тепла на нашей прямой не меняется с течением времени. Функция $G(x, \xi, t - t_0)$ зависит от времени только через аргумент $\theta = a^2(t - t_0)$, так что эту функцию можно записать в виде

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}. \qquad (10'')$$

На рис. 40 изображен график функции G в зависимости от x для различных значений θ. Почти вся площадь, ограниченная этой кривой, находится над промежутком

$$(\xi - \varepsilon, \ \xi + \varepsilon),$$

---

[1]) В самом деле,

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x - \xi}{2[a^2(t - t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{[a^2(t - t_0)]^{3/2}} + \frac{(x - \xi)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{5/2}}\right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{a^2}{2[a^2(t - t_0)]^{3/2}} + \frac{a^2(x - \xi)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{5/2}}\right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

т. е.

$$G_t = a^2 G_{xx}.$$

где ε — сколь угодно малое число, если только $\theta = a^2(t - t_0)$ — достаточно малое число. Величина этой площади, умноженная на cp, равна количеству тепла, помещенному в начальный момент. Таким образом, для малых значений $t - t_0 > 0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки ξ. Из сказанного выше следует, что в момент t_0 все количество тепла помещается в точке ξ.

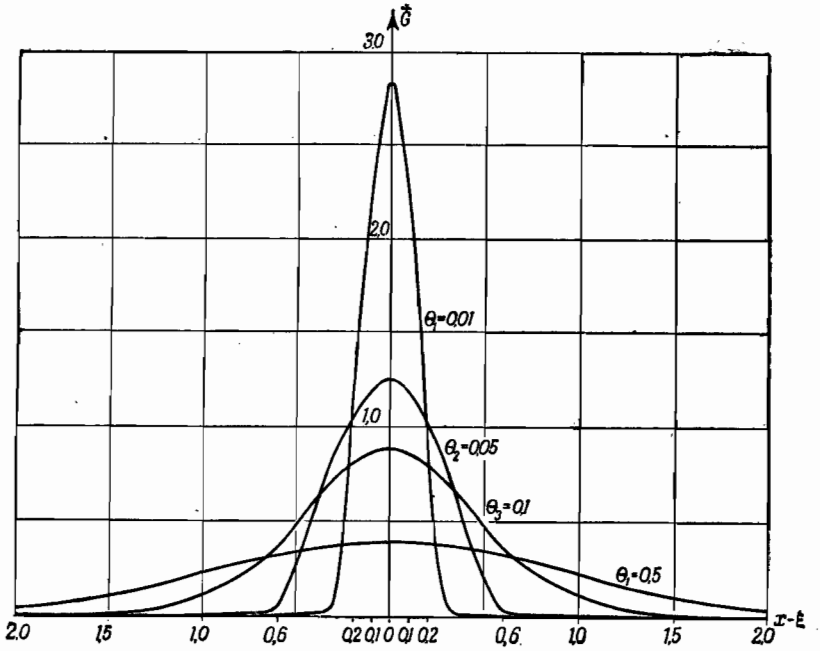


Рис. 40.

Рассматривая изменение температуры в фиксированной точке $x = \xi + h$ с течением времени при $h = 0$, т. е. при $x = \xi$, получим:

$$G_{x=\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

Таким образом, температура в той точке, где выделяется тепло, для малых θ неограниченно велика.

Если $x \neq \xi$, т. е. $h \neq 0$, то функция G представляется в виде произведения двух множителей

$$G_{x \neq \xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}\right] e^{-\frac{h^2}{4\theta}}.$$

Второй сомножитель меньше единицы: при больших θ он ≈ 1. при малых θ он ≈ 0. Отсюда следует, что $G_{x \neq \xi} = G_{x=\xi}$ для боль-

ших θ; $G_{x\neq\xi} \ll G_{x=\xi}$ для малых θ. Чем меньше h, т. е. чем ближе x к ξ, тем больше второй множитель. Графики функций $G_{x=\xi}$ и $G_{x\neq\xi}$ при $h_2 < h_1$ приведены на рис. 41.

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\theta\to 0} G_{x\neq\xi} = 0.$$

Раскрывая неопределенность, находим:

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right]e^{-\frac{h^2}{4\theta}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\lim_{\theta\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}}}{\frac{h^2}{4\theta^2}e^{\frac{h^2}{4\theta}}} = 0.$$

Формула (10′) показывает, что во всякой точке x температура, создаваемая мгновенным точечным источником, действующим в начальный момент $t=0$, отлична от нуля для сколь угодно малых моментов времени. Подобный факт можно было бы интерпретировать как результат бесконечно быстрого распространения температуры (бесконечная скорость). Однако это противоречит молекулярно-кинетическим представлениям о природе тепла. Такое противоречие получается в связи с тем, что при выводе уравнения теплопроводности мы пользовались феноменологическими представлениями о растекании тепла, не учитывающими инерционность процесса движения молекул.

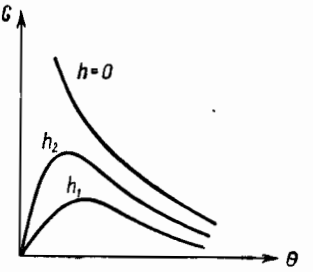


Рис. 41.

2. Распространение тепла на бесконечной прямой. Задача о распространении тепла в этом случае ставится следующим образом:

найти ограниченную функцию $u(x, t)$ $(-\infty < x < \infty, t \geqslant 0)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0) \tag{11}$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{12}$$

Выполнение начального условия мы, как и ранее, будем предполагать в том смысле, что на функцию $u(x, t)$ при $t=0$, кроме условия (12), накладывается условие непрерывности [1]).

Нетрудно найти аналитическое представление искомого решения. Пусть вспомогательная функция $\bar{\varphi}(x)$ всюду равна нулю, кроме неко-

[1]) Как мы видели в п. 7 § 1, решение уравнения теплопроводности однозначно определяется своими начальными условиями, если оно ограничено. Поэтому в формулировку теорем вводится условие ограниченности.

торого малого интервала $(\xi_0-\delta,\ \xi_0+\delta)$, на котором она совпадает с $\varphi(x)$. Чтобы начальную температуру изменить от нуля до $\overline{\varphi}(x)$, надо на интервал $(\xi_0-\delta, \xi_0+\delta)$ поместить начальное количество тепла

$$Q = c\rho \int_{\xi_0-\delta}^{\xi_0+\delta} \varphi(x)\,dx \approx c\rho\,\varphi(\overline{\xi})\,\Delta\xi \qquad (\Delta\xi = 2\delta).$$

Температура в точке x в момент времени $t>0$ будет равна

$$\frac{Q}{c\rho}\,G(x,\ \xi,\ t) = G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\overline{\xi})\,\Delta\xi, \tag{13}$$

где $\overline{\xi}$ — промежуточное значение в промежутке $(\xi_0-\delta,\ \xi_0+\delta)$.

Разбивая всю прямую на мелкие промежутки, можем в силу принципа суперпозиции представить $u(x,\ t)$ как сумму слагаемых типа (13). Эта сумма является интегральной суммой, переходящей при $\delta \to 0$ в интеграл

$$u(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t,\ \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{14}$$

или

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{14'}$$

Очевидно, что эта функция и должна представлять решение задачи.

Приведенные выше рассуждения не являются, конечно, доказательством. Выясним условия применимости этой формулы.

Докажем, что формула

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

называемая *интегралом Пуассона*, для любой ограниченной функции $|\varphi(\xi)| < M$ представляет при $t>0$ ограниченное решение уравнения теплопроводности, непрерывно примыкающее при $t=0$ к $\varphi(x)$ во всех точках непрерывности этой функции.

Докажем предварительно лемму (*обобщенный принцип суперпозиции*).

Если функция $U(x, t, \alpha)$ по переменным (x, t) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$L(U) = 0$$

при любом фиксированном значении параметра α, то интеграл

$$u(x,\ t) = \int U(x, t, \alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

также является решением того же уравнения $L(u)=0$, если производные, входящие в линейный дифференциальный оператор $L(U)$, можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

Доказательство леммы крайне просто. Линейный дифференциальный оператор $L(U)$ представляет сумму производных функции U с некоторыми коэффициентами, зависящими от x и t. Дифференцирование функции u, по предположению, можно производить под знаком интеграла. Коэффициенты также можно внести под знак интеграла. Отсюда следует, что

$$L(u)=\int L(U(x, t, \alpha))\,\varphi(\alpha)\,d\alpha=0.$$

т. е. что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению $L(u)=0$.

Напомним достаточные условия дифференцируемости под знаком интеграла, зависящего от параметра.

Функция

$$F(x)=\int_a^b f(x, \alpha)\,d\alpha$$

при конечных пределах a и b дифференцируема под знаком интеграла, если $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ является непрерывной функцией переменных x и α в области их изменения (см. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, гл. III, § 3, 1950).

Нетрудно видеть также, что функция

$$F_1(x)=\int_a^b f(x,\ \alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

при конечных пределах a и b дифференцируема под знаком интеграла при тех же условиях относительно функции $f(x, \alpha)$ и произвольной, ограниченной (и даже абсолютно интегрируемой) функции $\varphi(\alpha)$. Если пределы интегрирования бесконечны, то в этом случае требуется равномерная сходимость интеграла, полученного в результате дифференцирования подинтегральной функции по параметру (см. там же).

Эти же замечания относятся и к кратным интегралам, зависящим от параметров.

Для линейных уравнений $L(u)=0$ имеет место принцип суперпозиции, заключающийся в том, что функция

$$u(x, t)=\sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x, t),$$

представленная в виде суммы конечного числа частных решений, является также решением уравнения. Если мы имеем решение $u(x, t, \alpha)$, зависящее от параметра, то интегральная сумма

$$\sum u(x, t, \alpha_n) C_n \quad (C_n = \varphi(\alpha_n)\Delta\alpha) \tag{15}$$

также является решением уравнения $L(u) = 0$. Доказанная лемма, так же как и лемма на стр. 90, устанавливает условия, при которых предел суммы (15), в нашем случае равный

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha)\varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

также является решением уравнения $L(u) = 0$. С этой точки зрения доказанную лемму, как и лемму на стр. 90, естественно называть *обобщенным принципом суперпозиции.*

Обратимся к изучению интеграла (14′). Докажем, во-первых, что если функция $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)| < M$, то интеграл (14′) сходится и представляет ограниченную функцию. В самом деле,

$$|u(x, t)| < M \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$= M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = M \quad \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

Докажем далее, что интеграл (14′) удовлетворяет уравнению теплопроводности при $t > 0$. Для этого достаточно доказать, что производные этого интеграла при $t > 0$ можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

В случае конечных пределов интегрирования это законно, так как все производные функции

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

при $t > 0$ непрерывны. Для возможности дифференцирования под знаком интеграла при бесконечных пределах достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла, полученного после дифференцирования под знаком интеграла. Проведем это исследование на примере первой производной по x.

Итак, для доказательства дифференцируемости функции (14) по x, а также равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(G(x, \xi, t)\right)\varphi(\xi)\,d\xi$$

достаточно доказать равномерную сходимость интеграла, стоящего справа; при этом для дифференцируемости в точке (x_0, t_0) достаточно доказать равномерную сходимость интеграла в некоторой области значений переменных, содержащей исследуемые значения (x_0, t_0), например в области

$$t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2, \quad |x| \leqslant \bar{x}.$$

Достаточным условием равномерной сходимости интеграла (аналогичным признаку равномерной сходимости ряда) является существование положительной функции $F(\xi)$, не зависящей от параметров (x, t), которая мажорирует функцию $|G_x(x, \xi, t)\varphi(\xi)|$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\right| \leqslant F(\xi), \quad \xi > \bar{x}, \ \xi < -\bar{x}, \tag{15'}$$

и интеграл от которой сходится:

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi)\,d\xi < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{x_1} F(\xi)\,d\xi < \infty. \tag{15''}$$

Величина x_1 обозначает некоторое число, начиная с которого выполняется неравенство (15').

Найдем оценку сверху для абсолютной величины подинтегрального выражения в формуле для $\dfrac{\partial u}{\partial x}$:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t)\right\|\varphi(\xi)\Big| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x|}{2[a^2t]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} |\varphi(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4a^2t_2}} = F(\xi) \quad \text{для } \xi < \bar{x} \tag{16}$$

при любых $|x| \leqslant \bar{x}$ и $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Нетрудно убедиться в сходимости интеграла (15'') от функции $F(\xi)$. Интеграл

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi)\,d\xi = \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4a^2t_2}}\,d\xi = \int_{x_1-\bar{x}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi_1 + 2\bar{x}}{2[a^2t_1]^{3/2}} e^{-\frac{\xi_1^2}{4a^2t_2}}\,d\xi$$

$$(\xi_1 = |\xi| - \bar{x})$$

сходится, так как под знаком интеграла стоит множитель типа $(a\xi + b)\, e^{-\alpha\xi^2}$. Отсюда заключаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{17}$$

Совершенно аналогично доказывается возможность вычисления всех остальных производных под знаком интеграла. Тем самым доказано, что функция (14′) удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Обратимся теперь к выяснению основного свойства интеграла (14′), а именно, докажем, что

$$u(x, t) \to \varphi(x_0) \text{ при } t \to 0 \text{ и } x \to x_0$$

во всех точках непрерывности функции $\varphi(x)$.

Итак, пусть $\varphi(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0. Мы должны доказать, что

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

т. е. каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon,$$

коль скоро

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad |t| < \delta(\varepsilon).$$

В силу предполагаемой непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0 существует такое $\eta(\varepsilon)$, что

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{18}$$

если только

$$|x - x_0| < \eta.$$

Разбивая промежуток интеграции на части, представим $u(x, t)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, \varphi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \ldots d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_2}^{\infty} \ldots d\xi = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \tag{19}$$

где

$$x_1 = x_0 - \eta \quad \text{и} \quad x_2 = x_0 + \eta. \tag{20}$$

Главное слагаемое этой суммы u_2 можно представить в виде

$$u_2(x, t) = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] d\xi = I_1 + I_2.$$

Интеграл I_1 вычисляется непосредственно

$$I_1 = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{a^2 t}} d\xi = \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1 - x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2 - x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

где

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad d\alpha = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}}. \tag{21}$$

Как только $|x - x_0| < \eta_1$, то верхний предел становится положительным, а нижний — отрицательным, и при $t \to 0$ верхний предел стремится к $+\infty$, а нижний к $-\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} I_1 = \varphi(x_0).$$

Таким образом, можно указать такое δ_1, что

$$|I_1 - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{22}$$

если только

$$|x - x_0| < \delta_1 \quad \text{и} \quad |t| < \delta_1.$$

Покажем, что остальные интегралы: I_2, u_1 и u_3 — малы. Оценим прежде всего интеграл I_2:

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| d\xi.$$

Из равенств (20) видно, что при

$$x_1 < \xi < x_2$$

имеет место неравенство

$$|\xi - x_0| < \eta_1.$$

Пользуясь неравенством (18), а также тем, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x'}^{x''} e^{-\alpha^2}\,d\alpha < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = 1,$$

каковы бы ни были x' и x'', получаем:

$$|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi =$$

$$= \frac{\varepsilon}{6}\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha < \frac{\varepsilon}{6}, \qquad (23)$$

где новая переменная α определяется формулой (21). Оценим

$$|u_3(x,\,t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left|\int_{x_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\varphi(\xi)\,d\xi\right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty} e^{-\alpha_2}\,d\alpha \to 0 \qquad \text{при } \begin{matrix} x\to x_0 \\ t\to 0 \end{matrix} \qquad (24)$$

и аналогично

$$|u_1(x,\,t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left|\int_{-\infty}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\varphi(\xi)\,d\xi\right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha \to 0 \qquad \text{при } \begin{matrix} x\to x_0 \\ t\to 0, \end{matrix} \qquad (25)$$

так как если $x\to x_0$, то $x_2 - x > 0$, и $x_1 - x < 0$, и если $t\to 0$, то в последних членах (24) и (25) нижний предел и, соответственно, верхний предел стремятся к $+\infty$ и к $-\infty$. Следовательно, можно указать такое δ_2, что

$$|u_3(x,\,t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |u_1(x,\,t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (26)$$

если только

$$|x - x_0| < \delta_2 \quad \text{и} \quad |t| < \delta_2.$$

Пользуясь установленными выше оценками (24), (25), получаем:

$$|u(x, t)-\varphi(x_0)| \leqslant |u_1+[I_1-\varphi(x_0)]|+I_2+u_3| \leqslant$$

$$\leqslant |u_1|+|I_1-\varphi(x_0)|+|I_2|+|u_3| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon, \quad (27)$$

если только

$$|x-x_0|<\delta \quad \text{и} \quad |t|<\delta,$$

где δ равно наименьшему из чисел δ_1 и δ_2.

Таким образом, мы доказали, что функция

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi \quad (14')$$

ограничена, удовлетворяет уравнению теплопроводности и начальному условию.

Если начальное значение задается не при $t=0$, а при $t=t_0$, то выражение для $u(x, t)$ приобретает вид

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}\varphi(\xi)\,d\xi. \quad (14'')$$

Единственность полученного решения для непрерывной функции $\varphi(x)$ следует из теоремы, доказанной в § 2, п. 3. Если начальная функция $\varphi(x)$ имеет конечное число точек разрыва, то интеграл (14″) представляет ограниченное решение уравнения (1), непрерывное всюду, кроме точек разрыва функции $\varphi(x)$ [1].

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Найти решение уравнения теплопроводности, если начальная температура (при $t=t_0=0$) имеет постоянные, но различные значения для $x>0$ и $x<0$, а именно:

$$u(x, 0)=\varphi(x)=\begin{cases} T_1 & \text{для} \quad x>0, \\ T_2 & \text{для} \quad x<0. \end{cases}$$

---

[1]) Пользуясь методом, изложенным в п. 3 § 2, можно убедиться, что функция $u(x, t)$ перечисленными условиями определяется однозначно.

Пользуясь формулой (14′), получаем решение задачи в виде

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}+\frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}=$$

$$=\frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}e^{-\alpha^2}\,d\alpha+\frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=$$

$$=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}e^{-\alpha^2}\,d\alpha, \tag{28}$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-z}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\alpha^2}\,d\alpha-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z}e^{-\alpha^2}d\alpha$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-z}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-z}^{0}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z}e^{-\alpha^2}\,d\alpha\left(z=\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right).$$

В частности, если

$$T_2=0,\qquad T_1=1,$$

то

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z}e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)\qquad\left(z=\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right).$$

Профиль температуры в заданный момент t дается кривой

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z}e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

где z представляет абсциссу точки, в которой определяется температура, если за единицу длины, в зависимости от t, принимается значение $2\sqrt{a^2t}$. Построение этой кривой не представляет труда,

так как интеграл

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

называемый обычно *интегралом ошибок*, часто встречается в теории вероятностей и для него существуют подробные таблицы [1]).

Формула (28) при произвольных T_1 и T_2 может быть записана в виде

$$u(x,\ t)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{2}\,\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right). \tag{29}$$

Отсюда видно, что в точке $x=0$ температура все время постоянна и равна полусумме начальных значений справа и слева, так как $\Phi(0)=0$.

Решение неоднородного уравнения

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t)\quad(-\infty<x<\infty,\quad t>0)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,\ 0)=0,$$

очевидно, должно представляться формулой

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\ \xi,\ t-\tau)f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{29'}$$

как то следует из смысла функции $G(x,\ \xi,\ t)$ (см. п. 4 § 2). Мы не будем подробнее заниматься изучением этой формулы и условий применимости, которые надо наложить на функцию $f(x,\ t)$.

3. Краевые задачи для полуограниченной прямой. Как мы уже отмечали в § 1, п. 4, в тех случаях, когда интересуются распределением температуры вблизи одного из концов стержня, а влияние другого конца несущественно, принимают, что этот конец находится в бесконечности. Это приводит к задаче об определении решения уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2u_{xx} \tag{11}$$

на полубесконечной прямой $x>0$ для значений $t>0$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,\ 0)=\varphi(x)\qquad(x>0)$$

---

[1]) См., например, А. А. Марков, Курс теории вероятностей, где даны таблицы этого интеграла с шестью десятичными знаками. См. также более краткую таблицу в конце книги.

и граничному условию, которое, в зависимости от заданного характера граничного режима, берется в одном из следующих видов:

$$u(0,\ t)=\mu(t) \qquad \text{(первая краевая задача)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=\nu(t) \qquad \text{(вторая краевая задача)}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=\lambda[u(0,\ t)-\theta(t)] \qquad \text{(третья краевая задача)}.$$

В дальнейшем мы ограничимся подробным исследованием только *первой краевой задачи*, заключающейся в отыскании решения уравнения теплопроводности при дополнительных условиях

$$u(x,\ 0)=\varphi(x), \qquad u(0,\ t)=\mu(t). \tag{30}$$

Для того чтобы условия задачи определяли единственное решение, необходимо наложить некоторые условия в бесконечности. Потребуем в качестве дополнительного требования, чтобы функция $u(x,\ t)$ была всюду ограничена

$$|u(x,\ t)|<M \quad \text{для} \quad 0<x<\infty \quad \text{и} \quad t\geqslant 0,$$

где M — некоторая постоянная. Отсюда следует, что начальная функция $\varphi(x)$ должна также удовлетворять условию ограниченности

$$|\varphi(x)|<M.$$

Решение поставленной задачи можно представить в виде суммы

$$u(x,\ t)=u_1(x,\ t)+u_2(x,\ t),$$

где $u_1(x,\ t)$ представляет влияние только начальных условий, а $u_2(x,\ t)$ — влияние только граничного условия. Эти функции можно определить как решения уравнения (11), удовлетворяющие условиям

$$u_1(x,\ 0)=\varphi(x), \quad u_1(0,\ t)=0 \tag{30'}$$

и

$$u_2(x,\ 0)=0, \qquad u_2(0,\ t)=\mu(t). \tag{30''}$$

Очевидно, что сумма этих функций будет удовлетворять условиям (30). Докажем предварительно две леммы относительно функции $u(x,\ t)$, определяемой интегралом Пуассона,

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\psi(\xi)\,d\xi. \tag{31}$$

1. Если функция $\psi(x)$ является нечетной функцией, т. е.

$$\psi(x)=-\psi(-x),$$

то функция (31)

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi$$

обращается в нуль при $x = 0$,

$$u(0,\ t) = 0.$$

При этом, конечно, предполагается, что интеграл, определяющий функцию $u(x,\ t)$, сходится, что имеет место, если $\psi(x)$ ограничена. Подинтегральная функция в интеграле

$$u(0,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi$$

нечетна относительно ξ, так как является произведением нечетной функции на четную. Интеграл же от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, равняется нулю; следовательно,

$$u(0,\ t) = 0,$$

что и доказывает лемму.

2. Если функция $\psi(x)$ является четной функцией, т. е.

$$\psi(x) = \psi(-x),$$

то производная функции $u(x,\ t)$ из формулы (31) равна нулю при $x = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) = 0$$

для всех $t > 0$.

В самом деле,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)}{2(a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi \Bigg|_{x=0} = 0,$$

так как при $x = 0$ подинтегральная функция нечетна, если $\psi(\xi)$ — четная.

Отыскание функции $u(x,\ t)$ теперь уже не представит труда. Введем вспомогательную функцию $U(x,\ t)$, определенную на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяющую уравнению, а также условиям

$$U(0,\ t) = 0,$$
$$U(x,\ 0) = \varphi(x) \qquad \text{для } x > 0.$$

Эту функцию, пользуясь леммой, можно определить при помощи начальной функции $\Psi(x)$, совпадающей с $\varphi(x)$ для $x>0$ и являющейся нечетным продолжением $\varphi(x)$ для $x<0$, т. е.

$$\Psi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{для } x>0,\\ -\varphi(-x) & \text{для } x<0,\end{cases}$$

так что

$$U(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Psi(\xi)\,d\xi.$$

Рассматривая значения функции $U(x,\ t)$ только в интересующей нас области $x\geqslant 0$, получим:

$$u(x,\ t)=U(x,\ t)\qquad \text{при } x\geqslant 0.$$

Пользуясь определением функции $\Psi(x)$, будем иметь:

$$U(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Psi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Psi(\xi)\,d\xi=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi,$$

причем в первом интеграле сделана замена $\xi'=-\xi$ и использовано равенство

$$\Psi(\xi)=-\varphi(-\xi)=-\varphi(\xi').$$

Соединяя оба интеграла вместе, получим искомую функцию

$$u_1(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (32)$$

в виде, не содержащем вспомогательных функций. Заметим, что при $x=0$ выражение в фигурных скобках обращается в нуль и $u_1(0,\ t)=0$.

Пользуясь леммой 2, нетрудно убедиться, что решение уравнения теплопроводности с однородным граничным условием второго рода $\frac{\partial u_1}{\partial x}(0,\ t)=0$ и начальным условием $u_1(x,\ 0)=\varphi(x)$ представляется

в виде

$$\bar{u}_1(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (32')$$

Применим полученную формулу к решению задачи об остывании равномерно нагретого стержня, на границе которого поддерживается постоянная температура, которую мы примем равной нулю. Задача состоит в определении решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего условиям

$$v_1(x,\ t_0) = T, \qquad v_1(0,\ t) = 0.$$

Учитывая, что начальное условие задается не при $t = 0$, а при $t = t_0$, вместо формулы (32) получим:

$$v_1(x,\ t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}. \qquad (33)$$

Разбивая интеграл на два слагаемых и вводя переменные

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad \alpha_1 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}},$$

получим:

$$v_1(x,\ t) = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha - \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha_1^2} d\alpha_1 \right] =$$

$$= \frac{T}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} e^{-\alpha^2} d\alpha = T \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

или

$$v_1(x,\ t) = T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right), \qquad (33')$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

— интеграл ошибок.

Обратимся теперь к отысканию функции $u_2(x,\ t)$, представляющей вторую часть решения первой краевой задачи.

Пусть

$$\mu(t) = \mu_0 = \text{const}.$$

Функция

$$\bar{v}(x, t) = \mu_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \tag{34}$$

является решением уравнения теплопроводности, удовлетворяющим условиям

$$\bar{v}(x, t_0) = \mu_0, \qquad \bar{v}(0, t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция

$$v(x, t) = \mu_0 - \bar{v}(x, t) = \mu_0\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right)\right] \tag{35}$$

и является искомой, так как она удовлетворяет тому же уравнению и условиям

$$v(x, t_0) = 0 \qquad (x > 0) \qquad \text{и} \qquad v(0, t) = \mu_0 \qquad (t > t_0).$$

Представим $v(x, t)$ в виде

$$v(x, t) = \mu_0 U(x, t),$$

где

$$U(x, t) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \tag{36}$$

является решением той же задачи, что и $v(x, t)$, при $\mu_0 = 1$.

По определению функция $U(x, t)$ имеет смысл только при $t \geqslant t_0$. Продолжим определение этой функции, полагая

$$U(x, t) \equiv 0 \qquad \text{для} \qquad t < t_0.$$

Очевидно, что это определение согласуется со значением функции $U(x, t)$ при $t = 0$ и определенная таким образом функция будет удовлетворять уравнению теплопроводности для всех t при $x > 0$. Граничное значение этой функции (при $x = 0$) является ступенчатой функцией, равной нулю при $t < t_0$ и равной единице при $t > t_0$. Функция $U(x, t)$ весьма часто встречается в приложениях и является вспомогательным звеном для нахождения функции $u_2(x, t)$.

Рассмотрим вторую вспомогательную задачу, заключающуюся в нахождении решения уравнения теплопроводности со следующими начальными и граничными условиями:

$$v(x, t_0) = 0, \qquad v(0, t) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{для} \quad t_0 < t < t_1, \\ 0 & \text{для} \quad t > t_1. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$v(x, t) = \mu_0 [U(x, t - t_0) - U(x, t - t_1)].$$

Вообще, если граничная функция $\mu(t)$ задается в виде ступенчатой функции

$$\mu(t)=\begin{cases}\mu_0 & \text{для } t_0<t\leqslant t_1,\\ \mu_1 & \text{для } t_1<t\leqslant t_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mu_{n-1} & \text{для } t_{n-1}<t\leqslant t_n,\end{cases}$$

то, рассуждая совершенно аналогично, получим, что решение краевой задачи II с подобной функцией $\mu(t)$ может быть записано следующим образом:

$$u(x,\ t)=\sum_{i=0}^{n-2}\mu_i\left[U(x,\ t-t_i)-U(x,\ t-t_{i+1})\right]+ \\ +\mu_{n-1}U(x,\ t-t_{n-1}). \quad (37)$$

Пользуясь теоремой о конечном приращении, получим:

$$u(x,\ t)=\sum_{i=0}^{n-2}\mu_i\left.\frac{\partial U(x,\ t-\tau)}{\partial t}\right|_{\tau_i}\Delta\tau+\mu_{n-1}U(x,\ t-t_{n-1}) \quad (38)$$

$$\text{для}\quad t_i\leqslant\tau_i\leqslant t_{i+1}.$$

Обратимся теперь к задаче о нахождении решения $u(x,\ t)$ уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием и граничным условием

$$u(0,\ t)=\mu(t)\quad(t>0),$$

где $\mu(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция. Приближенное решение этой задачи легко получить в виде (37), если функцию $\mu(t)$ заменить кусочно-постоянной функцией. Переходя к пределу при уменьшении интервалов постоянства вспомогательной функции, получим, что предел суммы (38) будет равен

$$\int_0^t\frac{\partial U}{\partial t}(x,\ t-\tau)\,\mu(\tau)\,dt,$$

так как при $x>0$

$$\lim_{t-t_{n-1}\to 0}\mu_{n-1}U(x,\ t-t_{n-1})=0.$$

Очевидно, что искомое решение $u_2(x,\ t)$ второй задачи должно быть равно

$$u_2(x,\ t)=\int_0^t\frac{\partial U}{\partial t}(x,\ t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau. \quad (39)$$

Мы не будем подробно останавливаться на правомерности предельного перехода и выяснении условий применимости этой формулы в отношении функции $\mu(\tau)$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{a^2 x}{[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} =$$

$$= -2a^2 \frac{\partial G}{\partial x}(x, 0, t) = 2a^2 \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} \qquad \left(G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\right).$$

Таким образом, искомое решение в случае произвольной функции $\mu(t)$ может быть представлено в виде

$$u_2(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x}{[a^2 (t-\tau)]^{3/2}} e^{-\left[\frac{x^2}{4a^2 (t-\tau)}\right]} \mu(\tau)\, d\tau$$

или

$$u_2(x, t) = 2a^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, 0, t-\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau \text{ [1]}. \qquad (40)$$

Отметим, что в процессе получения формулы (40) мы нигде не пользовались специальными свойствами уравнения теплопроводности, кроме его линейности. Мы нигде не пользовались также аналитической формой функции $U(x, t)$, а только тем, что она удовлетворяет граничным и начальным условиям

$$U(0, t) = 1 \quad \text{для} \quad t > 0,$$
$$U(x, 0) = 0 \quad \text{для} \quad x > 0$$

или

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad t > 0, \\ 0 & \text{для} \quad t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что если мы имеем дело с решением какого-либо линейного дифференциального уравнения при граничном условии

$$u(0, t) = \mu(t) \qquad (t > 0),$$

нулевых начальных условиях и нулевых дополнительных граничных условиях, если такие имеют место (например, при $x = l$), то реше-

[1]) Это представление решения первой краевой задачи с нулевыми начальными условиями дано здесь для удобства сравнения с решением той же задачи, полученным в гл. V, § 4 другим методом.

ние этой задачи может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau, \tag{41}$$

где $U(x, t)$ — решение аналогичной краевой задачи при

$$U(0, t) = 1.$$

Сформулированный здесь принцип, называемый *принципом Дюгамеля*, показывает, что основную трудность при решении краевых задач представляет постоянное граничное значение. Если краевая задача с постоянным граничным значением решена, то решение краевой задачи с переменным граничным условием представляется формулой (41). Этим принципом часто пользуются при решении многих краевых задач, приводя решение только для постоянного граничного условия, не оговаривая, что решение краевой задачи с переменным $\mu(t)$ дается формулой (41).

Сумма функций

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

дает решение первой краевой задачи для полубесконечной прямой, для однородного уравнения.

Пользуясь формулой (29) п. 2 § 3 и принципом нечетного продолжения, нетрудно убедиться в том, что решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \qquad (0 < x < \infty, \quad t > 0)$$

при нулевом начальном и нулевом граничном условии $(u(0, t) = 0)$ дается формулой

$$u_3(x, t) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{42}$$

Сумма

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = u(x, t) \tag{43}$$

дает решение первой краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$
$$u(0, t) = \mu(t), \qquad u(x, 0) = \varphi(x).$$

§ 4. Задачи без начальных условий

Если изучается процесс теплопроводности в момент, достаточно удаленный от начального, то влияние начальных условий практически не сказывается на распределении температуры в момент наблюдения. В этом случае ставится задача об отыскании решения уравнения

теплопроводности, удовлетворяющего граничным условиям одного из трех типов, заданным для всех $t > -\infty$. Если стержень ограничен, то задаются граничные условия на обоих концах стержня. Для полубесконечного стержня задается лишь одно граничное условие.

Рассмотрим первую краевую задачу для полубесконечного стержня:

найти ограниченное решение уравнения теплопроводности в области $x > 0$, удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = \mu(t), \tag{1}$$

где $\mu(t)$ — заданная функция. Предполагается, что функции $u(x, t)$ и $\mu(t)$ ограничены всюду, т. е.

$$|u(x, t)| < M,$$
$$|\mu(t)| < M.$$

Как будет показано ниже (см. мелкий шрифт), функция $u(x, t)$ определяется однозначно. Возьмем наиболее часто встречающийся случай граничного условия

$$\mu(t) = A \cos \omega t. \tag{2}$$

Эта задача изучалась еще Фурье и впервые была применена при определении температурных колебаний почвы [1]).

Запишем граничное условие в виде

$$\mu(t) = Ae^{i\omega t}. \tag{2'}$$

Из линейности уравнения теплопроводности следует, что действительная и мнимая части некоторого комплексного решения уравнения теплопроводности каждая в отдельности удовлетворяет тому же уравнению.

Если найдено решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условию (2'), то его действительная часть удовлетворяет условию (2), а мнимая — условию

$$u(0, t) = \mu_1(t) = A \sin \omega t.$$

Итак, рассмотрим задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{3}$$
$$u(0, t) = Ae^{i\omega t}.$$

Ее решение будем искать в виде

$$u(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t}, \tag{4}$$

где α и β — неопределенные пока постоянные.

---

[1]) См. приложение I.

Подставляя выражение (4) в уравнение (3) и граничное условие, находим:

$$\alpha^2 = \frac{i}{a^2}\beta,$$

$$\beta = i\omega,$$

откуда

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right].$$

Для $u(x, t)$ имеем:

$$u(x, t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + i\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right)}. \tag{5}$$

Действительная часть этого решения

$$u(x, t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right) \tag{6}$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности и граничному условию (2). Формула (6) в зависимости от выбора знака определяет не одну, а две функции. Однако только функция, соответствующая знаку минус, удовлетворяет требованию ограниченности. Таким образом, решение поставленной задачи получаем в виде

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right). \tag{7}$$

Аналогично решается задача без начальных условий для ограниченного отрезка:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= A\cos\omega t, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Переписывая граничное условие в виде

$$\hat{u}(0, t) = Ae^{-i\omega t}, \quad \hat{u}(l, t) = 0,$$

будем искать решение в форме

$$\hat{u}(x, t) = X(x)e^{-i\omega t}. \tag{9}$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), получим для функции $X(x)$ уравнение

$$X''+\frac{i\omega}{a^2}X=0 \quad \text{или} \quad X''+\gamma^2X=0,$$

$$\gamma=\sqrt{\frac{i\omega}{a^2}}=\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}(1+i) \tag{10}$$

и дополнительные условия

$$X(0)=A, \qquad X(l)=0. \tag{11}$$

Отсюда для функции $X(x)$ будем иметь:

$$X(x)=A\frac{\sin\gamma(l-x)}{\sin\gamma l}=X_1(x)+iX_2(x), \tag{12}$$

где X_1 и X_2 — вещественная и мнимая части функции $X(x)$. Для функции $\hat{u}(x, t)$ получаем выражение

$$\hat{u}(x, t)=A\frac{\sin\gamma(l-x)}{\sin\gamma l}e^{-i\omega t}. \tag{13}$$

Выделяя вещественную часть функции $\hat{u}(x, t)$, находим решение исходной задачи без начальных условий в виде

$$u(x, t)=X_1(x)\cos\omega t+X_2(x)\sin\omega t. \tag{14}$$

Мы не даем здесь явного выражения для X_1 и X_2, хотя это и нетрудно сделать.

Если граничная функция представляет собой комбинацию гармоник разных частот, то решение такой задачи может быть получено как суперпозиция решений, соответствующих отдельным гармоникам.

Докажем единственность задачи без начальных условий для полуограниченной прямой. Будем исходить из формулы

$$u(x, t)=\frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}u(0, \tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}\right\}u(\xi, t_0)\,d\xi=I_1+I_2 \tag{15}$$

$$(t\geqslant t_0),$$

которая представляет любое ограниченное решение уравнения теплопроводности через его начальное значение $u(x, t_0)$ и граничное $u(0, t)=\mu(t)$ в области $x\geqslant 0$, $t\geqslant t_0$.

Покажем, что

$$\lim_{t_0\to-\infty}I_2(x, t)=0, \tag{16}$$

если только

$$|u(x, t)| < M$$

при любом t. Действительно,

$$|I_2| < \frac{M}{\sqrt{\pi}}\left\{\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha_1^2}\,d\alpha_1 - \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha_2^2}\,d\alpha_2\right\} =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{\pi}} 2 \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}.$$

Отсюда и следует равенство (16), так как x и t фиксированы, а $t_0 \to -\infty$. Если в формуле (15) фиксировать x и t и устремить $t_0 \to -\infty$, то $u(x, t)$ будет равно пределу только первого слагаемого, и мы получим формулу

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\,d\tau, \qquad (17)$$

доказывающую, что двух различных решений нашей задачи быть не может. Можно также доказать, что для любой ограниченной кусочно-непрерывной функции $\mu(t)$ формула (17) представляет решение поставленной задачи.

Аналогично может быть исследована задача без начальных условий для ограниченного отрезка ($0 \leqslant x \leqslant l$). Эта задача без условия ограниченности имеет многозначное решение, так как функция

$$u_n(x, t) = Ce^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x$$

при любом n представляет решение этой задачи с нулевыми граничными значениями. Однако решения такого типа при $t \to -\infty$ неограниченны, и не составляет труда доказать единственность ограниченного решения поставленной задачи.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

1. Найти функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для:

а) полуограниченного стержня при граничных условиях 1-го и 2-го типов и при отсутствии теплообмена на боковой поверхности;

б) неограниченного стержня при наличии теплообмена на боковой поверхности;

в) полуограниченного стержня при наличии теплообмена на боковой поверхности и при граничных условиях первых двух типов.

2. Найти функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой

поверхностью для третьей краевой задачи [граничное условие вида $\frac{\partial u}{\partial x} - hu(0, t) = f(t)$].

Ответ:

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - 2h \int_0^\infty e^{-h\alpha - \frac{(\alpha+\xi+x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\alpha \right\}.$$

3. Решить уравнение теплопроводности для случаев а), б), в) задачи 1, если:

1) в точке $x = \xi_0$ действует источник тепла $Q = Q(t)$, в частности $Q = Q_0 = \text{const}$;

2) задано начальное распределение температуры $u(x, 0) = \varphi(x)$, в частности

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0 \text{ при } 0 < x < l, \\ 0 \text{ вне интервала } (0, l); \end{cases}$$

3) тепловые источники распределены с плотностью $f(x, t)$ по всему стержню, а начальная температура равна нулю; рассмотреть, в частности, случай $f = q_0 = \text{const}$ (стационарные источники).

4. Полуограниченный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью был равномерно нагрет до температуры

$$u(x, 0) = u_0 = \text{const} \quad (x > 0).$$

Конец стержня, начиная с момента $t = 0$, поддерживается при температуре, равной 0,

$$u(0, t) = 0 \quad (t > 0).$$

Найти температуру стержня $u(x, t)$ и, пользуясь таблицами интеграла ошибок

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

построить графики по x на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ функции $u(x, t)$ при $t = \frac{l^2}{16a^2}$, $t = \frac{l^2}{2a^2}$, $t = \frac{l^2}{a^2}$.

Указание. Удобно ввести безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{l}, \quad \theta = \frac{a^2 t}{l^2}, \quad v = \frac{u}{u_0}.$$

5. Конец полуограниченного цилиндра в начальный момент времени $t = 0$ открывают в атмосфере, где концентрация некоторого газа равна u_0.

Найти концентрацию газа в цилиндре $u(x, t)$ для $t > 0$ и $x > 0$, если начальная концентрация $u(x, t) = 0$. Пользуясь таблицами интеграла ошибок, установить, через какое время в слое, отстоящем на расстоянии l от конца цилиндра, концентрация газа достигнет 95% внешней концентрации. Найти закон движения фронта постоянной концентрации.

6. К концу полуограниченного стержня, начальная температура которого была равна нулю, подводится тепловой поток $-ku_x(0, t) = q(t)$. Найти температуру $u(x, t)$ стержня, если:

а) стержень теплоизолирован с боков;

б) на боковой поверхности стержня происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой нулевой температуры.

Рассмотреть частный случай $q = q_0 = \text{const}$.

7. Конец полуограниченного стержня поддерживается при постоянной температуре u_0; на боковой поверхности стержня происходит теплообмен со средой, постоянная температура которой равна u_1. Начальная температура стержня равна нулю. Найти $u(x, t)$ — температуру стержня.

8. Решить задачи 6а, 6б, считая, что $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$.

9. Найти установившуюся температуру вдоль полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, на конце которого

а) задана температура $u(0, t) = A \cos \omega t$;

б) задан тепловой поток $Q(t) = B \sin \omega t$;

в) происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой меняется по закону $v(t) = C \sin \omega t$.

10. Пользуясь методом отражений, построить функцию влияния мгновенного точечного источника для ограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью при граничных условиях 1-го и 2-го типов.

11. Неограниченный стержень составлен из двух однородных стержней, соприкасающихся в точке $x = 0$ и обладающих характеристиками a_1, k_1 и, соответственно, a_2, k_2. Начальная температура

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 \text{ при } x < 0, \\ T_2 \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Найти температуру $u(x, t)$ стержня для случая, когда боковая поверхность теплоизолирована.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ III

I. Температурные волны

Задача о распространении температурных волн в почве является одним из первых примеров приложения математической теории теплопроводности, развитой Фурье, к изучению явлений природы.

Температура на поверхности земли носит, как известно, ярко выраженную суточную и годовую периодичность. Обратимся к задаче о распространении периодических температурных колебаний в почве, которую будем рассматривать как однородное полупространство $0 \leqslant x \leqslant \infty$. Эта задача является характерной задачей без начальных условий, так как при многократном повторении температурного хода на поверхности влияние начальной температуры будет меньше влияния других факторов, которыми мы пренебрегаем (например, неоднородность почвы). Таким образом, приходим к следующей задаче [1]):

найти ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leqslant x < \infty, \ -\infty < t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = A \cos \omega t. \tag{2}$$

Эта задача была рассмотрена в главе III. Ее решение имеет вид (см. гл. III, § 4, (7))

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x - \omega t\right). \tag{3}$$

На основании полученного решения можно дать следующую характеристику процесса распространения температурной волны в почве. Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в почве также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом, причем:

---

[1]) Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, гл. III, Гостехиздат, 1947.

1. Амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной $A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}$, т. е., если глубины растут в арифметической прогрессии, то амплитуды убывают в геометрической прогрессии (первый закон Фурье).

2. Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время δ запаздывания максимумов (минимумов) температуры в почве от соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}\, x$$

(второй закон Фурье).

3. Глубина проникновения температуры в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности. Относительное изменение температурной амплитуды равно

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x'}.$$

Эта формула показывает, что чем меньше период, тем меньше глубина проникновения температуры. Для температурных колебаний с периодами T_1 и T_2 глубины x_1 и x_2, на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\, x_1$$

(третий закон Фурье). Так, например, сравнение суточных и годовых колебаний, для которых $T_2 = 365\, T_1$, показывает, что

$$x_2 = \sqrt{365}\, x_1 = 19{,}1 x_1,$$

т. е. что глубина проникновения годовых колебаний при одинаковой амплитуде на поверхности была бы в 19,1 раза больше глубины проникновения суточных колебаний.

В качестве примера приведем результаты наблюдений над годовыми температурными колебаниями на станции Гош в Приамурье [1]):

Глубина ($м$)	Амплитуды (°С)
1	11,5
2	6,8
3	4,2
4	2,6

[1]) М. И. Сумгин, С. П. Качурин, Н. И. Толстихин, В. Ф. Тумель, Общее мерзлотоведение, гл. V, Изд. АН СССР, 1940.

Эти данные показывают, что амплитуда годовых колебаний на глубине 4 *м* уменьшается до 13,3% своего значения на поверхности, равного 19,5°.

На основании этих данных можно определить коэффициент температуропроводности почвы

$$\ln\frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x, \quad a^2 = \frac{\omega x^2}{2\ln^2\frac{A(x)}{A}},$$

откуда находим, что коэффициент температуропроводности почвы равен

$$a^2 = 4\cdot 10^{-3}\,\frac{см^2}{сек}.$$

Время запаздывания максимальной температуры на глубине 4 *м* достигает 4 месяцев.

Следует, однако, иметь в виду, что изложенная здесь теория относится к распространению тепла в сухой почве или горных породах. Наличие влаги усложняет температурные явления в почве, при замерзании происходит выделение скрытой теплоты, не учитываемое этой теорией.

Температуропроводность является одной из характеристик тела, важных для изучения его физических свойств, а также для различных технических расчетов. На изучении распространения температурных волн в стержнях основан один из лабораторных методов определения температуропроводности [1]).

Пусть на конце достаточно длинного стержня поддерживается периодическая температура $\mu(t)$. Представив эту функцию в виде ряда Фурье

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{T}t + b_n\sin\frac{2\pi n}{T}t\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left[\frac{2\pi n}{T}(t-\delta_n^0)\right],$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$\delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}\right),$$

где T — период, и взяв температурные волны, соответствующие каждому слагаемому, получим, что температура $u(x, t)$ для любого x

[1]) Специальный физический практикум, т. I, задача 35, Гостехиздат, 1945.

будет периодической функцией времени и ее n-я гармоника равна

$$u_n(x, t) = a_n(x)\cos\frac{2\pi n}{T}t + b_n(x)\sin\frac{2\pi n}{T}t =$$

$$= A_n e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}x}\cos\left[\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}x - \frac{2\pi n}{T}t + \delta_n^0\right]$$

или

$$\frac{\sqrt{a_n^2(x_1) + b_n^2(x_1)}}{\sqrt{a_n^2(x_2) + b_n^2(x_2)}} = e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}(x_1 - x_2)}.$$

Эта формула показывает, что если произвести измерение температуры в каких-нибудь двух точках, x_1 и x_2, за полный период, то, находя коэффициенты $a_n(x_1)$, $b_n(x_1)$, $a_n(x_2)$, $b_n(x_2)$ при помощи гармонического анализа, можно определить коэффициент температуропроводности стержня a^2.

Периодические колебания температуры в стержне можно вызвать, например, следующим образом. Поместим один из концов стержня в электрическую печь и будем через одинаковые промежутки времени включать и выключать ток. В результате такого периодического нагревания в стержне через некоторое время установятся периодические колебания температуры; измеряя с помощью термопар температуры $u(x_1, t)$ и $u(x_2, t)$ в каких-либо двух точках, x_1 и x_2, за полный период изменения граничного режима и подвергая u_1 и u_2 описанной выше обработке, можно определить a^2 — коэффициент температуропроводности материала, из которого сделан стержень. Естественно, что для применимости изложенной выше теории стержень должен быть теплоизолирован с боков, а также должен быть проведен контроль температуры на другом конце стержня, чтобы иметь возможность пользоваться теорией температурных волн в полубесконечном стержне.

Для возможности использования теории температурных волн в полубесконечном стержне надо убедиться в том, что температура на свободном конце стержня постоянна. Это контролируется с помощью дополнительной термопары.

II. Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры

Для суждения о внутреннем температурном состоянии Земли мы имеем немногие данные, получаемые из наблюдений на ее поверхности. Основные сведения о термическом поле земной коры заключаются в следующем. Суточные и годовые колебания температуры происходят в сравнительно тонком поверхностном слое (порядка 10—20 $м$ для годовых колебаний). Ниже этого слоя температура с течением времени меняется очень медленно.

Наблюдения в шахтах и скважинах, относящиеся к верхним 2—3 *км* земной коры, показывают, что температура с глубиной повышается в среднем на 3° С на каждые 100 *м*.

Первые попытки, относящиеся к концу прошлого столетия, дать теоретическое объяснение наблюдаемого геотермического градиента встретили непреодолимые трудности [1]). Эти попытки исходили из представления об охлаждении Земли, раскаленной в прошлом. Начальная температура, характеризующая этот процесс остывания, должна иметь порядок $T_0 = 1200°\,\text{C}$ (температура плавления горных пород), а поверхностная температура имеет порядок 0° С и не могла значительно (больше 100°) отклоняться от этой величины за весь период существования жизни на Земле. Простейшая количественная теория остывания Земли приводит к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

в полупространстве $0 < z < \infty$ при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(z, 0) = T_0,$$
$$u(0, t) = 0.$$

Решение этой задачи было рассмотрено в § 3 настоящей главы и дается формулой

$$u(z, t) = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

Градиент этой функции при $z = 0$ равен

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}}\right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}}.$$

Подставляя сюда известные значения геотермического градиента $\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{град}}{\text{см}}$, $T_0 = 1200°C$, а также значение $a^2 = 0{,}006 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$, соответствующее среднему экспериментально определяемому коэффициенту температуропроводности гранитов и базальтов, получим для продолжительности процесса остывания значение $t = 0{,}85 \cdot 10^{15}$ сек. $=$ $= 27\,000\,000$ лет. Такое представление о возрасте Земли никак не согласовывалось с геологическими данными. Приближенный характер рассматриваемой теории (пренебрежение кривизной Земли, непостоянство коэффициента температуропроводности, приближенность значения T_0) не может, конечно, изменить порядка найденного значения

[1]) Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, гл. III, Гостехиздат, 1947.

для возраста Земли, который по современным данным оценивается приблизительно в $2 \cdot 10^9$ лет.

Физическая схема температурного режима Земли подверглась существенному пересмотру после открытия явления *радиоактивного распада*. Радиоактивные элементы, рассеянные в земной коре, при распаде вызывают ее нагревание, так что уравнение теплопроводности должно иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f \qquad \left(f = \frac{A}{c\rho}\right),$$

где A — объемная плотность тепловых источников. На основании многочисленных измерений радиоактивности горных пород и их тепловыделения принято значение

$$A = 1{,}3 \cdot 10^{-12} \frac{кал}{см^3\ сек}.$$

Это значение учитывает тепло, выделяемое ураном, торием и калием вместе с их продуктами распада.

Предположим, что плотность радиоактивных источников внутри земного шара постоянна и равна значению A, определенному для верхних слоев земной коры. В этом случае количество тепла, выделяющегося во всем земном шаре за единицу времени, будет равно

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 A.$$

Сделаем второе предположение о том, что Земля радиоактивным теплом не нагревается. В этом случае поток тепла через единицу поверхности

$$q = k \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} \geqslant \frac{Q}{4\pi R^2},$$

где k и $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}$ суть коэффициент теплопроводности и геотермический градиент у поверхности Земли.

Отсюда для $\frac{\partial u}{\partial z}$ при $z = 0$ находим значение

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} \geqslant \frac{AR}{3k} \cong 6{,}3 \cdot 10^{-2} \frac{град}{см},$$

где $R = 6{,}3 \cdot 10^8$ *км* — радиус Земли и $k = 0{,}004$ — среднее значение коэффициента теплопроводности осадочных пород.

Таким образом, геотермический градиент, вычисленный в предположении, что распределение радиоактивных элементов постоянно и что Земля не нагревается благодаря радиоактивному распаду, на два порядка превышает наблюдаемое значение геотермического коэффициента

$$\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \frac{град}{см}.$$

Откажемся от гипотезы постоянства распределения радиоактивных элементов и предположим, что радиоактивные элементы расположены в слое мощности H у поверхности Земли. Пренебрегая кривизной Земли, получим для определения стационарной температуры уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{A}{k} & \text{для } 0 \leqslant z \leqslant H, \\ 0 & \text{для } z > H \end{cases}$$

с условиями

$$u(0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z \to \infty} = 0.$$

Очевидно, что решение поставленной задачи равно

$$u(z) = \begin{cases} \frac{A}{k}\left(Hz - \frac{z^2}{2}\right), & 0 \leqslant z \leqslant H, \\ \frac{A}{k}\frac{H^2}{2}, & z \geqslant H, \end{cases}$$

так как эта функция непрерывна вместе с первой производной при $z = H$ и удовлетворяет условиям задачи.

Определяя значение градиента этой функции при $z = 0$, равное

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{AH}{k},$$

и сопоставляя его с наблюдаемым значением

$$\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \frac{град}{см},$$

находим, что

$$H = \frac{\gamma k}{A} \cong 10^6 \text{ см} = 10 \text{ км}.$$

Оценим влияние сделанной гипотезы стационарности температуры на величину геотермического градиента. Рассмотрим для этого решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f,$$

$$f = \begin{cases} \frac{A}{c\rho}, & 0 \leqslant z \leqslant H, \\ 0, & z > H \end{cases}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$w(z, 0) = 0,$$

$$w(0, t) = 0.$$

Решение этой задачи представляется, как мы видели в § 3, интегралом

$$w(z,\ t)=\int_0^\infty\int_0^t G(z,\ \zeta;\ t=\tau)f(\zeta)\,d\tau\,d\zeta,$$

где G — функция источника для полубесконечной прямой, равная

$$G(z,\ \zeta;\quad t-\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{a^2(t-\tau)}}\left\{e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right\}.$$

Вычислим значение градиента при $z=0$, принимая во внимание значение функции f:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{c\rho 2\sqrt{\pi}}\int_0^H\int_0^t\frac{\zeta}{\sqrt{[a^2(t-\tau)]^3}}e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}}d\zeta\,d\tau=$$

$$=\frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}}\int_0^{\frac{H^2}{4a^2(t-\tau)}}e^{-\alpha}\,d\alpha\,d\tau=$$

$$=\frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{a^2\theta}}\left[1-e^{-\frac{H^2}{4a^2\theta}}\right]d\theta,\ \text{где}\ \theta=t-\tau.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2\sqrt{t}}{a}-\frac{H}{a^2}\int_{\sigma_0}^\infty e^{-\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma^2}\right\},$$

где

$$\sigma=\frac{H}{2\sqrt{a^2\theta}},\quad \sigma_0=\frac{H}{2\sqrt{a^2t}},\quad \frac{d\sigma}{\sigma^2}=-\frac{a^2}{H}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\theta}}.$$

Вычислим интеграл

$$\int_{\sigma_0}^\infty e^{-\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma^2}=-\left.\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma}\right|_{\sigma_0}^\infty-2\int_{\sigma_0}^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma=\frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma_0}-2\int_{\sigma_0}^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma,$$

откуда

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{c\rho a^2}\left\{\frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left[1-e^{-\frac{H^2}{4a^2t}}\right]+H\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{H}{2\sqrt{a^2t}}}^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma\right\}.\qquad(1)$$

Отметим, что

$$\lim_{t\to\infty}\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{k}H,$$

так как $c\rho a^2 = k$, предел первого слагаемого в фигурных скобках равен нулю, а предел второго слагаемого равен H.

Вычислим отклонение $\frac{\partial w}{\partial z}$ от его предельного значения для

$$t = 2 \cdot 10^9 \text{ лет} = 6 \cdot 10^{16} \text{ сек.}$$

Значение σ_0 мало:

$$\sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}} = \frac{10^6}{2\sqrt{6 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{16}}} = \frac{1}{2 \cdot 19} \cong 0{,}025.$$

Разлагая функции, входящие в формулу (1) в ряды, получим:

$$\frac{A}{k} H - \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{A}{k} H \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma_0} [\sigma_0^2 + \ldots] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma_0 \right\} \cong \frac{A}{k} H \cdot 0{,}04,$$

т. е. $\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}$ отличается от своего предельного значения на 4%.

Нетрудно было бы вычислить функцию $w(z, t)$ для $z > 0$ и убедиться, что для $z \geqslant H$, $w(z, t)$ далеко еще не достигает своего предельного значения для t, равного возрасту Земли [1]) (хотя, как мы убедились, градиент у поверхности практически равен своему предельному значению).

Приведенные выше рассуждения носят, конечно, лишь оценочный характер; однако, принимая во внимание весьма большую устойчивость скорости радиоактивного распада, не изменяющейся под воздействием доступных нам температур и давлений, мы должны притти к заключению о том, что концентрация радиоактивных элементов должна быстро убывать с глубиной, если основываться на значении A для верхних слоев земной коры, установленном многочисленными измерениями. Физическое объяснение, позволяющее установить закон убывания концентрации радиоактивных элементов с глубиной, до сих пор отсутствует.

III. Метод подобия в теории теплопроводности

Для решения ряда задач теплопроводности весьма полезен *метод подобия*. В качестве примера рассмотрим две задачи.

1. Функция источника для бесконечной прямой. Уравнение теплопроводности, как нетрудно видеть, остается неизменным при преобразовании переменных

$$\left.\begin{aligned} x' &= kx, \\ t' &= k^2 t, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

т. е., если масштабы длины меняются в k раз, то масштаб времени следует изменить в k^2 раз.

---

[1]) А. Н. Тихонов, О влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры. Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 1937, стр. 431—459.

Будем искать сначала решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

При указанном выше изменении масштабов начальное условие (3) остается также без изменения, поэтому для функции $u(x, t)$ должно иметь место равенство

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t) \tag{4}$$

при любых значениях x, t и k.

Полагая

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \tag{5}$$

получим:

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{6}$$

Таким образом, u зависит только от аргумента

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \tag{7}$$

Вычисляя производные для u из формулы (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x \cdot u_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -u_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz},$$

подставляя в уравнение теплопроводности (2) и сокращая на множитель $\frac{u_0}{4t}$, получаем:

$$a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \tag{8}$$

при дополнительных условиях

$$f(-\infty) = 0, \qquad f(\infty) = 1, \tag{9}$$

соответствующих начальному условию для функции u.

Интегрируя уравнение (8) будем иметь:

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2z, \qquad f' = Ce^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

$$f = C \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Здесь нижний предел выбран так, чтобы выполнялось первое условие (9). Чтобы удовлетворить второму условию (9), следует положить:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом,

$$u(x,\ t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right], \tag{10}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

(интеграл ошибок). Если начальное значение имеет вид

$$u(x,\ 0) = \begin{cases} u_0 & \text{при} \quad x > \bar{x}, \\ 0 & \text{при} \quad x < \bar{x}, \end{cases} \tag{11}$$

то

$$u(x,\ t) = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]. \tag{12}$$

Обратимся теперь к решению второй вспомогательной задачи, где начальные значения задаются в виде

$$u(x,\ 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x_2 < x, \\ u_0 & \text{при} \quad x_1 < x < x_2, \\ 0 & \text{при} \quad x < x_1. \end{cases} \tag{13}$$

В этом случае

$$u(x,\ t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right].$$

Начальная температура u_0 соответствует количеству тепла

$$Q = c\rho\,(x_2 - x_1)\,u_0.$$

Если

$$Q = c\rho,$$

то

$$u(x,\ t) = -\frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]. \tag{14}$$

Функция влияния источника, сосредоточенного в точке, очевидно, представляет предел функции $u(x,\ t)$ при $x_2 - x_1 \to 0$.

Предельный переход в формуле (14) дает:

$$u(x,\ t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x - \xi}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]_{\xi = x_1}, \tag{15}$$

так как в правой части формулы (14) стоит разностное отношение, пределом которого является производная в (15).

Производя дифференцирование, находим:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{a^2t}}\ e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2t}}, \tag{16}$$

т. е. $u(x,\ t)=G(x,\ x_1,\ t)$ — функция мгновенного точечного источника.

2. Краевые задачи для нелинейного уравнения теплопроводности. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\ (u)\ \frac{\partial u}{\partial x}\right]=c\rho\ \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{17}$$

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,\ t)=u_1 \tag{18}$$

и начальному условию

$$u(x,\ 0)=u_2. \tag{19}$$

В этом случае преобразование (1) также не меняет уравнения (17) и дополнительных условий (18) и (19). Отсюда следует, что

$$u(x,\ t)=f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)=f(z)\quad\left(z=\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{20}$$

Пользуясь этим выражением, получаем для f уравнение

$$\frac{d}{dz}\left[k(f)\frac{df}{dz}\right]=-2c\rho z\ \frac{df}{dz} \tag{21}$$

с дополнительными условиями

$$f(0)=u_1,\qquad f(\infty)=u_2. \tag{22}$$

Функция f в тех случаях, когда ее не удается найти аналитически, может быть найдена при помощи численного интегрирования.

Уравнение (21) при весьма общих предположениях относительно функций k и $c\rho$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (22). Однако на доказательстве этого факта мы не будем останавливаться.

Рассмотрим в качестве примера уравнение (17), где $k(u)=k_0+k_1(u)$ — линейная функция, а $c\rho$ — постоянная величина. Изменяя масштаб времени и шкалу значений u, мы получим для преобразованной функции уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha u)\ \frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{23}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x,\ 0)=0, \qquad u(0,\ t)=1. \tag{24}$$

Полагая

$$u(x,\ t)=f(z), \qquad z=\frac{x}{2\sqrt{t}},$$

получаем для f условие

$$\frac{d}{dz}\left[(1+\alpha f)\frac{df}{dz}\right]=-2z\frac{df}{dz}, \tag{25}$$

$$f(0)=1, \qquad f(\infty)=0. \tag{26}$$

На рис. 42 приведены результаты численного интегрирования уравнения (25) для различных значений α.

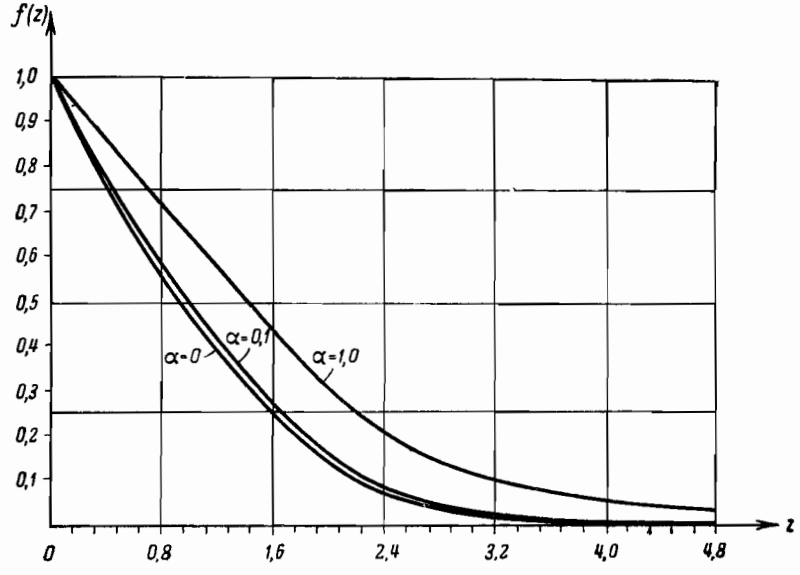


Рис. 42.

IV. Задача о промерзании

При изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния, в частности при переходе температуры через точку плавления — переход из жидкой фазы в твердую (или обратный переход). На поверхности фазового перехода все время сохраняется постоянная температура. При движении поверхности фазового перехода происходит выделение скрытой теплоты затверде-

вания (плавления). Сформулируем те дополнительные условия, которые должны выполняться на поверхности затвердевания [1]).

Рассмотрим плоскую задачу, когда поверхностью раздела является плоскость $x=\xi(t)$. За время t, $t+\Delta t$ граница $x=\xi$ переместится от точки $\xi=x_1$ до точки $\xi=x_2=x_1+\Delta\xi$. При этом затвердевает масса $\rho\Delta\xi$ (или расплавляется, если $\Delta\xi<0$) и выделяется соответствующее количество тепла $\lambda\rho\Delta\xi$.

Для выполнения теплового баланса это количество тепла должно равняться разности количеств тепла, прошедших через границы $\xi=x_1$ и $\xi=x_2$, т. е. должно выполняться условие

$$\left[k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x_1}-k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x_2}\right]\Delta t=\lambda\rho\Delta\xi,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности первой и второй фазы, а λ — скрытая теплота плавления.

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, мы и получим дополнительное условие на границе раздела в следующем виде:

$$k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi}-k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi}=\lambda\rho\frac{d\xi}{dt}. \tag{1}$$

Это условие имеет место как для процесса затвердевания $\left(\text{когда } \Delta\xi>0 \text{ и } \frac{d\xi}{dt}>0\right)$, так и для процесса плавления $\left(\text{когда } \Delta\xi<0 \text{ и } \frac{d\xi}{dt}<0\right)$; направление процесса определяется знаком левой части.

Рассмотрим процесс замерзания воды, при котором температура фазового перехода равна нулю. Будем рассматривать массу воды $x\geqslant 0$, ограниченную с одной стороны плоскостью $x=0$. В начальный момент $t=0$ вода обладает постоянной температурой $c>0$. Если на поверхности $x=0$ все время поддерживается постоянная температура $c_1<0$, то граница замерзания $x=\xi$ будет со временем проникать в глубь жидкости.

Задача о распределении температуры внутри замерзающей воды и о скорости распространения границы замерзания сводится к решению уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t}&=a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{для} \quad 0<x<\xi,\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}&=a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \xi<x<\infty\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned}u_1&=c_1 \quad \text{при} \quad x=0,\\ u_2&=c \quad \text{при} \quad t=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XIII, Гостехиздат, 1937.

и условиями на границе замерзания

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \tag{4}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}, \tag{1}$$

где k_1, a_1^2 и k_2, a_2^2 — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности твердой и, соответственно, жидкой фаз.

Решение задачи будем искать в виде

$$u_1 = A_1 + B_1\Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right),$$

$$u_2 = A_2 + B_2\Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

где A_1, B_1, A_2 и B_2 — пока неопределенные постоянные, а Φ — интеграл ошибок

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

Удовлетворяя условиям (3) и (4), получим:

$$A_1 = c_1, \quad A_2 + B_2 = c$$

из условия (3) и

$$A_1 + B_1\Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0,$$

$$A_2 + B_2\Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0$$

из условия (4). Последние условия должны иметь место для любых значений t. Это возможно лишь при выполнении соотношения

$$\xi = \alpha\sqrt{t}, \tag{5}$$

где α — некоторая постоянная. Соотношение (5) определяет закон движения границы замерзания.

Для постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 и α получаются выражения

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= c_1, & B_1 &= -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \\ A_2 &= -\frac{c\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, & B_2 &= \frac{c}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Чтобы определить постоянную α, надо воспользоваться соотношением (1)

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2\left[1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (7)$$

Решение этого трансцендентного уравнения и дает значение α. Наличие хотя бы одного решения при $c_1 < 0$, $c > 0$ следует уже из того, что при изменении α от 0 до ∞ левая часть уравнения изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ [1]), а правая — от 0 до $-\infty$. В случае, если c равно температуре плавления ($c = 0$), то выражения (6) и (7) для определения коэффициентов принимают более простой вид:

$$A_2 = B_2 = 0,$$

$$A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \qquad (6')$$

и

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (7')$$

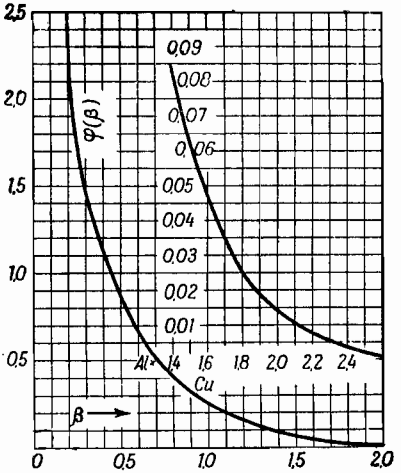


Рис. 43.

Положив $\frac{\alpha}{2a_2} = \beta$, можем переписать уравнение (7′) в таком виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

где постоянная D определяется выражением

$$D = \frac{\lambda\rho\, a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

Воспользовавшись графиком функции $\varphi(\beta') = \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}\,\Phi(\beta)}$, данным на рис. 43, легко графически определить значение α.

Решение задачи о промерзании может быть также получено при помощи метода подобия, приведенного в приложении III к этой главе.

---

[1]) Асимптотическое представление функции $1-\Phi(z)$ при $z \to \infty$ см. стр. 672.

Задача о промерзании является в некотором смысле предельным случаем нелинейных краевых задач, рассмотренных в приложении III. В самом деле, коэффициенты теплопроводности и теплоемкости в задаче о промерзании являются кусочно-постоянными функциями, и, кроме того, при $u = 0$ теплоемкость имеет бесконечно большое значение. Этот случай можно получить как предельный при $\varepsilon \to 0$, когда скрытая теплота выделяется не мгновенно, а на некотором промежутке $-\varepsilon$, $+\varepsilon$, причем должно выполняться условие

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} c(u)\,du = \lambda.$$

Однако эту задачу можно решить и непосредственно, пользуясь методом подобия. Нетрудно проверить, что все условия задачи останутся неизменными, если масштаб длины увеличить в k раз, а масштаб времени — в k^2 раз. Это значит, что решение задачи зависит от аргумента $\frac{x}{\sqrt{t}}$, т. е. что

$$u(x,\ t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что движение нулевой изотермы будет описываться уравнением

$$\xi = \alpha\sqrt{t},$$

где α — значение аргумента, при котором

$$f(\alpha) = 0.$$

Для определения функции f мы имеем следующие условия:

$$a_1^2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z\frac{df_1}{dz} \quad \text{для} \quad 0 < z < \alpha,$$

$$a_2^2 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z\frac{df_2}{dz} \quad \text{для} \quad \alpha < z < \infty;$$

$$f_1(0) = c_1; \quad f_2(\infty) = c; \quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0;$$

$$k_1 f_1'(\alpha) - k_2 f_2'(\alpha) = \lambda\rho\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому функция $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = A_1 + B_1\Phi\left(\dfrac{z}{2a_1}\right), & \text{если } 0 < z < \alpha, \\ f_2(z) = A_2 + B_2\Phi\left(\dfrac{z}{2a_2}\right), & \text{если } \alpha < z < \infty. \end{cases}$$

Для определения постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 мы должны использовать условия (3) и (4), из которых вытекают формулы (6). Для

определения α получается условие (7). Таким образом, аналитическая часть решения в обоих методах одинакова.

Изложенные здесь соображения показывают, что задачу о промерзании можно решать также и в тех случаях, когда скрытая теплота выделяется не при фиксированной температуре, а на некотором интервале температур. Подобным же методом можно решить задачу, если имеется не одна, а несколько критических температур, что встречается при фазовых превращениях в процессе перехода от одной кристаллической структуры к другой, например при перекристаллизации стали.

V. Уравнение Эйнштейна — Колмогорова

Микроскопические частицы, находящиеся в среде в свободном, взвешенном состоянии, совершают беспорядочное движение, называемое броуновским. Обозначим вероятность для частицы, вышедшей из точки M_0 в момент t_0, находиться в момент t в малой окрестности ΔV точки M функцией

$$W(M, t; M_0, t_0) \cdot \Delta V. \tag{1}$$

Вероятность здесь понимается в том смысле, что если в течение некоторого малого промежутка $t_0 + \Delta t$ из точки M_0 выходит достаточно большое количество частиц N (причем взаимодействие между ними пренебрежимо мало), то концентрация этих частиц при $\Delta t \to 0$ в точке M в момент t будет равна $W(M, t; M_0, t_0)$, если за единицу массы частиц принять всю массу выходящих из точки M_0 частиц.

С подобным же явлением мы встречаемся при диффузии газа, происходящей в какой-либо (например, воздушной) среде. Функция $W(M, t; M_0, t_0)$ представляет функцию точечного источника, соответствующего единичной массе.

Очевидно, что

$$\int W(M, t; M_0, t_0)\, dV_M = 1 \qquad (t > t_0) \tag{2}$$

и что если начальная концентрация частиц в некоторый момент времени t_0 равна $\varphi(M)$, то концентрация $u(M, t)$ этих частиц в момент $t > t_0$ будет равна

$$u(M, t) = \int W(M, t; P, t_0)\, \varphi(P)\, dV_P, \tag{3}$$

где интеграл берется по всему пространству.

Из последнего равенства следует уравнение [1])

$$W(M, t; M_0, t_0) = \int W(M, t; P, \theta)\, W(P, \theta; M_0, t_0)\, dV_P \qquad (t_0 < \theta < t), \tag{4}$$

---

[1]) М. А. Леонтович, Статистическая физика, гл. VI, Гостехиздат, 1944; А. Н. Колмогоров, Аналитические методы теории вероятности, Успехи математических наук, вып. V, 1938.

имеющее место для любого значения $t_0 < \theta < t$. Это последнее уравнение называют *уравнением Эйнштейна — Колмогорова.*

Покажем, что при определенных условиях, наложенных на функцию $W(M, t; M_0, t_0)$, решение уравнения Эйнштейна — Колмогорова удовлетворяет некоторому уравнению с частными производными параболического типа. Рассмотрим случай, когда положение точки M характеризуется одной координатой x. Предположим, что функция $W(x, t; x_0, t_0)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{x-\xi}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau} \int (x-\xi)\, W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\, d\xi = A(x,\ t). \quad (5)$$

Если за время τ частица переходит из положения ξ в положение x, то $\overline{\frac{x-\xi}{\tau}}$ является средней скоростью частицы. Таким образом, первое условие означает требование существования конечной скорости упорядоченного движения частицы.

2°

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{(x-\xi)^2}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau} \int (x-\xi)^2\, W(x,\ t+\tau,\ \xi,\ t)\, d\xi = 2B(x,\ t). \quad (6)$$

Величина $(x-\xi)^2$ не зависит от направления смещения точки x относительно точки ξ. Среднее значение квадрата отклонения за время τ

$$\overline{(x-\xi)^2} = \int (x-\xi)^2\, W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\, d\xi$$

обычно рассматривается как мера неупорядоченности движения за этот промежуток времени. Требование 2° означает предположение линейной зависимости среднего квадрата от времени при малых τ.

3°

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{|x-\xi|^3}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau} \int |x-\xi|^3 \cdot M(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\, d\xi = 0. \quad (7)$$

Функция $W(x, t+\tau; \xi, t)$, являющаяся функцией точечного источника, для малых значений τ должна быстро убывать, когда $|x-\xi| \to \infty$, и возрастать, когда $|x-\xi|$ мало.

Для получения дифференциального уравнения Эйнштейна — Колмогорова умножим обе части уравнения (4) на произвольную функцию $\psi(x)$, обращающуюся в нуль вместе со своей производной на границах области интегрирования, и проинтегрируем по всей этой области:

$$\int W(x,\ t+\tau;\ x_0,\ t_0)\, \psi(x)\, dx = \int W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\, d\xi \int W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\, \psi(x)\, dx.$$

Разложив в правой части функцию $\psi(x)$ в строку Тейлора по $x-\xi$:

$$\psi(x)=\psi(\xi)+\psi'(\xi)(x-\xi)+\frac{\psi''(\xi)}{2}(x-\xi)^2+\frac{\psi'''(\xi^*)}{3!}(x-\xi)^3,$$

где ξ^* — среднее значение, заключенное между x и ξ, и разделив на τ, после простых преобразований будем иметь:

$$\int\psi(x)\frac{W(x,\ t+\tau;\ x_0,t_0)-W(x,\ t;\ x_0,\ t_0)}{\tau}dx=$$

$$=\int W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\left[\psi'(\xi)\overline{\frac{x-\xi}{\tau}}+\psi''(\xi)\overline{\frac{(x-\xi)^2}{2\tau}}\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{3!\tau}\int\int\psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3\,W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\,W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,d\xi\,dx.$$

Предполагая, что $\psi'''(x)$ ограничена

$$|\psi'''(x)|<A$$

и учитывая, что

$$\int W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\,d\xi=1,$$

мы получим:

$$\left|\frac{1}{\tau}\int\int\psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3\,W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\,W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,d\xi\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\tau}\int|x-\xi|^3\,W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,dx=\overline{\frac{A|x-\xi|^3}{\tau}}.$$

Из условия 3° вытекает, что это выражение при $\tau\to 0$ стремится к нулю. Поэтому, переходя к пределу при $\tau\to 0$ и используя условия 1°, 2°, получаем:

$$\int\psi(x)\frac{\partial W(x,\ t;\ x_0,\ t_0)}{\partial t}dx=$$

$$=\int W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\,[\psi'(\xi)\,A(\xi,\ t)+\psi''(\xi)\,B(\xi,\ t)]\,d\xi.$$

После интегрирования по частям правой части, принимая во внимание, что функция ψ обращается в нуль вместе со своей производной на границе области интегрирования, получим:

$$\int\psi(x)\left[\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial(AW)}{\partial x}-\frac{\partial^2(BW)}{dx^2}\right]dx=0.$$

Так как это соотношение должно иметь место для произвольной функции $\psi(x)$, то для функции вероятности $W(x,\ t;\ x_0,\ t_0)$ мы получаем *дифференциальное уравнение Эйнштейна — Колмогорова*

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\partial(AW)}{\partial x}+\frac{\partial^2(BW)}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Полученное уравнение является уравнением параболического типа, подобным уравнению теплопроводности, и может быть записано в виде

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x}(BW_x) + \alpha W_x + \beta W, \tag{9}$$

где

$$\alpha = -A + B_x,$$

$$\beta = -A_x + B_{xx} = \alpha_x.$$

Из уравнения (9) видно, что величина B имеет физический смысл коэффициента диффузии. Если рассматриваемый процесс однороден в пространстве и времени, т. е. функция W зависит только от разности $\xi = x - x_0$ и $\theta = t - t_0$, то коэффициенты A и B не зависят от x и t и являются постоянными. Уравнение (8) в этом случае является уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A\frac{\partial W}{\partial x} + B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Если функция W зависит только от $|x - \xi|$, т. е. вероятности смещения направо и налево на одинаковые расстояния от точки ξ равны, то очевидно, что A должно быть равно нулю. Аналитически это следует из формулы (5) в силу того, что подинтегральная функция нечетна.

В этом случае уравнение (8) является простейшим уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{11}$$

VI. δ-функция

1. Определение δ-функции. Наряду с непрерывно распределенными величинами (масса, заряд, тепловые источники, механический импульс и т. п.) часто приходится иметь дело с сосредоточенными величинами (точечная масса, точечный заряд, точечный источник тепла, сосредоточенный импульс и т. д.). Не следует забывать, что эти понятия являются «предельными образами», хотя физики часто пользуются ими как самостоятельными понятиями, опуская соответствующий предельный переход.

Имея в виду физический смысл задачи, рассмотрим потенциал в точке M (см. главу IV, § 5) единичной массы, сосредоточенной внутри некоторого объема T в окрестности точки M_0. Возьмем какую-либо последовательность функций $\{\rho_n\}$ ($\rho_n > 0$), каждая из которых равна нулю вне шара $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ радиуса ε_n с центром в точке M_0,

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и для которых, начиная с некоторого n,

$$\int\int\int_T \rho_n(P)\,d\tau_P = \int\int\int_{S_{\varepsilon_n}^{M_0}} \rho_n(P)\,d\tau_P = 1. \tag{1}$$

Рассматривая последовательность функций

$$u_n = \int\int\int_T \frac{\rho_n}{r}\,d\tau,$$

являющихся потенциалами масс, распределенных с плотностями ρ_n, и совершая предельный переход при $n \to \infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{r_{M_0M}}. \tag{2}$$

Этот результат, очевидно, не зависит от выбора последовательности $\{\rho_n\}$. Хотя последовательность $\{u_n\}$ и сходится к $\frac{1}{r}$, однако последовательность $\{\rho_n\}$ не имеет предела в классе рассматриваемых кусочно-дифференцируемых функций. «Предельный образ», соответствующий последовательности $\{\rho_n\}$, называют функцией $\delta(M, M_0)$.

Основным свойством, определяющим δ-функцию, является следующее формальное операторное соотношение:

$$\int\int\int_T \delta(M_0, M) f(M)\,d\tau_M = \begin{cases} f(M_0), & \text{если } M_0 \subset T, \\ 0, & \text{если } M_0 \not\subset T, \end{cases} \tag{3}$$

где $f(M)$ — произвольная непрерывная функция точки M. Имея в виду, что при $n \to \infty$ функции ρ_n равномерно стремятся к нулю во всякой области, не содержащей точки M_0, и неограниченно возрастают в окрестности $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ точки M_0, иногда определяют δ-функцию формально при помощи соотношений

$$\left.\begin{aligned} \delta(M, M_0) &= 0 \quad \text{при } M \neq M_0, \\ \delta(M, M_0) &= \infty \quad \text{при } M = M_0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и

$$\int\int\int_T \delta(M, M_0)\,d\tau_M = \begin{cases} 1 \text{ при } M_0 \subset T, \\ 0 \text{ при } M_0 \not\subset T. \end{cases} \tag{5}$$

Равенство (5) является очевидным следствием формулы (3) при $f = 1$.

При рассмотрении последовательностей функций в различных задачах приходится иметь дело с разными определениями сходимости.

Говорят, что последовательность функций

$$\{u_n(x)\} = u_1(x), \quad u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots \tag{6}$$

сходится равномерно на интервале (a, b), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что при $n, m > N$ для любого x из (a, b) будет выполняться условие

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon \text{ при } n, m > N.$$

Говорят, что последовательность (6) сходится в среднем на интервале (a, b), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что при $n, m > N$

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

Говорят, что последовательность (6) сходится слабо на интервале (a, b), если для любой непрерывной функции f существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx.$$

При рассмотрении сходящихся последовательностей обычно вводят *предельные элементы* последовательностей. Рассмотрим класс непрерывных функций на интервале (a, b). В случае равномерной сходимости предельный элемент принадлежит тому же классу функций, что не всегда имеет место для сходимости в среднем и слабой сходимости.

Если предельный элемент не принадлежит рассматриваемому классу функций, то вводят предельные элементы, расширяя исходный класс. При этом под расширением понимается совокупность исходных и предельных элементов. С понятием расширения встречаются в теории действительного числа, когда иррациональные числа вводятся как предельные элементы, определяемые классом эквивалентных последовательностей.

Говоря о предельных элементах в смысле слабой сходимости, мы будем говорить, что две последовательности, $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, имеют один и тот же предельный элемент, если эти последовательности эквивалентны, т. е. последовательность $\{u_n - v_n\}$ слабо сходится к нулю:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) [u_n(x) - v_n(x)] dx = 0.$$

Будем называть последовательность неотрицательных функций $\{\delta_n\}$ нормированной локальной последовательностью точки x_0, если функция δ_n равна нулю вне интервала $(x_0 - \varepsilon_n, x_n + \varepsilon_n)$, где

$$\varepsilon_n \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

а

$$\int_a^b \delta_n(x) dx = 1.$$

Очевидно, что последовательность $\{\delta_n\}$ сходится слабо. Предельный элемент последовательности $\{\delta_n\}$ обычно называют *δ-функцией* точки x_0.

В том случае, если предельный в смысле слабой сходимости элемент u последовательности $\{u_n\}$ выходит из класса функций u_n, то интеграл от произведения некоторой функции $f(x)$ на элемент u определяется как предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,u_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,u\,dx.$$

Очевидно, что для δ-функции точки x_0 имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x_0,\ x)\,dx=f(x_0).$$

Это соотношение часто принимают за определение δ-функции.

2. Разложение δ-функции в ряд Фурье. δ-функцию можно определить так же, как предельный образ других последовательностей, эквивалентных в смысле слабой сходимости приведенной выше последовательности $\delta_n(x)$ локальных нормированных функций точки x_0.

Рассмотрим последовательность функций

$$\bar{\delta}_n(x_0,\ x)=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\left(\cos\frac{m\pi}{l}\,x_0\cdot\cos\frac{m\pi}{l}\,x+\sin\frac{m\pi}{l}\,x_0\sin\frac{m\pi}{l}\,x\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\cos\frac{m\pi}{l}(x-x_0) \tag{7}$$

или в комплексной форме

$$\bar{\delta}_n(x,\ x_0)=\frac{1}{2l}\sum_{-n}^{n}e^{im\frac{\pi}{l}(x-x_0)}, \tag{7'}$$

определенную на интервале $(-l,\ l)$.

Очевидно, что для любой функции $g(x)$, разлагаемой в ряд Фурье, имеет место следующее предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}\bar{\delta}_n(x_0,\ x)\,g(x)\,dx=g(x_0), \tag{8}$$

которое показывает, что в классе функций $\{g(x)\}$, разлагаемых в ряды Фурье, приведенная выше последовательность $\bar{\delta}_n(x_0,\ x)$ эквивалентна в смысле слабой сходимости последовательности $\bar{\delta}_n(x_0, x)$,

т. е. что

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{m\pi}{l}(x_0 - x), \tag{9}$$

если это равенство понимать с изложенной выше точки зрения слабой сходимости.

С этой же точки зрения имеет место равенство

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\,\varphi_n(x_0), \tag{10}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортогональная и нормированная система функций, определенная на некотором интервале (a, b), а также равенство

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0 - x)}\,dk = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos k(x_0 - x)\,dk. \tag{11}$$

Покажем, что при вычислении интегралов, содержащих δ-функцию, можно пользоваться рядом (9), производя почленное интегрирование подинтегральной функции.

Рассмотрим некоторую функцию $g(x)$, разложимую в ряд Фурье, и интеграл

$$\int_{-l}^{l} g(x)\,\delta(x_0, x)\,dx.$$

Подставляя сюда вместо $\delta(x_0, x)$ ее выражение из формулы (9), выполним почленное интегрирование ряда, стоящего по знаком интеграла. В результате получим:

$$g(x) = \frac{\bar{g}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\bar{g}_m \cos\frac{\pi m}{l}x + \bar{\bar{g}}_m \sin\frac{\pi m}{l}x\right), \tag{11'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0)\,dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0)\cos\frac{\pi m}{l}x_0\,dx_0, \\ \bar{\bar{g}}_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0)\sin\frac{\pi m}{l}x_0\,dx_0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Сопоставление формулы (11) с равенством

$$\int_{-l}^{l} \delta(x, x_0)\, g(x)\, dx = g(x_0) \qquad (-l < x_0 < l)$$

показывает, что выполненное выше почленное интегрирование ряда для δ-функции приводит к правильному результату.

Таким образом, в классе функций, разложимых в ряд Фурье, последовательность частичных сумм

$$\frac{1}{2l} \sum_{n=-k}^{k} e^{i \frac{\pi n}{l} (x - x')}$$

эквивалентна нормированной локальной последовательности $\{\delta_n\}$.

Другие формы представления δ-функции также основаны на использовании некоторых функциональных последовательностей, эквивалентных в смысле слабой сходимости последовательности $\{\delta_n\}$.

3. Применение δ-функции к построению функции источника. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{13}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{14}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{15}$$

Заданной функции $\varphi(x)$ соответствует единственное решение задачи

$$u(x, t) = \mathscr{L}[\varphi(x)].$$

Допустим, что оператор $\mathscr{L}$ можно представить в виде

$$u(x, t) = \mathscr{L}[\varphi(x)] = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

где $G(x, \xi, t)$ — ядро оператора L.

Для того чтобы найти ядро $G(x, \xi, t)$, положим:

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0). \tag{14'}$$

Заменяя в формуле (16) $\varphi(x)$ δ-функцией, получим:

$$u(x, t) = G(x, x_0, t), \tag{17}$$

т. е. $G(x, x_0, t)$ является решением задачи (13) при начальном условии (14').

Представим δ-функцию в виде ряда Фурье

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

Ядро G, очевидно, надо искать в виде суммы

$$G(x, x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{18}$$

каждое слагаемое которой должно удовлетворять уравнению теплопроводности. Отсюда следует, что

$$A_n(t) = B_n e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Из начального условия сразу же получаем:

$$B_n = \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

Таким образом, мы формально получили для ядра G выражение

$$G(x, x_0, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0, \tag{19}$$

совпадающее с представлением для функции источника, которое было исследовано в § 3. Решение задачи (13)—(15) дается формулой (16), где $G(x, x_0, t)$ — функция, определяемая формулой (19).

Подобным же образом можно найти выражение для функции источника на неограниченной прямой. Функция G в этом случае будет определяться условиями

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{20}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \delta(x - x_0). \tag{21}$$

Имея в виду разложение δ-функции в интеграл Фурье

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda (x - x_0)\, d\lambda,$$

будем искать $G(x, x_0, t)$ в виде

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_\lambda(t) \cos \lambda (x - x_0)\, d\lambda. \tag{22}$$

Из уравнения (20) находим:

$$A_\lambda(t) = A_\lambda^{(0)} e^{-a^2 \lambda^2 t}. \tag{23}$$

Полагая $t = 0$ и сравнивая формулы (23) и (21), получаем:

$$A_\lambda^{(0)} = 1.$$

Таким образом,

$$G(x,\ x_0,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-x_0)\,d\lambda.$$

Вычисление этого интеграла, проведенное в § 3 главы III, дает:

$$G(x,\ x_0,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}.$$

Отсюда следует, что решение задачи о распространении начальной температуры на бесконечной прямой должно выражаться формулой

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{24}$$

Выяснение границы применимости формул, полученных методом δ-функции, требует специального исследования.

В качестве примера рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$u_t=a^2u_{xx}+\frac{F(x,\ t)}{c\rho}, \tag{25}$$

где $F(x,\ t)$ — плотность распределенных тепловых источников. Если в точке $x=\xi$ в момент $t=t_0$ помещен мгновенный источник тепла мощности Q_0, то

$$F(x,\ t)=Q_0\delta(x-\xi)\,\delta(t-t_0). \tag{26}$$

Найдем решение неоднородного уравнения

$$u_t=a^2u_{xx}+\frac{Q_0}{c\rho}\,\delta(x-\xi)\,\delta(t-t_0)\qquad(t_0>0) \tag{27}$$

при нулевом начальном условии

$$u(x,\ 0)=0.$$

Учитывая интегральное представление

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda,$$

будем искать функцию $u(x,\ t)$ в виде

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty u_\lambda(t)\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (27), получаем уравнение для $u_\lambda(t)$:

$$\dot{u}_\lambda(t) + a^2\lambda^2 u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho}\,\delta(t - t_0)$$

с начальным условием

$$u_\lambda(0) = 0.$$

Как известно, решение неоднородного уравнения

$$\dot{u} + \alpha^2 u = f(t), \quad u(0) = 0$$

имеет вид

$$u(t) = \int_0^t e^{-\alpha^2(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau. \tag{28}$$

В нашем случае

$$u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho}\int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\,\delta(\tau - t_0)\,d\tau = \begin{cases} 0 \text{ при } t < t_0 \\ \dfrac{Q_0}{c\rho}\, e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)} \text{ при } t > t_0. \end{cases} \tag{29}$$

Таким образом,

$$u(x,\ t) = \frac{Q_0}{c\rho}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)}\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda = \frac{Q_0}{c\rho}\ G(x-\xi,\ t-t_0),$$

где

$$G(x,\ \xi,\ t-t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-t_0)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

— функция влияния мгновенного точечного источника.

Подобный метод построения функции влияния часто используется в теоретической физике [1]).

---

[1]) См. подробное изложение теории δ-функции и многочисленные примеры ее применения в книге Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова, Классическая теория поля, гл. I, Гостехиздат, 1949.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0.$$

Функция u называется гармонической в области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

При изучении свойств гармонических функций были разработаны различные математические методы, оказавшиеся плодотворными и в применении к уравнениям гиперболического и параболического типов.

§ 1. Задачи, приводящиеся к уравнению Лапласа

1. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач. Рассмотрим стационарное тепловое поле. В главе III было показано, что температура нестационарного теплового поля удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \qquad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right).$$

Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры $u(x, y, z)$, не меняющееся с течением времени и, следовательно, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

При наличии источников тепла получаем уравнение

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k}, \tag{2}$$

где F — плотность тепловых источников, а k — коэффициент теплопроводности. Неоднородное уравнение Лапласа (2) часто называют *уравнением Пуассона.*

Рассмотрим некоторый объем T, ограниченный поверхностью Σ. Задача о стационарном распределении температуры $u(x, y, z)$ внутри тела T формулируется следующим образом:

найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри T уравнению

$$\Delta u = -f(x, y, z) \tag{2}$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

I. $u = f_1$ на Σ (первая краевая задача),

II. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Σ (вторая краевая задача),

III. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ на Σ (третья краевая задача),

где f_1, f_2, f_3, h — заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности Σ [1]).

Физический смысл этих граничных условий очевиден (см. главу III, § 1). Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют *задачей Дирихле*, а вторую задачу — *задачей Неймана*. Если ищется решение в области T_0, внешней по отношению к поверхности Σ, то соответствующую задачу называют *внешней краевой задачей*.

2. Потенциальное течение жидкости. Потенциал стационарного тока и электростатического поля. В качестве второго примера рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников. Пусть внутри некоторого объема T с границей Σ имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$), характеризуемое скоростью $v(x, y, z)$. Если течение жидкости не вихревое, то скорость v является потенциальным вектором, т. е.

$$v = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{3}$$

где φ — скалярная функция, называемая *потенциалом скорости*. Если отсутствуют источники, то

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{4}$$

Подставляя сюда выражение (3) для v, получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

---

[1]) Очевидно, что стационарное распределение температуры может установиться лишь при условии равенства нулю суммарного потока тепла через границу области. Отсюда следует, что функция f_2 должна удовлетворять дополнительному требованию:

$$\iint_{\Sigma} f_2 \, d\sigma = 0.$$

или

$$\Delta\varphi = 0, \tag{5}$$

т. е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Пусть в однородной проводящей среде имеется стационарный ток с объемной плотностью $j(x, y, z)$. Если в среде нет объемных источников тока, то

$$\operatorname{div} j = 0. \tag{6}$$

Электрическое поле E определяется через плотность тока из дифференциального закона Ома

$$E = \frac{j}{\lambda}, \tag{7}$$

где λ — проводимость среды. Поскольку процесс стационарный, то электрическое поле является безвихревым или *потенциальным* [1]), т. е. существует такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, для которой

$$E = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{8}$$

Отсюда на основании формул (6) и (7) заключаем, что

$$\Delta\varphi = 0, \tag{9}$$

т. е. потенциал электрического поля стационарного тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

Рассмотрим электрическое поле стационарных зарядов. Из стационарности процесса следует, что

$$\operatorname{rot} E = 0, \tag{10}$$

т. е. поле является потенциальным и

$$E = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{8}$$

Пусть $\rho(x, y, z)$ — объемная плотность зарядов, имеющихся в среде, характеризуемой диэлектрической постоянной $\varepsilon = 1$. Исходя из основного закона электродинамики

$$\int_S\int E_n\, dS = 4\pi\sum e_i = 4\pi\int_T\int\int \rho\, d\tau, \tag{11}$$

где T — некоторый объем, S — поверхность, его ограничивающая, $\sum e_i$ — сумма всех зарядов внутри T, и пользуясь теоремой Остроградского

$$\int_S\int E_n\, dS = \int_T\int\int \operatorname{div} E\, d\tau, \tag{12}$$

---

[1]) Из второго уравнения Максвелла $\frac{\mu}{c}\dot{H} = -\operatorname{rot} E$ следует, что $\operatorname{rot} E = 0$.

получаем:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho.$$

Подставляя сюда выражение (8) для $\boldsymbol{E}$, будем иметь:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \tag{13}$$

т. е. электростатический потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона. Если объемных зарядов нет ($\rho = 0$), то потенциал φ должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Основные краевые задачи для рассмотренных процессов относятся к трем типам, приведенным выше. Мы не будем здесь останавливаться на некоторых других краевых задачах, характерных для различных физических процессов. Некоторые из этих задач будут приведены в приложениях.

3. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат. Выведем выражение для оператора Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат. Пусть в пространстве вместо декартовых координат x, y, z введены криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 с помощью соотношений

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \tag{14}$$

разрешая которые относительно x, y, z, можно написать

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \tag{15}$$

Полагая $q_1 = C_1$, $q_2 = C_2$, $q_3 = C_3$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные числа, получим три семейства координатных поверхностей:

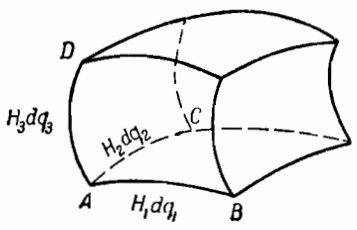


Рис. 44.

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2$$

и

$$f_3(x, y, z) = C_3. \tag{16}$$

Рассмотрим элемент объема в новых координатах, ограниченный тремя парами координатных поверхностей (рис. 44). Вдоль ребра AB $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$, вдоль AD $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, вдоль AC $q_1 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$. Направляющие косинусы касательной к ребрам AB, AD и AC пропорциональны соответственно

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1};$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2};$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}.$$

Условие ортогональности ребер будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_k}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_k}=0 \qquad (i \neq k). \tag{17}$$

Вычислим элемент длины в новых координатах

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}dq_3\right)^2+$$
$$+\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}dq_3\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}dq_3\right)^2. \tag{18}$$

Раскрывая скобки и учитывая условия ортогональности (см. (17)), получаем:

$$ds^2=H_1^2dq_1^2+H_2^2dq_2^2+H_3^2dq_3^2, \tag{19}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_1^2&=\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1}\right)^2,\\ H_2^2&=\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}\right)^2,\\ H_3^2&=\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Вдоль каждого из ребер элементарного объема меняется только одна координата, поэтому для длины этих ребер согласно формуле (19) будем иметь:

$$ds_1=H_1dq_1, \quad ds_2=H_2dq_2, \quad ds_3=H_3dq_3, \tag{21}$$

так что элемент объема равен

$$dv=ds_1\,ds_2\,ds_3=H_1H_2H_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь некоторое векторное поле $\boldsymbol{A}(x, y, z)$. Вычислим $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$, определяемую известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\lim_{v_M\to 0}\frac{\iint\limits_S A_n dS}{v_M}, \tag{23}$$

где S — поверхность, ограничивающая некоторый объем v_M, содержащий рассматриваемую точку M. Применим эту формулу к элементу объема dv, изображенному на рис. 44.

Пользуясь теоремой о среднем, можно представить разность потоков вектора $\boldsymbol{A}$ через противоположные грани, например через правую и левую грани, в виде

$$Q_1=A_1\,ds_2\,ds_3\big|_{q_1+dq_1}-A_1\,ds_2\,ds_3\big|_{q_1}.$$

Принимая во внимание формулы (21), получим:

$$Q_1 = [H_2H_3A_1|_{q_1+dq_1} - H_2H_3A_1|_{q_1}]dq_2\,dq_3 = \\ = \frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{24}$$

Аналогично вычисляются две другие разности потоков через противоположные грани

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1A_2)\,dq_1\,dq_2\,dq_3, \tag{25}$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{26}$$

Подставляя в формулу (23) значение

$$\int\int_S A_n\,dS = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

и пользуясь формулой (22), получаем выражение дивергенции в криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\right]. \tag{27}$$

Предположим, что поле $\boldsymbol{A}$ потенциальное, т. е.

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} u. \tag{28}$$

Тогда

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}; \quad A_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}; \quad A_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}. \tag{29}$$

Подставляя в (27) выражения (29) для A_1, A_2 и A_3, получим выражение для оператора Лапласа

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \\ = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{30}$$

Таким образом, уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в ортогональных криволинейных координатах q_1, q_2 и q_3 записывается следующим образом:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right\} = 0. \tag{31}$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Сферические координаты. В этом случае $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, и формулы преобразования (15) принимают вид

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Вычислим ds^2:

$$ds^2 = (\sin\theta\cos\varphi\,dr + r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi)^2 + \\ + (\sin\theta\sin\varphi\,dr + r\cos\theta\sin\varphi\,d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi)^2 + (\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta)^2;$$

после раскрытия скобок и упрощений находим:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2,$$

т. е.

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\theta.$$

Подставляя значения H_1, H_2, H_3 в формулу (31), получим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right] = 0$$

или окончательно

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{32}$$

2. Цилиндрические координаты. В этом случае $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$;

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z,$$

так что

$$H_1 = 1, \qquad H_2 = \rho, \qquad H_3 = 1.$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах принимает вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{33}$$

Если искомая функция u не зависит от z, то уравнение (33) упрощается:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{34}$$

4. Некоторые частные решения уравнения Лапласа. Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т. е. зависящие только от одной переменной r или ρ.

Решение уравнения Лапласа $u = U(r)$, обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая, например, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, получаем функцию

$$U_0 = \frac{1}{r}, \tag{35}$$

которую часто называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве.*

Аналогично, полагая

$$u = U(\rho)$$

и пользуясь уравнением (33) или (34), найдем решение, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), в виде

$$U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

Выбирая $C_1 = -1$ и $C_2 = 0$, будем иметь:

$$U_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \tag{36}$$

Функцию $U_0(\rho)$ часто называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости* (для двух независимых переменных).

Функция $U_0 = \frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $r = 0$, где она обращается в бесконечность. С точностью до множителя пропорциональности она совпадает с полем точечного заряда e, помещенного в начале координат; потенциал этого поля равен

$$u = \frac{e}{r}.$$

Аналогично, функция $\ln \frac{1}{\rho}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $\rho = 0$, где она обращается в (положительную) бесконечность, и с точностью до множителя совпадает с полем заряженной линии (см. подробнее § 5, п. 2), потенциал которого равен

$$u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

где e_1 — плотность заряда, рассчитанная на единицу длины. Эти функции имеют большое значение в теории гармонических функций.

5. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного. Весьма общим методом решения двумерных задач для уравнения Лапласа является метод, использующий функции комплексного переменного.

Пусть

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

— некоторая функция комплексного переменного $z = x + iy$, причем u и v являются вещественными функциями переменных x и y. Наибольший интерес представляют так называемые аналитические функции, для которых существует производная

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{dz}.$$

Приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, очевидно, может стремиться к нулю многими способами. Для каждого из способов стремления Δz к нулю, вообще говоря, может получиться свое значение предела. Однако если функция $w = f(z)$ аналитическая, то предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ не зависит от выбора пути.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции являются так называемые *условия Коши — Римана*

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Эти условия можно получить, например, следующим образом.

Пусть $w = u + iv = f(z)$ — аналитическая функция. Вычисляя производные

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz},$$

$$w_y = u_y + iv_y = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_y = i\frac{dw}{dz}$$

и требуя равенства значений $\frac{dw}{dz}$, определяемых из этих двух соотношений, получаем:

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz},$$

откуда и следуют условия Коши — Римана. На доказательстве достаточности этих условий мы не будем останавливаться.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что функция, аналитическая в некоторой области G плоскости $z = x + iy$, имеет в этой области производные всех порядков и разлагается в степенной ряд. В частности, для такой функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные производные 2-го порядка по x и y.

Дифференцируя первое равенство формулы (37) по x, а второе по y, получим:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 u = 0.$$

Подобным же образом, меняя порядок дифференцирования, находим:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 v = 0.$$

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Обычно говорят, что u и v, удовлетворяющие условию Коши — Римана, являются сопряженными гармоническими функциями.

Рассмотрим преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), & u &= u(x, y), \\ y &= y(u, v), & v &= v(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

отображающее некоторую область G плоскости (x, y), на область G' плоскости (u, v), так что каждой точке области G соответствует определенная точка области G' и, обратно, каждой точке области G' соответствует определенная точка области G.

Пусть

$$U = U(x, y)$$

— некоторая вещественная дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная внутри области G.

Выясним, как изменяется при этом преобразовании оператор Лапласа функции $U = U[x(u, v), y(u, v)] = \widetilde{U}(u, v)$.

Вычислим производные функции

$$U_x = \widetilde{U}_u u_x + \widetilde{U}_v v_x, \quad U_y = \widetilde{U}_u u_y + \widetilde{U}_v v_y,$$
$$U_{xx} = \widetilde{U}_{uu} u_x^2 + \widetilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\widetilde{U}_{uv} u_x v_x + \widetilde{U}_u u_{xx} + \widetilde{U}_v v_{xx},$$
$$U_{yy} = \widetilde{U}_{uu} u_y^2 + \widetilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\widetilde{U}_{uv} u_y v_y + \widetilde{U}_u u_{yy} + \widetilde{U}_v v_{yy},$$

откуда получаем:

$$U_{xx} + U_{yy} = \widetilde{U}_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + \widetilde{U}_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \\ + 2\widetilde{U}_{vv}(u_x v_x + u_y v_y) + \widetilde{U}_u(u_{xx} + u_{yy}) + \widetilde{U}_v(v_{xx} + v_{yy}). \quad (39)$$

Если u и v являются сопряженными гармоническими функциями, то преобразование (38) эквивалентно преобразованию, осуществляемому аналитической функцией

$$w = f(z) = u + iv \qquad (z = x + iy). \quad (40)$$

В этом случае в силу условий Коши — Римана для функций u и v должны выполняться соотношения

$$u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2,$$
$$u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

Формула (39) принимает вид

$$U_{xx} + U_{yy} = (U_{uu} + U_{vv})|f'(z)|^2 \quad (41)$$

или

$$\Delta_{uv}\widetilde{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2}\Delta_{x,y}U. \quad (41')$$

Отсюда следует, что в результате преобразования (40) гармоническая в области G функция $U(x, y)$ переходит в функцию $\widetilde{U} = U(u, v)$, гармоническую в области G', если только $|f'(z)|^2 \neq 0$.

6. Преобразование обратных радиусов-векторов. При изучении гармонических функций часто пользуются преобразованием обратных радиусов-векторов. Преобразованием обратных радиусов-

векторов в сфере радиуса a называется такое преобразование, при котором всякой точке M ставится в соответствие точка M', лежащая на том же луче из начала координат, что и точка M, радиус-вектор которой r' связан с радиусом-вектором точки M соотношением

$$r'r = a^2 \quad \text{или} \quad r' = \frac{a^2}{r}. \tag{42}$$

В дальнейшем будем считать $a = 1$, чего можно всегда добиться изменением масштаба длины.

Покажем, что гармоническая функция двух независимых переменных $u(\rho, \varphi)$ преобразованием обратных радиусов-векторов переводится в гармоническую функцию

$$v(\rho', \varphi) = u(\rho, \varphi), \quad \text{где} \quad \rho = \frac{1}{\rho'}. \tag{43}$$

В самом деле, функция $u(\rho, \varphi)$, а тем самым и функция $v\left(\frac{1}{\rho}, \varphi\right)$ как функции переменных ρ и φ удовлетворяют уравнениям

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} u = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и

$$\rho^2 \Delta_{\rho\varphi} v = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Переходя к переменным ρ' и φ, получим:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho'} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} = -\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'},$$

откуда и следует, что $v(\rho'\varphi)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_{\rho', \varphi} v = 0$, так как

$$\rho'^2 \Delta_{\rho' \varphi} v = \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Переходя к случаю трех независимых переменных, покажем, что функция

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi), \quad \text{где} \quad r = \frac{1}{r'} \tag{44}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_{r'\theta\varphi} v = 0$, если $u(r, \theta, \varphi)$ — гармоническая функция своих переменных $\Delta_{r, \theta, \varphi} u = 0$.

Преобразование (44) часто называют преобразованием Кельви а.

Легко убедиться непосредственным дифференцированием, что первое слагаемое в операторе Лапласа преобразуется к виду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \tag{45}$$

так что

$$r\Delta_{r, \theta, \varphi} u = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=0.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial r'}\cdot\frac{\partial r'}{\partial r}=-r'^2\frac{\partial v}{\partial r'},$$

находим, что v удовлетворяет уравнению $\Delta_{r',\theta,\varphi}v=0$, так как

$$r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right)+r'^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=0,$$

или

$$r'^4\Delta_{r',\theta,\varphi}v=0.$$

§ 2. Общие свойства гармонических функций

В настоящем параграфе дается интегральное представление гармонических функций, являющееся основным аппаратом для изучения общих свойств гармонических функций. Одним из важнейших следствий интегральной формулы является принцип максимального значения, многократно используемый нами в дальнейшем как при доказательстве теоремы единственности, так и при решении краевых задач. Здесь также дается математическая постановка внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа и доказывается единственность и устойчивость решения этих задач.

1. Формулы Грина. Интегральное представление решения. При изучении уравнений эллиптического типа мы часто будем пользоваться формулами Грина, являющимися прямым следствием формулы Остроградского.

Формула Остроградского в простейшем случае имеет вид

$$\int\int_T\int\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\int\int_\Sigma R\cos\gamma\,d\sigma, \tag{1}$$

где T — некоторый объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью Σ, $R(x, y, z)$ — произвольная функция, непрерывная внутри $T+\Sigma$ и имеющая непрерывные производные внутри T, γ — угол между направлением оси z и внешней нормалью к Σ. В справедливости этой формулы нетрудно убедиться, выполняя интегрирование по z.

Формулу Остроградского обычно записывают в виде

$$\int\int_T\int\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\tau=\int\int_\Sigma\{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\}\,d\sigma, \tag{2}$$

где $d\tau = dx\,dy\,dz$ — элемент объема, $\alpha = (\widehat{nx})$, $\beta = (\widehat{ny})$, $\gamma = (\widehat{nz})$ — углы внешней нормали n к поверхности Σ с координатными осями, P, Q, R — произвольные дифференцируемые функции [1]).

Если P, Q, R рассматривать как компоненты некоторого вектора $A = Pi + Qj + Rk$, то формулу Остроградского можно записать следующим образом:

$$\iiint_T \operatorname{div} A\, d\tau = \iint_\Sigma A_n\, d\sigma, \tag{2'}$$

где

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

и

$$A_n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

— составляющая вектора A вдоль внешней нормали.

Перейдем теперь к выводу формул Грина.

Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ — функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри $T + \Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T.

Полагая

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

и пользуясь формулой Остроградского, приходим к так называемой *первой формуле Грина*

$$\iiint_T u\,\Delta v\, d\tau = \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma - \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau, \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, $\frac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ — производная по направлению внешней нормали.

Если учесть соотношение

$$\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z},$$

то формулу Грина можно представить в виде

$$\iiint_T u\,\Delta v\, d\tau = -\iiint_T \nabla u\,\nabla v\, d\tau + \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma. \tag{3'}$$

Меняя местами функции u и v, будем иметь:

$$\iiint_T v\,\Delta u\, d\tau = -\iiint_T \nabla v\,\nabla u\, d\tau + \iint_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma. \tag{4}$$

[1]) В дальнейшем мы будем предполагать, что к тем областям, с которыми мы будем иметь дело, применимы формулы Остроградского.

Вычитая из равенства (3′) равенство (4), получаем *вторую формулу Грина*

$$\int\int_{T}\int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \int\int_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad (5)$$

Область T может быть ограничена несколькими поверхностями. Формулы Грина применимы и в этом случае, причем поверхностные интегралы следует брать по всем поверхностям, ограничивающим область T.

Как мы видели (§ 1, п. 4), функция $U_0(M) = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ — расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяет уравнению Лапласа.

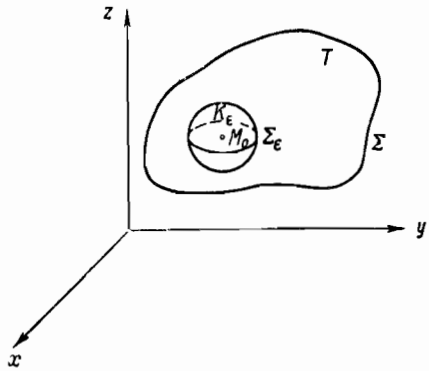


Рис. 45.

Пусть $u(M)$ — гармоническая функция, непрерывная вместе с первыми производными в области $T+\Sigma$ и имеющая вторые производные в T. Рассмотрим функцию $v = \frac{1}{r_{MM_0}}$, где M_0 — некоторая внутренняя точка области T. Поскольку эта функция имеет внутри T разрыв непрерывности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то непосредственно применить вторую формулу Грина в области T к функциям u и v нельзя. Однако функция $v = \frac{1}{r_{MM_0}}$ ограничена в области $T - K_\varepsilon$ с границей $\Sigma+\Sigma_\varepsilon$, где K_ε — шар радиуса ε с центром в точке M_0 и поверхностью Σ_ε (рис. 45).

Применяя вторую формулу Грина (5) к функциям u и $v = \frac{1}{r}$ в области $T - K_\varepsilon$, получаем:

$$\int\int_{T-K_\varepsilon}\int \left(u\Delta\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\Delta u\right)d\tau =$$

$$= \int\int_{\Sigma}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma + \int\int_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma - \int\int_{\Sigma_\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (6)$$

В правой части этого равенства только последние два интеграла зависят от ε. Вычисляя производную по внешней нормали к области

$T - K_\varepsilon$ на Σ_ε, найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\Sigma_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

откуда

$$\int\int_{\Sigma_\varepsilon} u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\int_{\Sigma_\varepsilon} u\,d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\,4\pi\varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \tag{7}$$

где u^* — среднее значение функции $u(M)$ на поверхности Σ_ε. Преобразуем третий интеграл

$$\int\int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\int\int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\,4\pi\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*, \tag{8}$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ — среднее значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на сфере Σ_ε. Подставляя выражения (7) и (8) в формулу (6) и учитывая, что $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ в $T - K_\varepsilon$, будем иметь:

$$\int\int\int_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{r}\right)\Delta u\,d\tau =$$

$$= \int\int_{\Sigma}\left[u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*. \tag{9}$$

Устремим теперь радиус ε к нулю. Тогда получим:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^* = u(M_0)$, так как $u(M)$ — непрерывная функция, а u^* — ее среднее значение по сфере радиуса ε с центром в точке M_0;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 0$, так как из непрерывности первых производных функции $u(M)$ внутри T сразу же вытекает ограниченность нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

в окрестности точки M_0;

3) по определению несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\int\int_{T-K_\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\Delta u\right)d\tau = \int\int\int_{T}\left(-\frac{1}{r}\Delta u\right)d\tau.$$

В результате указанного предельного перехода $\varepsilon \to 0$ мы приходим к *основной интегральной формуле* теории гармонических функций

$$4\pi u(M_0) = -\int\int_{\Sigma}\left[u(P)\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0P}}\right) - \frac{1}{r_{M_0P}}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma_P - \int\int\int_{T}\frac{\Delta u}{r}\,d\tau. \tag{10}$$

В применении к гармонической функции $u(M)$ $(\Delta u = 0)$, формула (10) дает:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma}\int \left[\frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)\right] d\sigma_P. \qquad (11)$$

Таким образом, значение гармонической функции в любой внутренней точке области выражается через значение этой функции и ее нормальной производной на поверхности области. При этом предполагается непрерывность функции u и ее первых производных вплоть до границы. Отметим сразу же, что каждый из интегралов

$$\int_{\Sigma}\int \mu(P) \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P \quad \text{и} \quad \int_{\Sigma}\int \frac{\cdot \partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) \nu(P)\, d\sigma_P, \qquad (12)$$

где μ и ν — непрерывные функции, является гармонической функцией. В самом деле, так как подинтегральные функции и все их производные непрерывны вне поверхности Σ, то производные функций (12) любого порядка можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Так как, кроме того, функции

$$\frac{1}{r_{MP}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\alpha_P + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\beta_P + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\gamma_P$$

удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным $M(x, y, z)$, то в силу обобщенного принципа суперпозиции (см. лемму на стр. 226), функции (12) также удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным x, y, z.

Отсюда вытекает важное следствие: всякая гармоническая функция внутри области гармоничности дифференцируема бесчисленное множество раз [1]). Отметим также, что гармоническая функция аналитична (разлагается в степенной ряд) во всякой точке M_0 области T. В этом можно убедиться с помощью рассуждений, основанных на том же интегральном представлении (11).

Аналогичные формулы имеют место и для гармонических функций двух независимых переменных. Пусть S — некоторая область на плоскости (x, y), ограниченная контуром C, а n — направление нормали к этому контуру, внешнее по отношению к области S. Полагая $v = \ln\frac{1}{r_{M_0P}}$, где $r_{M_0P} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ — расстояние от точки M_0, лежащей внутри S, и проводя рассуждения, подобные

---

[1]) Если для функции u, гармонической внутри T, не выполнено условие непрерывности ее вместе с первой производной на поверхности Σ, то теорема все же сохраняет силу, в чем можно убедиться, окружая точку M областью, лежащей вместе со своей границей внутри T.

тем, которые были проведены выше, мы вместо формулы (10) получим:

$$2\pi u(M_0) = -\int_\sigma \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{M_0P}}\right) - \ln\frac{1}{r_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n}\right] ds_P - \\ - \int_S\int \ln\frac{1}{r}\Delta u\, dS, \qquad (12')$$

где M_0 — любая фиксированная точка внутри области S.

Если $u(M)$ — гармоническая функция, то отсюда следует

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right] ds. \qquad (12'')$$

2. Некоторые основные свойства гармонических функций. Установим несколько важнейших свойств гармонических функций:

1. Если v — функция, гармоническая в области T, ограниченной поверхностью Σ, то

$$\int_S\int \frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = 0, \qquad (13)$$

где S — любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области T. В самом деле, подставляя в первую формулу Грина (3) какую-либо гармоническую функцию $v(\Delta v = 0)$ и функцию $u \equiv 1$, сразу же получим формулу (13). Из формулы (13) следует, что вторая краевая задача $\left(\Delta u = 0,\ \text{в } T,\ \frac{\partial u}{\partial n} = f\Big|_\Sigma\right)$ может иметь решение только при условии

$$\int_\Sigma\int f d\sigma = 0.$$

Это свойство гармонических функций можно интерпретировать как условие отсутствия источников внутри области T.

2. Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области T, а M_0 — какая-нибудь точка, лежащая внутри области T, то имеет место формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{\Sigma_a}\int u\, d\sigma, \qquad (14)$$

где Σ_a — сфера радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащая в области T (теорема среднего значения).

Эта теорема утверждает, что значение гармонической функции в некоторой точке M_0 равно среднему значению этой функции на

любой сфере Σ_a с центром в M_0, если сфера Σ_a не выходит из области гармоничности функции $u(M)$.

Применим формулу (11) к шару K_a с центром в точке M_0 и поверхностью Σ_a:

$$4\pi u(M_0) = -\int\limits_{\Sigma_a}\int \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right] d\sigma.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \text{ на } \Sigma_a \text{ и } \int\limits_{\Sigma_a}\int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

а также

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=a} = -\frac{1}{a^2}$$

(направление внешней нормали к Σ_a совпадает с направлением радиуса), сразу же получаем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{\Sigma_a}\int u\, d\sigma,$$

что и требовалось доказать [1]).

Для случая двух независимых переменных имеет место аналогичная теорема:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{C_a} u\, ds, \tag{15}$$

где C_a — окружность радиуса a с центром в точке M_0.

3. Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $T+\Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальные и минимальные значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности Σ (принцип максимального значения).

Допустим, что функция $u(M)$ достигает максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области T, так что $u_0 = u(M_0) \geqslant u(M)$,

---

[1]) При доказательстве этой теоремы мы пользовались равенством (13), предполагающим существование производных на поверхности сферы. Если функция $u(M)$, непрерывная в замкнутой области $T+\Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ только для внутренних точек T, то предшествующее заключение для сферы Σ_{a_0}, касающейся Σ, было бы необоснованным. Однако теорема верна для любого $a < a_0$, и, переходя к пределу при $a \to a_0$, получаем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a_0^2}\int\limits_{\Sigma_{a_0}}\int u(M)\, d\sigma.$$

где M — любая точка области T. Окружим точку M_0 сферой Σ_ρ радиуса ρ, целиком лежащей внутри области T. Поскольку, по предположению, $u(M_0)$ есть наибольшее значение функции $u(M)$ в $T+\Sigma$, то $u|_\Sigma \leqslant u(M_0)$. Пользуясь формулой среднего значения (14) и заменяя под интегралом всюду $u(M)$ значением $u(M_0)$, получим:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\int\limits_{\Sigma_\rho}\int u(M)\,d\sigma_M \leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2}\int\limits_{\Sigma_\rho}\int u(M_0)\,d\sigma = u(M_0). \qquad (16)$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке M сферы Σ_ρ $u(M) < u(M_0)$, то очевидно, что вместо знака $\leqslant$ будем иметь знак $<$, что приводит к противоречию. Таким образом, на всей поверхности Σ_ρ $u(M) \equiv u(M_0)$.

Если ρ_0^m — минимальное расстояние от M_0 до поверхности Σ, то $u(M) \equiv u(M_0)$ для всех точек, лежащих внутри $\Sigma_{\rho_0^m}$. Отсюда следует, что в точках M^*, принадлежащих общей части $\Sigma_{\rho_0^m}$ и Σ, по непрерывности $u(M^*) = u(M_0)$. Это и доказывает теорему, поскольку мы убедились, что максимальное значение $u(M_0)$ достигается в точках границы M^*.

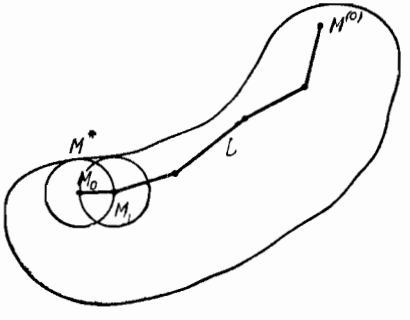


Рис. 46.

Нетрудно убедиться, что если область T связная и максимальное значение достигается хотя бы в одной внутренней точке M_0, то $u(M) \equiv u(M_0)$ во всей области. Пусть $M^{(0)}$ — какая-либо другая точка области T. Соединим точку $M^{(0)}$ с точкой M_0 ломаной линией L (рис. 46), длину которой обозначим l. Пусть M_1 есть последняя точка выхода линии L из $\Sigma_{\rho_0^m}$. В этой точке $u(M_1) = u(M_0)$. Опишем из этой точки сферу $\Sigma_{\rho_0^m}$ радиуса ρ_1^m, касающуюся Σ, и пусть M_2 — последняя точка выхода L из $\Sigma_{\rho_1^m}$; в этой точке $u(M_2) = u(M_0)$. Продолжая этот процесс далее, получим, что не более чем через $p = \frac{l}{\rho^{(m)}}$ шагов, где $\rho^{(m)}$ — минимальное расстояние от L до Σ, одна из этих сфер захватит точку $M^{(0)}$, откуда следует, что $u(M^{(0)}) = u(M_0)$. В силу произвольности $M^{(0)}$ и непрерывности $u(M)$ в замкнутой области $T+\Sigma$, заключаем, что $u(M) \equiv u(M_0)$ всюду, включая точки границы. Таким образом, из всех гармонических функций только постоянная может достигать своего максимального значения во внутренних точках области,

Аналогичную теорему можно доказать и относительно минимального значения.

Следствие 1.

Если функции u и U непрерывны в области $T+\Sigma$, гармоничны в T и если

$$u \leqslant U \quad \text{на} \quad \Sigma,$$

то и

$$u \leqslant U \quad \text{всюду внутри } T.$$

В самом деле функция $U-u$ непрерывна в $T+\Sigma$, гармонична в T и

$$U-u \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

В силу принципа максимального значения

$$U-u \geqslant 0 \quad \text{всюду внутри } T,$$

откуда и следует наше утверждение.

Следствие 2.

Если функции u и U непрерывны в области $T+\Sigma$, гармоничны в T и если

$$|u| \leqslant U \quad \text{на} \quad \Sigma,$$

то

$$|u| \leqslant U \quad \text{всюду внутри } T.$$

Из условий теоремы следует, что три гармонические функции $-U$, u и U удовлетворяют условиям

$$-U \leqslant u \leqslant U \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

Применяя дважды следствие 1, получим, что

$$-U \leqslant u \leqslant U \quad \text{всюду внутри } T$$

или

$$|u| \leqslant U \quad \text{внутри } T.$$

3. Единственность и устойчивость первой краевой задачи. Пусть дана область T, ограниченная поверхностью Σ. Первая краевая задача в области T для уравнения Лапласа заключается в следующем.

Требуется найти такую функцию u, которая

а) удовлетворяет внутри области T уравнению $\Delta u = 0$;

б) определена и непрерывна в замкнутой области $T+\Sigma$, включая границу;

в) принимает на границе Σ заданные значения.

В условии а) предполагается гармоничность функции внутри области T. Требование гармоничности на границе является излишним, так

как оно повлекло бы за собой дополнительные ограничения для граничных значений.

Условие непрерывности в замкнутой области (или какое-либо заменяющее его условие) необходимо для единственности. Если отказаться от этого условия, то любую функцию, равную постоянной C внутри T и заданной функции f на Σ, можно рассматривать как решение задачи, поскольку она удовлетворяет условиям а), в).

Докажем теорему единственности:

первая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа не может иметь двух различных решений.

Допустим, что существуют две различные функции, u_1 и u_2, являющиеся решениями задачи, т. е. функции, непрерывные в замкнутой области $T+\Sigma$, удовлетворяющие внутри области уравнению Лапласа и на поверхности Σ принимающие одно и то же значение f.

Разность этих функций $u = u_1 - u_2$ обладает следующими свойствами:

1) $\Delta u = 0$ внутри области T;

2) u непрерывна в замкнутой области $T+\Sigma$;

3) $u|_\Sigma = 0$.

Функция $u(M)$, таким образом, непрерывна и гармонична в области T и равна нулю на границе. Как известно, всякая непрерывная функция в замкнутой области достигает своего максимального значения. Убедимся в том, что $u \equiv 0$. Если функция $u \not\equiv 0$ и хотя бы в одной точке $u > 0$, то она должна достигать положительного максимального значения внутри области, что невозможно. Совершенно так же доказывается, что функция u не может принимать нигде внутри T отрицательных значений. Отсюда следует, что

$$u \equiv 0.$$

Перейдем к доказательству непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от граничных условий. Напомним, что задача называется физически определенной, если малому изменению условий, определяющих решение задачи, в данном случае граничных условий, соответствует малое изменение самого решения.

Пусть u_1 и u_2 — непрерывные в $T+\Sigma$ и гармонические внутри T функции, для которых модуль разности граничных значений не превосходит $\varepsilon > 0$. Докажем, что

$$|u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon$$

всюду в рассматриваемой области.

Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 2, стр. 298, в силу того, что $U \equiv \varepsilon$ является гармонической функцией.

Таким образом, мы доказали непрерывную зависимость решения от граничных условий и единственность первой внутренней задачи.

4. Задачи с разрывными граничными условиями. Часто встречается также первая краевая задача с разрывными граничными условиями. Функция, непрерывная в замкнутой области, не может быть решением этой задачи. Поэтому требуется уточнить постановку первой краевой задачи применительно к рассматриваемому случаю.

Пусть на кривой C, ограничивающей область S, задана кусочно-непрерывная функция $f(P)$. Требуется найти функцию $u(M)$: 1) гармоническую внутри области S; 2) непрерывно примыкающую к граничным значениям в точках непрерывности последних; 3) ограниченную в замкнутой области $S+C$.

Заметим, что дополнительное требование ограниченности фактически относится к окрестностям точек разрыва функции $f(P)$.

Докажем следующую теорему:

решение первой краевой задачи с кусочно-непрерывным граничным условием единственно.

Пусть u_1 и u_2 — два решения поставленной задачи. Разность

$$v = u_1 - u_2$$

1) является гармонической функцией внутри S;

2) непрерывно примыкает к нулевым граничным значениям на границе, за исключением точек разрыва $f(P)$, в которых она может претерпевать разрыв;

3) ограничена в $S+C$; $|v| < A$.

Построим гармоническую функцию

$$U(M) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{D}{r_i},$$

где ε — произвольное положительное число, D — диаметр области, r_i — расстояние от рассматриваемой точки M до i-й точки разрыва P_i. Функция $U(M)$ положительна, так как все слагаемые больше нуля.

Построим в каждой точке разрыва P_i круг K_i радиуса δ, выбрав δ так, чтобы каждое слагаемое

$$\varepsilon \ln \frac{D}{r_i}$$

на соответствующей окружности C_i превосходило A, т. е. чтобы $\varepsilon \ln \frac{D}{\delta} \geqslant A$. Функция v непрерывна в замкнутой области $S - \sum_{i=1}^{n} K_i$.

В этой области в силу принципа максимума U является мажорантой функции v:

$$|v(M)| \leqslant U(M),$$

Фиксировав произвольную точку M из области S и устремляя $\varepsilon \to 0$, получим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0;$$

следовательно,

$$v(M) = 0,$$

так как v не зависит от ε, или

$$u_1 \equiv u_2,$$

что и требовалось доказать.

5. Изолированные особые точки. Рассмотрим особые точки гармонической функции. Пусть P — изолированная особая точка, лежащая внутри области гармоничности функции u. Представляются возможными два случая:

1) гармоническая функция ограничена в окрестности точки P;

2) гармоническая функция не ограничена в окрестности точки P.

С особыми точками второго рода мы уже встречались (например, $\ln \frac{1}{r}$). Следующая теорема показывает, что первый тип особых точек не может быть осуществлен.

Если ограниченная функция $u(M)$ является гармонической внутри области S, за исключением точки P, то можно так определить значение $u(P)$, чтобы функция $u(M)$ была гармонической всюду внутри S.

Возьмем круг K_α радиуса α с центром в точке P, целиком лежащий внутри S, и рассмотрим внутри него гармоническую функцию v, совпадающую с функцией u на окружности C_α круга K_α [1]).

Составим разность

$$w = u - v,$$

которая

1) гармонична всюду внутри K_α, кроме точки P, в которой w не определена,

2) непрерывно примыкает к нулевым граничным условиям на C_α,

3) ограничена в замкнутой области $K_\alpha + C_\alpha$ ($|v| < A$).

Так же как и при доказательстве предыдущей теоремы (п. 4), построим неотрицательную гармоническую функцию

$$U(M) = \varepsilon \ln \frac{\alpha}{r}.$$

Здесь ε — произвольное положительное число, α — радиус круга K_α, r — расстояние от рассматриваемой точки M до точки разрыва P.

Построим круг K_δ с центром в точке P, выбрав его радиус δ так, чтобы на его окружности значение U превосходило A, и рассмотрим область $K_\alpha - K_\delta$. Функция w непрерывна в замкнутой обла-

[1]) Существование такой функции будет установлено в § 3, причем построение ее не базируется на доказываемой теореме.

сти $\delta \leqslant r \leqslant \alpha$ и на границе этой области имеет место неравенство $|w| \leqslant U$. В силу принципа максимального значения неотрицательная функция U является мажорантой функции w

$$|w| \leqslant U(M) \text{ для } \delta \leqslant r \leqslant \alpha.$$

Фиксируя произвольную точку M области K_α, не совпадающую с P, и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0,$$

следовательно,

$$w = 0.$$

Таким образом, функция u всюду в области S, за исключением точки P, совпадает с функцией v. Полагая $u(P) = v(P)$, мы получим функцию $u \equiv v$, гармоническую всюду внутри области S. Тем самым теорема доказана.

Аналогично проводится доказательство теоремы для случая трех измерений, где в качестве мажорантной функции может быть взята функция $U(M) = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)$.

При доказательстве теоремы этого пункта мы предполагали, что функция u ограничена в окрестности точки P. Однако те же рассуждения остаются в силе, если предположить, что функция u в окрестности точки P удовлетворяет неравенству

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \log \frac{1}{r_{PM}}, \tag{17}$$

где $\varepsilon(r)$ — произвольная функция, стремящаяся к нулю при $r \to 0$, т. е. в окрестности точки P функция $u(M)$ растет медленнее, чем $\log \frac{1}{r_{PM}}$.

Итак, если функция $u(M)$ является гармонической функцией внутри области S, за исключением точки P, в окрестности которой она растет медленнее, чем $\log \frac{1}{r_{MP}}$ при $M \to P$, то эта функция является ограниченной в окрестности точки P, и можно так определить значение $u(P)$, что функция u будет гармонической во всей области S.

Аналогично в случае трех независимых переменных: если гармоническая функция $u(M)$ в окрестности изолированной особой точки P растет медленнее, чем $\frac{1}{r}$,

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \frac{1}{r_{MP}} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon(r) \to 0 \\ r \to 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

то она ограничена в окрестности этой точки, и можно так определить значение $u(P)$, чтобы функция $u(M)$ была гармонична и в самой точке P.

6. Регулярность гармонической функции в бесконечности. Гармоническая функция трех переменных $u(x, y, z)$ называется регулярной в бесконечности, если

$$|u| < \frac{A}{r} \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \frac{A}{r^2} \tag{19}$$

при $r \geqslant r_0$.

Докажем, что если функция u гармонична вне некоторой замкнутой поверхности Σ и равномерно стремится к нулю на бесконечности, то она регулярна на бесконечности.

Условие равномерного стремления к нулю на бесконечности означает, что существует такая функция $\varepsilon^*(r)$, что

$$|u(M)| < \varepsilon^*(r) \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon^*(r) \to 0 \\ r \to \infty \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где r — радиус-вектор точки M.

Совершая преобразование Кельвина

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi), \quad \text{где} \quad r' = \frac{1}{r},$$

получим, что функция v гармонична всюду внутри поверхности Σ', в которую переходит поверхность Σ при преобразовании обратных радиусов-векторов, за исключением начала координат, где она имеет изолированную особую точку.

Из условия (20) следует, что в окрестности начала координат для функции v имеет место неравенство

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right)\frac{1}{r'} = \varepsilon(r')\frac{1}{r'},$$

где

$$\varepsilon(r') = \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad r' \to 0.$$

На основании последней теоремы п. 5 функция $v(r', \theta, \varphi)$ ограничена и гармонична при $r' \leqslant r_0'$:

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant A \quad \text{при} \quad r' \leqslant r_0', \tag{21}$$

откуда и следует, что

$$|u(r, \theta, \varphi)| = \frac{|v(r', \theta, \varphi)|}{r} \leqslant \frac{A}{r} \quad \text{при} \quad r \geqslant r_0 = \frac{1}{r_0'}.$$

В силу гармоничности функции v при $r' = 0$ можно написать:

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} \cdot v(x', y', z')\right) =$$

$$= -\frac{x}{r^3} \cdot v + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x}\right], \quad (22)$$

где

$$x' = \frac{x}{r} r', \quad y' = \frac{y}{r} r', \quad z' = \frac{z}{r} r'.$$

Отсюда, вычисляя производные $\frac{\partial x'}{\partial x}$, $\frac{\partial y'}{\partial x}$, $\frac{\partial z'}{\partial z}$ и принимая во внимание ограниченность первых производных функции v в окрестности точки $r' = 0$, получаем:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{A}{r^3} \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Аналогичные оценки имеют место для производных $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

7. Внешние краевые задачи. Единственность решения для двух- и трехмерных задач. Внешние краевые задачи по-разному ставятся для трех и двух независимых переменных.

Рассмотрим сначала случай трех измерений. Пусть T — уходящая в бесконечность область, ограниченная некоторой поверхностью Σ. *Первая внешняя краевая задача* состоит в следующем:

требуется найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\Delta u = 0$ в неограниченной области T;

2) u всюду непрерывна, включая поверхность Σ;

3) $u|_\Sigma = f(x, y, z)$, где f — функция, заданная на поверхности Σ;

4) $u(M)$ равномерно стремится к 0 на бесконечности: $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Последнее условие является существенным для единственности решения, в чем легко убедиться на простом примере. Пусть требуется решить внешнюю первую краевую задачу для сферы S_R радиуса R с постоянным граничным условием

$$u|_{S_R} = \text{const} = f_0.$$

Опуская условие 4), видим, что решениями задачи могут служить функции $u_1 = f_0$ и $u_2 = f_0 \frac{R}{r}$, а также любая функция

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2, \text{ где } \alpha + \beta = 1.$$

Докажем, что

внешняя первая краевая задача для гармонических функций с тремя независимыми переменными имеет единственное решение. Предполагая существование двух реше-

ний u_1 и u_2, удовлетворяющих условиям 1) — 4), видим, что их разность $u = u_1 - u_2$ представляет собой решение задачи с нулевыми граничными условиями. Поскольку условие 4) выполнено также для функции u, то для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое R^*, что

$$|u(M)| < \varepsilon \text{ при } r \geqslant R^*.$$

Если точка $\overline{M}$ лежит внутри области T' (рис. 47), заключенной между поверхностью Σ и сферой $S_\Sigma (r \geqslant R^*)$, то $u(\overline{M}) < \varepsilon$, как то следует из принципа максимального значения, примененного к области T'. В силу произвольности ε заключаем, что $u \equiv 0$ в области T', а также и во всей области T, что и доказывает единственность решения внешней первой краевой задачи в пространстве.

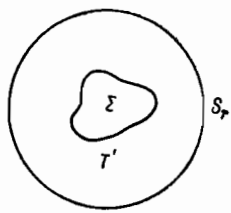


Рис. 47.

Первая внешняя задача на плоскости ставится следующим образом:

требуется найти функцию u, удовлетворяющую условиям:

1) $\Delta u = 0$ в рассматриваемой бесконечной области Σ, ограниченной контуром C;

2) функция u всюду непрерывна, включая C;

3) $u|_C = f(x, y)$, где f — функция, заданная на C;

4) $u(M)$ ограничена в бесконечности, т. е. существует такое число N, что $|u(M)| \leqslant N$.

Требование обращения решения в нуль на бесконечности и здесь оказывается достаточным, чтобы доказать, что двух разных решений быть не может, но оно является слишком сильным, так как при нем задача оказывается вообще неразрешимой.

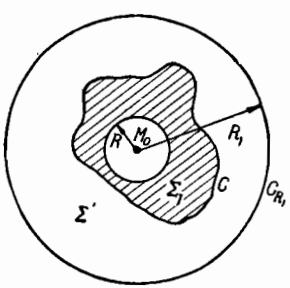


Рис. 48.

Докажем, что

внешняя первая краевая задача для функций двух переменных имеет единственное решение.

Допуская существование двух различных решений u_1 и u_2 и рассматривая их разность $u = u_1 - u_2$, являющуюся решением первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями, будем в силу условия 4) иметь

$$|u| \leqslant N = N_1 + N_2,$$

где N_1 и N_2 таковы, что $|u_1| \leqslant N_1$, $|u_2| \leqslant N_2$. Обозначим через Σ_1 область, являющуюся дополнением к области Σ. Возьмем точку M_0 внутри Σ_1 и окружность радиуса R с центром в точке M_0, лежащую внутри Σ_1 (рис 48). Гармоническая функция $\ln \frac{1}{r_{MM_0}}$ не имеет осо-

бенностей в области Σ; функция $\ln\frac{r_{MM_0}}{R}$ положительна во всей области Σ, включая C.

Пусть C_{R_1} — окружность радиуса R_1 с центром в M_0, содержащая целиком контур C, и Σ' — область, ограниченная кривыми C и C_{R_1}. Функция u_{R_1}, определяемая равенством

$$u_{R_1} = N\frac{\ln\frac{r}{R}}{\ln\frac{R_1}{R}}, \tag{23}$$

есть гармоническая функция, равная N на окружности радиуса R_1, положительная на C; из принципа максимального значения следует, что u_{R_1} является мажорантой для модуля функции $u(M)$ в области Σ:

$$|u(M)| < u_{R_1}(M).$$

Фиксируем точку M и будем неограниченно увеличивать R_1. Очевидно, что $u_{R_1}(M) \to 0$ при $R_1 \to \infty$. Отсюда следует, что

$$u(M) = 0.$$

Тем самым, в силу произвольности M, единственность решения поставленной задачи доказана. Единственность решения этой задачи можно также доказать, пользуясь преобразованием обратных радиусов-векторов, переводящим область, внешнюю к контуру C, в область, внутреннюю к контуру C', в который переходит контур C.

При этом бесконечно удаленная точка перейдет в изолированную особую точку, в окрестности которой функция v ограничена. Из теоремы п. 5 будет вытекать гармоничность функции v в начале координат, а тем самым и единственность решения.

Из приведенных рассуждений следует, что гармоническая функция двух переменных $u(M)$, ограниченная в бесконечности, стремится к определенному пределу при M, стремящемся к бесконечности.

Различие в постановке первой краевой внешней задачи для двух и трех переменных можно пояснить на следующем физическом примере. Пусть дан шар радиуса R, на поверхности которого поддерживается постоянная температура u_0, и требуется определить стационарное распределение температуры во внешнем пространстве. Функция $u = u_0\frac{R}{r}$ представляет решение этой задачи, обращающееся в нуль на бесконечности.

Рассмотрим теперь двумерную задачу, и пусть на границе окружности радиуса R задано постоянное граничное значение

$$u|_\Sigma = f_0 = \text{const}.$$

В этом случае $u \equiv f_0$ есть единственное ограниченное решение задачи и никакого решения, обращающегося в нуль на бесконечности, не

существует. Мы уже встречались с существенно различным характером поведения гармонических функций в бесконечности для двух и трех независимых переменных (например, поведение $\frac{1}{r}$ и $\ln\frac{1}{r}$ на бесконечности).

Для пространственной и плоской неограниченных областей имеет место принцип максимального значения. В этом нетрудно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы при доказательстве теорем единственности. Отсюда, в свою очередь, вытекает непрерывная зависимость решения от граничных условий.

8. Вторая краевая задача. Условие регулярности в бесконечности. Теорема единственности. Решением второй краевой задачи будем называть функцию u, непрерывную в области $T+\Sigma$ и удовлетворяющую на поверхности Σ условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(M).$$

Докажем, что решение второй внутренней краевой задачи определяется с точностью до произвольной постоянной.

Доказательство проведем при дополнительном предположении, что функция u имеет непрерывные первые производные в области $T+\Sigma$ [1]).

Пусть u_1 и u_2 — две непрерывно дифференцируемые в $T+\Sigma$ функции, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$ в T и условию $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(xyz)$ на Σ. Для функции $u = u_1 - u_2$ будем иметь:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0.$$

Полагая в первой формуле Грина (3) $v = u$ и учитывая соотношения $\Delta u = 0$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$, получаем:

$$\int\int\int_{T} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности функции u и ее первых производных следует:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0,$$

---

[1]) Предположение относительно непрерывности первых производных в $T+\Sigma$ сделано для упрощения доказательства. Доказательство единственности при наиболее общих предположениях было дано М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым (ДАН СССР, т. XVI, 1937); см. также Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, второе издание.

т. е.

$$u \equiv \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Изложенный здесь метод доказательства применим и в случае неограниченной области для функций, удовлетворяющих требованиям регулярности на бесконечности.

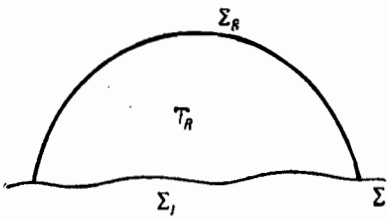


Рис. 49.

Покажем, что

в случае неограниченных областей формула Грина (3) применима для функций, регулярных на бесконечности.

Рассмотрим область T, простирающуюся в бесконечность. Пусть Σ — граница этой области. Проведем сферу радиуса R и обозначим через T_R часть нашей области, лежащую внутри этой сферы. Область T_R ограничена частью сферической поверхности Σ_R, принадлежащей области T, и поверхностью Σ_1, являющейся частью поверхности Σ (рис. 49). Применяя в области T_R формулу Грина к двум функциям, u и v, регулярным в бесконечности, получим:

$$\iiint\limits_{T_R} u\Delta v\, dr = -\iiint\limits_{T_R}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]d\tau + \\ + \iint\limits_{\Sigma_1} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (23')$$

Оценим интеграл по Σ_R, используя при этом свойство регулярности функций u и v:

$$\left|\iint\limits_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma\right| = \left|\iint\limits_{\Sigma_R} u\,(v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\,d\sigma\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\iint\limits_{\Sigma_R}\frac{A}{R}\cdot\frac{3A}{R^2}\,d\sigma\right| \leqslant \frac{3A^2}{R^3}\,4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma = 0.$$

Стоящий справа интеграл по T_R стремится к интегралу по всей области T при $R\to\infty$. Этот интеграл существует, так как подинтегральное выражение в силу регулярности u и v исчезает на бесконечности как $\frac{1}{R^4}$. Если существует предел интеграла по Σ_1, равный

интегралу по Σ, то существует предел правой части в формуле (23′); следовательно, существует предел

$$\lim_{R\to\infty}\iiint_{T_R} u\,\Delta v\,d\tau = \iiint_{T} u\,\Delta v\,d\tau.$$

В результате мы приходим к формуле

$$\iiint_{T} u\,\Delta v\,d\tau =$$

$$= -\iiint_{T}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]d\tau+\iint_{\Sigma} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (24)$$

Тем самым установлена применимость первой, а следовательно, и второй формулы Грина для неограниченных областей к функциям, регулярным на бесконечности.

Покажем теперь, что

вторая краевая задача для неограниченной области имеет единственное решение, регулярное на бесконечности.

Полагая в формуле (24) $v = u = u_1 - u_2$ и учитывая, что $\Delta u = 0$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$, получим:

$$\iiint_{T}(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\,d\tau = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности производных функции u следует, что

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0 \text{ и } u \equiv \text{const}.$$

Так как $u = 0$ на бесконечности, то

$$u \equiv 0,$$

т. е.

$$u_1 \equiv u_2,$$

что и требовалось доказать.

Естественно возникает вопрос: можно ли доказать этим же методом единственность первой краевой задачи?

Пусть u_1 и u_2 — различные решения первой краевой задачи (внутренней). Применим формулу (3) к функциям $u = u_1 - u_2$ и $v = u$ в области T, ограниченной поверхностью Σ:

$$\iiint_{T} u\,\Delta u\,d\tau = -\iiint_{T}(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\,d\tau+\iint_{\Sigma} u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma.$$

Отсюда, принимая во внимание условия

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\Sigma} = 0,$$

получаем

$$\int\int\int_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, d\tau = 0$$

и, следовательно,

$$u_x = u_y = u_z = 0 \text{ и } u = \text{const}.$$

На поверхности Σ функция u равна нулю, поэтому мы можем утверждать, что

$$u \equiv 0 \text{ и } u_1 \equiv u_2.$$

Однако это доказательство некорректно, поскольку в процессе доказательства мы предполагали существование производных искомой функции на поверхности Σ, что самой постановкой задачи не предусматривается. Доказательство единственности, основанное на принципе максимального значения, свободно от этого недостатка.

§ 3. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных

Решение краевых задач для ряда простейших областей может быть дано методом разделения переменных. Для решения встречающихся при этом вспомогательных уравнений часто требуются специальные классы функций. В этом параграфе мы ограничимся задачами, разрешаемыми при помощи тригонометрических функций. При изучении специальных функций мы рассмотрим также решение других задач.

1. Первая краевая задача для круга. Решим первую краевую задачу для круга:

найти функцию u, удовлетворяющую уравнению:

$$\Delta u = 0 \text{ внутри круга} \tag{1}$$

и граничному условию

$$u = f \text{ на границе круга,} \tag{2}$$

где f — заданная функция.

Мы предположим сначала, что функция f непрерывна и дифференцируема; в дальнейшем мы освободимся от условия дифференцируемости и даже непрерывности функции f (ср. п. 4 § 2). Наряду с внутренней краевой задачей мы будем рассматривать также внешнюю краевую задачу.

Введем полярную систему координат (ρ, φ) с началом в центре круга. Уравнение (1) в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{3}$$

(см. формулу (34) § 1). Будем решать задачу методом разделения переменных, т. е. будем искать частное решение уравнения (1) вида

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi).$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (3), получим

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

где $\lambda = \text{const}$. Отсюда получаем два уравнения:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{4}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0. \tag{5}$$

Первое из этих уравнений дает:

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Заметим, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho, \varphi)$ должна вернуться к исходному значению

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

т. е. $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π. Это возможно только, если $\sqrt{\lambda} = n$, где n — целое число, и

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi.$$

Функцию $R(\rho)$ будем искать в виде

$$R(\rho) = \rho^{\mu}.$$

Подставляя в уравнение (5) и сокращая на ρ^{μ}, найдем:

$$n^2 = \mu^2 \text{ или } \mu = \pm n \ (n > 0).$$

Следовательно,

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

где C и D — постоянные.

Для решения внутренней задачи надо положить $R = C\rho^n$ ($\mu = +n$), так как, если $D \neq 0$, то функция $u = R(\rho)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $\rho = 0$ и не является гармонической функцией внутри круга. Для решения внешней задачи, наоборот, надо брать $R = D\rho^{-n}$ ($\mu = -n$), так как решение внешней задачи должно быть ограничено в бесконечности.

Итак, частные решения нашей задачи найдены [1]):

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для } \rho \leqslant a,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для } \rho \geqslant a.$$

Суммы этих решений

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для внутренней задачи,}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для внешней задачи}$$

при достаточно хорошей сходимости также будут гармоническими функциями.

Для определения коэффициентов A_n и B_n используем граничное условие

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f. \tag{6}$$

Считая, что f задана как функция угла φ, возьмем ее разложение в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{7}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\, d\psi, \qquad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi\, d\psi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi\, d\psi.$$

---

[1]) Выражение оператора Лапласа в полярной системе координат (3) при $\rho = 0$ теряет смысл. Докажем, что $\Delta u_n = 0$ также при $\rho = 0$. Для доказательства этого мы уже не можем пользоваться полярной системой координат.

Перейдем к декартовой системе координат; частные решения

$$\rho^n \cos n\varphi \text{ и } \rho^n \sin n\varphi,$$

будучи действительной и мнимой частями функции

$$\rho^n e^{in\varphi} = (\rho e^{i\varphi})^n = (x + iy)^n,$$

являются многочисленными по x и y. Очевидно, что многочлен, удовлетворяющий уравнению $\Delta u = 0$ при $\rho > 0$ в силу непрерывности вторых производных удовлетворяет также этому уравнению при $\rho = 0$.

Сравнивая ряды (6) и (7), получаем:

$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}$, $A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}$, $B_n = \frac{\beta_n}{a^n}$ для внутренней задачи,

$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}$, $A_n = \alpha_n a^n$, $B_n = a^n \beta^n$ для внешней задачи.

Таким образом, мы получили формальное решение первой внутренней задачи для круга в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \tag{8}$$

а решение внешней задачи в виде

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \tag{9}$$

Чтобы убедиться в том, что полученные функции действительно являются искомыми решениями, требуется убедиться в применимости принципа суперпозиции, для чего надо доказать сходимость рядов, возможность их почленного дифференцирования, а также доказать непрерывность этих функций на границе круга. Оба ряда можно представить одной формулой

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n (\alpha_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

где

$$t = \begin{cases} \frac{\rho}{a} \leqslant 1 & \text{при } \rho \leqslant a \text{ (внутренняя задача),} \\ \frac{a}{\rho} \leqslant 1 & \text{при } \rho \geqslant a \text{ (внешняя задача),} \end{cases}$$

α_n, β_n — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$.

Докажем, что ряды (8), (9) можно дифференцировать при $t < 1$ любое число раз. Пусть

$$u_n = t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Вычислим k-ю производную функции u_n по φ

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n n^k \left[\alpha_n \cos\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) + \beta_n \sin\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Отсюда получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k}\right| \leqslant t^n n^k 2M,$$

где через M обозначен максимум модуля коэффициентов Фурье α_n и β_n

$$\left.\begin{aligned} |\alpha_n| < M, \\ |\beta_n| < M. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Фиксируем некоторые значения $\rho_0 < a$ (для внутренней задачи) или $\rho_1 = \frac{a^2}{\rho_0} > a$ (для внешней задачи), при этом $t_0 = \frac{\rho_0}{a} < 1$. Рассматривая ряд

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|)\right| \leqslant 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k \quad (t \leqslant t_0),$$

видим, что он сходится равномерно при $t \leqslant t_0 < 1$ при любом k. Поэтому ряды (8) и (9) можно дифференцировать по φ в любой точке внутри (вне) круга любое число раз. Аналогично доказывается, что по переменной ρ также можно дифференцировать ряды (8) и (9) внутри (вне) круга радиуса $\rho_0 < a$ сколько угодно раз.

В силу произвольности ρ_0 заключаем, что ряды (8) и (9) почленно дифференцируемы во всякой внутренней (внешней) точке круга. Из возможности почленного дифференцирования следует применимость принципа суперпозиции. Таким образом доказано, что функции (8) и (9) удовлетворяют уравнению $\Delta u = 0$ [1]).

При этом доказательстве мы пользовались только тем свойством функции $f(\varphi)$, что ее коэффициенты Фурье ограничены (формула (10)). Это имеет место для любой ограниченной функции (и даже для любой абсолютно интегрируемой функции). Таким образом, ряды (8) и (9), соответствующие любой ограниченной функции, определяют функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u = 0 \quad \text{для} \quad t < 1.$$

Этим замечанием мы воспользуемся позже при обобщении результатов, полученных в настоящем пункте.

Обратимся теперь к доказательству непрерывности функции в замкнутой области ($t \leqslant 1$). Очевидно, что без более детальных сведений относительно свойств функции $f(\varphi)$ этого сделать нельзя.

Из предположенной непрерывности и дифференцируемости функции $f(\varphi)$ следует ее разложимость в ряд Фурье, а также сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \tag{11}$$

---

[1]) Это уравнение удовлетворяется также при $\rho = 0$; в самом деле, выражая производные по декартовым координатам через производные по полярным координатам, нетрудно убедиться, что функции (8) и (9) при $t \leqslant t_0$ можно дифференцировать по x и y любое число раз. В силу примечания на стр. 312 отсюда следует, что

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 0.$$

С другой стороны, имеем:

$$|t^n\alpha_n \cos n\varphi| \leqslant |\alpha_n|,$$
$$|t^n\beta_n \sin n\varphi| \leqslant |\beta_n|.$$

Поэтому ряды (8) и (9) сходятся равномерно при $t \leqslant 1$ и, следовательно, представляемые ими функции непрерывны на границе круга. Из формулы (11) видно, что функция (9), полученная для внешней задачи, ограничена на бесконечности.

Таким образом установлено, что ряды (8) и (9) удовлетворяют всем условиям поставленных задач.

2. Интеграл Пуассона. Преобразуем теперь формулы (8) и (9) к более простому виду. Для определенности рассмотрим внутреннюю задачу, а для внешней напишем результат по аналогии.

Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в формулу (8) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi)\right\} d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \psi)\right\} d\psi. \qquad (12)$$

Произведем следующие тождественные преобразования:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t^n [e^{in(\varphi-\psi)} + e^{-in(\varphi-\psi)}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(te^{i(\varphi-\psi)})^n + (te^{-i(\varphi-\psi)})^n]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1 - te^{i(\varphi-\psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1 - te^{-i(\varphi-\psi)}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos(\varphi - \psi) + t^2} \qquad \left(t = \frac{\rho}{a} < 1\right).$$

Подставляя полученные результаты в равенство (12), получаем:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}{\frac{\rho^2}{a^2} - 2\frac{\rho}{a}\cos(\varphi - \psi) + 1} d\psi$$

или

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi. \qquad (13)$$

Полученная формула, дающая решение первой краевой задачи внутри круга, называется *интегралом Пуассона*, а подинтегральное выражение

$$K(\rho, \varphi, a, \psi) = \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2}$$

— *ядром Пуассона*. Отметим, что $K(\rho, \varphi, a, \psi) > 0$ при $\rho < a$, так как $2a\rho < a^2 + \rho^2$, если $\rho \neq a$.

Интеграл Пуассона выведен в предположении $\rho < a$; при $\rho = a$ представление (8) теряет смысл. Однако

$$\lim_{\substack{\rho \to a \\ \varphi \to \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = f(\varphi_0),$$

так как ряд, из которого получен интеграл Пуассона, является непрерывной функцией в замкнутой области.

Функция, определенная формулой

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi & \text{при} \quad \rho < a, \\ f(\varphi) & \text{при} \quad \rho = a, \end{cases} \tag{13'}$$

удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ при $\rho < a$, непрерывна в замкнутой области, включая окружность $\rho = a$.

Решение внешней краевой задачи, очевидно, имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi & \text{при} \quad \rho > a, \\ f(\varphi) & \text{при} \quad \rho = a. \end{cases} \tag{14}$$

В самом начале мы предположили, что функция $f(\varphi)$ непрерывна и дифференцируема, и, пользуясь этим, доказали, что решение задачи можно представить в виде бесконечного ряда. В дальнейшем с помощью тождественных преобразований мы перешли от ряда к интегралу Пуассона.

Докажем теперь, что интеграл Пуассона дает решение первой краевой задачи и в том случае, когда функция $f(\varphi)$ только непрерывна.

Интеграл Пуассона представляет решение уравнения Лапласа при $\rho < a$ $(t < 1)$ для произвольной ограниченной функции. В самом деле, при $\rho < a$ $(t < 1)$ интеграл Пуассона тождествен ряду (8) и в силу замечания, сделанного на стр. 314, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ при произвольной ограниченной функции $f(\varphi)$.

Таким образом, нам остается доказать, что функция u в нашем случае непрерывно примыкает к граничным значениям. Выберем какую-

либо последовательность непрерывных дифференцируемых функций

$$f_1(\varphi),\ f_2(\varphi),\ \ldots,\ f_k(\varphi),\ \ldots,$$

равномерно сходящуюся к функции $f(\varphi)$ [1]):

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\varphi) = f(\varphi).$$

Последовательности граничных функций будет соответствовать последовательность гармонических функций $u_k(\rho, \varphi)$, определяемых по формуле (13) или (8). Равномерная сходимость последовательности $\{f_k(\varphi)\}$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $k_0(\varepsilon) > 0$, что

$$|f_k(\varphi) - f_{k+l}(\varphi)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k > k_0(\varepsilon),\quad l > 0.$$

Для функций $u_k(r, \varphi)$, представляющих решения первой краевой задачи, в силу принципа максимального значения, будем иметь:

$$|u_k(\rho, \varphi) - u_{k+l}(\rho, \varphi)| < \varepsilon$$
$$\text{при } \rho \leqslant \rho_0, \text{ если } k > k_0(\varepsilon),\quad \varepsilon > 0.$$

Таким образом, последовательность $\{u_k\}$ сходится равномерно к некоторой функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$. Предельная функция $u(\rho, \varphi)$ непрерывна в замкнутой области, поскольку все функции u_k, представляемые интегралами

$$u_k(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} f_k(\psi)\, d\psi,$$

непрерывны в замкнутой области. Очевидно, что

$$u(\rho, \varphi) = \lim_{k\to\infty} u_k(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\ (\varphi - \psi) + \rho^2} f(\psi)\, d\psi & \text{при } \rho < a \\ f(\varphi) & \text{при } \rho = a \end{cases}$$

так как последовательность $\{f_k\}$ сходится равномерно к f и поэтому предельный переход под знаком интеграла законен.

Таким образом функция

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} f(\psi)\, d\psi$$

при произвольной непрерывной функции $f(\varphi)$ является решением уравнения Лапласа, непрерывно примыкающим на границе круга к заданным значениям.

---

[1]) Мы не будем останавливаться на том, как это осуществить. Такую последовательность можно выбрать многими способами.

3. Случай разрывных граничных значений. Докажем, что формулы (13′) и (14) дают решение краевой задачи для произвольной кусочно-непрерывной функции $f(\varphi)$, т. е., что это решение ограничено во всей области и непрерывно примыкает к граничным значениям в точках непрерывности функции $f(\varphi)$, являясь, таким образом, единственным решением, обладающим этим свойством (ср. § 2, п. 4). Пусть φ_0 — какая-либо точка непрерывности функции $f(\varphi)$. Надо доказать, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое δ, что

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon,$$

если

$$|\rho - a| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon).$$

В силу непрерывности функции $f(\varphi)$ существует такое $\delta_0(\varepsilon)$, что

$$|f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{если} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon).$$

Рассмотрим вспомогательные непрерывные и дифференцируемые функции $\overline{f(\varphi)}$ и $\underline{f(\varphi)}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\overline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} && \text{для} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon), \\ &\overline{f(\varphi)} \geqslant f(\varphi) && \text{для} \quad |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\underline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} && \text{для} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon), \\ &\underline{f(\varphi)} \leqslant f(\varphi) && \text{для} \quad |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

а в остальном произвольные. Если при помощи формулы (13) мы определим для $\overline{f}$ и $\underline{f}$ функции $\overline{u}(\rho, \varphi)$ и $\underline{u}(\rho, \varphi)$, то это будут гармонические функции, непрерывно примыкающие к $\overline{f}(\varphi)$ и $\underline{f}(\varphi)$.

В силу положительности ядра Пуассона имеем, что

$$\underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \overline{u}(\rho, \varphi),$$

так как

$$\underline{f}(\varphi) \leqslant f(\varphi) \leqslant \overline{f}(\varphi).$$

Из непрерывности функций $\overline{u}(\rho, \varphi)$ и $\underline{u}(\rho, \varphi)$ на границе при $\varphi = \varphi_0$ следует существование такого $\delta_1(\varepsilon)$, что

$$|\overline{u}(\rho, \varphi) - \overline{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для

$$|\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon)$$

и

$$|\underline{u}(\rho, \varphi) - \underline{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для

$$|\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon).$$

Из этих неравенств находим:

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}(\rho, \varphi) &\leqslant \overline{f}(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\varphi_0) + \varepsilon, \\ f(\varphi_0) - \varepsilon &= \underline{f}(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad \begin{aligned} |\rho - a| &< \delta(\varepsilon), \\ |\varphi - \varphi_0| &< \delta(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$.

Сопоставляя полученные неравенства, находим, что

$$f(\varphi_0) - \varepsilon \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \overline{u}(\rho, \varphi) \leqslant f(\varphi_0) + \varepsilon$$

или

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad \begin{aligned} |a - \rho| &< \delta(\varepsilon), \\ |\varphi - \varphi_0| &< \delta(\varepsilon), \end{aligned}$$

что и доказывает непрерывность $u(\rho, \varphi)$ в точке (a, φ_0).

Ограниченность $u(\rho, \varphi)$ следует из того, что в силу положительности ядра Пуассона

$$u(\rho, \varphi) < M \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi)} d\psi = M,$$

если $f(\varphi) < M$. Значение же интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2)\, d\psi}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} \equiv 1,$$

так как в силу ранее доказанного левая часть представляет гармоническую функцию, непрерывно примыкающую к граничным значениям $f \equiv 1$, а такая функция тождественно равна 1. Аналогично $u(\rho, \varphi) > M_1$, если $f > M_1$, что и доказывает ограниченность модуля функции $u(\rho, \varphi)$.

§ 4. Функция источника

Метод функции источника дает удобный аппарат для аналитического представления краевых задач.

В настоящем параграфе будут даны определение и основные свойства функции источника для уравнения Лапласа, а также будут построены функции источника для ряда простейших областей (круг, сфера, полупространство). Это построение проводится методом электростатических изображений.

1. Функция источника для уравнения $\Delta u = 0$ и ее основные свойства. Для всякой функции u, непрерывной вместе с первыми производными в замкнутой области T, ограниченной достаточно гладкой поверхностью Σ, и имеющей вторые производные внутри T,

как было показано в § 2, п. 1, имеет место интегральное представление

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma}\left[\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right]d\sigma_P - \\ - \frac{1}{4\pi}\int\int\int_{T}\frac{\Delta u}{r_{MM_0}}d\tau_M. \qquad (1)$$

Если функция $u(M)$ гармоническая, то объемный интеграл равен нулю; если же $u(M)$ удовлетворяет уравнению Пуассона, то объемный интеграл является известной функцией.

Пусть $v(M)$ — некоторая гармоническая функция, не имеющая нигде особенностей. Вторая формула Грина

$$\int\int\int_{T}(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \int\int_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$$

дает:

$$0 = \int\int_{\Sigma}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma - \int\int\int_{T} v\,\Delta u\,d\tau. \qquad (2)$$

Складывая (2) и (1), получаем:

$$u(M_0) = \int\int_{\Sigma}\left[G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right]d\sigma - \int\int\int_{T}\Delta u\cdot G\,d\tau, \qquad (3)$$

где

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v \qquad (3')$$

— функция двух точек: $M_0(x, y, z)$ и $M(\xi, \eta, \zeta)$. Точка M_0 фиксирована, и поэтому x, y, z играют роль параметров.

Внутри области T функция G удовлетворяет уравнению

$$\Delta G = 0$$

всюду, кроме точки $M = M_0$, где она имеет особенность вида $\frac{1}{4\pi r}$. Выберем функцию v так, чтобы

$$G|_{\Sigma} = 0,$$

т. е.

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Функцию G, определенную таким образом, будем называть *функцией точечного источника первой краевой задачи для уравнения* $\Delta u = 0$. Функция источника позволяет дать явное представление для решения

первой краевой задачи для уравнения $\Delta u = 0$. В самом деле, формула (3) дает:

$$u(M_0) = -\int_\Sigma\int u\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma = -\int_\Sigma\int f\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma \quad (f = u|_\Sigma). \tag{4}$$

Следует иметь в виду, что формула (4) получена с помощью формулы Грина, предполагающей выполнение определенных условий в отношении функций u и G и поверхности Σ. В формулу (4) входит выражение $\frac{\partial G}{\partial n}$, существование которого на поверхности Σ не следует непосредственно из определения функции G.

При получении формулы (4) мы исходим из того, что существует гармоническая функция u, принимающая на поверхности Σ значение f. Тем самым даже для тех областей, для которых существует функция источника, удовлетворяющая условиям применимости формулы Грина, формула (4) дает явное представление лишь тех решений u первой краевой задачи, которые удовлетворяют условиям применимости формулы Грина (доказывая единственность этого класса решений первой краевой задачи).

Подробное исследование формулы (4), проведенное А. М. Ляпуновым, показало, что для широкого класса поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова (см. § 5), она представляет решение первой краевой задачи при весьма общих условиях.

Остановимся еще раз на определении функции G. Функция G определяется при помощи функции v, являющейся решением первой краевой задачи для уравнения $\Delta v = 0$ с граничными значениями $v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi r}$. Может создаться впечатление, что имеет место порочный круг. Для нахождения функции u — решения первой краевой задачи — надо найти функцию v — решение той же задачи. На самом деле порочного круга нет, так как знание функции источника позволяет решить первую краевую задачу с произвольными граничными значениями ($u|_\Sigma = f$), в то время как для нахождения самой функции G достаточно решить краевую задачу со специальными граничными значениями $\left(v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi r}\right)$, что, как мы увидим на ряде примеров, значительно проще.

При электростатической интерпретации функция источника

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + v$$

представляет потенциал в точке M точечного заряда [1]), помещенного в точку M_0 внутри заземленной проводящей поверхности Σ. Первое

[1]) Напомним, что потенциал точечного заряда величины e в среде с диэлектрической постоянной ε определяется формулой $v = \frac{e}{\varepsilon r}$, если пользо-

слагаемое $\frac{1}{4\pi r}$ есть, очевидно, потенциал точечного заряда в свободном пространстве, а второе слагаемое v обозначает потенциал поля зарядов, индуцированных на проводящей поверхности Σ. Таким образом, построение функции источника сводится к определению индуцированного поля.

Остановимся на некоторых свойствах функции источника. При этом мы будем предполагать, что рассматриваемые области таковы, что для них существуют функции источника, обладающие нормальными производными на поверхности Σ и удовлетворяющие условиям применимости формулы Грина.

1. Функция источника всюду положительна внутри T. В самом деле, функция G обращается в нуль на границе области Σ и положительна на поверхности достаточно малой сферы, описанной вокруг полюса. Отсюда следует, в силу принципа максимального значения, ее положительность во всей области. Заметим также, что $\left.\frac{dG}{dn}\right|_{\Sigma} \leqslant 0$, что непосредственно следует из доказанной положительности и условия $G|_{\Sigma} = 0$.

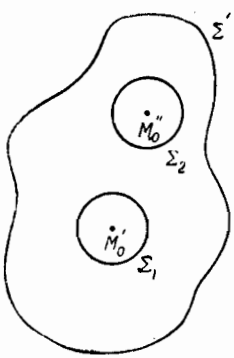


Рис. 50.

2. Функция источника симметрична относительно своих аргументов $M_0(x, y, z)$ и $M(\xi, \eta, \zeta)$:

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Пусть M_0' и M_0'' — некоторые фиксированные точки области T. Проведем сферы Σ_1 и Σ_2 радиуса ε с центрами в точках M_0' и M_0'' (рис. 50). Полагая

$$u = G(M, M_0'), \quad v = G(M, M_0'')$$

ваться системой единиц CGSE. При этом функция источника соответствует заряду величины $\frac{\varepsilon}{4\pi}$ абс. эл.-ст. единиц.

Если же пользоваться рациональной системой единиц, в которой закон Кулона имеет вид $f = \frac{ee'}{4\pi\varepsilon r}$, то в этой системе единиц в пустоте ($\varepsilon = 1$) функция $G(M, M_0)$ соответствует единичному заряду.

При термической интерпретации стационарная температура точечного источника тепла интенсивности q определяется формулой

$$\frac{q}{4\pi k r},$$

где k — коэффициент теплопроводности. Таким образом, функция $G(MM_0)$ является температурой в точке M, если температура поверхности тела равна нулю, а в точке M_0 помещен тепловой источник интенсивности $q = k$.

Если размерность длины выбрана так, что $k = 1$, то функция G соответствует источнику интенсивности, равной единице.

и применяя формулу Грина

$$\int\int\int_{T_\varepsilon} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \int\int_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \qquad (5)$$

к области T_ε, получаемой выбрасыванием из основной области сфер Σ_1 и Σ_2, будем иметь:

$$\int\int_{\Sigma_1} \left[G(M, M_0')\frac{\partial G(M, M_0'')}{\partial n} - G(M, M_0'')\frac{\partial G(M, M_0')}{\partial n}\right] d\sigma_M +$$

$$+ \int\int_{\Sigma_2} \left[G(M, M_0')\frac{\partial G(M, M_0'')}{\partial n} - G(M, M_0'')\frac{\partial G(M, M_0')}{\partial n}\right] d\sigma_M = 0,$$

так как левая часть уравнения (5) равна нулю, поскольку $\Delta G = 0$, а интеграл по поверхности Σ равен нулю в силу граничных условий.

Переходя затем к пределу при $\varepsilon \to 0$ и используя особенность функции источника, получим [1]):

$$G(M_0', M_0'') = G(M_0'', M_0')$$

или

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Доказанная симметрия функции источника является математическим выражением *принципа взаимности* в физике: источник, помещенный в точку M_0, производит в точке M такое же действие, какое производит в точке M_0 источник, помещенный в точку M. Принцип взаимности носит весьма общий характер и относится к различным физическим полям (электромагнитным, упругим и т. д.).

Функция источника $G(M, M_0)$ для случая двух измерений, очевидно, будет определяться условиями:

1. $\Delta G = 0$ всюду в рассматриваемой области S, кроме точки $M = M_0$.

2. В точке $M = M_0$ функция G имеет особенность вида

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}.$$

3. $G|_C = 0$, где C — граница области S. Функция источника в этом случае имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

[1]) Ляпуновым установлена эта теорема в применении к классу поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова.

где v — всюду непрерывная гармоническая функция, удовлетворяющая на границе условию

$$v|_C = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}.$$

Решение первой краевой задачи для $\Delta u = 0$ при этом дается формулой

$$u(M_0) = -\int_C f\frac{\partial G}{\partial n}\,ds \quad (f = u|_C).$$

2. Метод электростатических изображений и функция источника для сферы. Наиболее распространенным методом построения функции источника является *метод электростатических изображений*. Идея его состоит в том, что при построении функции источника

$$G(M,\ M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v$$

индуцированное поле v представляется как поле зарядов, расположенных вне поверхности Σ и выбираемых таким образом, чтобы выполнялось условие

$$v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Эти заряды называются *электростатическими изображениями* единичного заряда, помещенного в точку M_0 и создающего в отсутствии поверхности Σ потенциал $\frac{1}{4\pi r}$. Во многих случаях выбор таких зарядов не представляет труда. Ниже мы приведем примеры построения функции источника методом электростатических изображений.

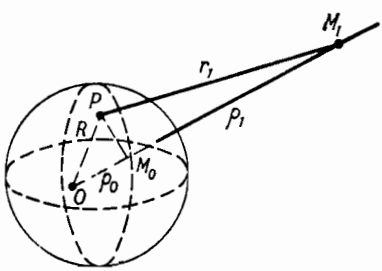


Рис. 51.

Из представления функций источника, полученных во всех этих примерах, непосредственно видна непрерывность первых производных функций G на поверхности Σ.

В качестве первого примера рассмотрим функцию источника для сферы.

Пусть дана сфера радиуса R с центром в точке O и требуется найти для нее функцию источника.

Поместим в точку M_0 единичный заряд и отложим на радиусе, проходящем через точку M_0, такой отрезок OM_1, что

$$\rho_0\rho_1 = R^2, \tag{6}$$

где $\rho_0 = OM_0$ и $\rho_1 = OM_1$ (рис. 51).

Преобразование (6), ставящее в соответствие точке M_0 определенную точку M_1 является преобразованием обратных радиусов, а сама точка M_1 называется *сопряженной* с точкой M_0. Это преобразование является взаимным, и точку M_0 можно рассматривать как сопряженную с точкой M_1.

Докажем, что для всех точек P, расположенных на сфере, расстояния до M_0 и M_1 пропорциональны. Для этого рассмотрим треугольники OPM_0 и OPM_1 (см. рис. 51); они подобны, так как угол при O общий, а прилежащие к нему стороны пропорциональны:

$$\frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1} \quad \text{или} \quad \frac{OM_0}{R} = \frac{R}{OM_1}.$$

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}, \tag{7}$$

где $r_0 = |\overrightarrow{M_0P}|$, $r_1 = |\overrightarrow{M_1P}|$. Из пропорции (7) получаем:

$$r_0 = \frac{\rho_0}{R} r_1$$

для всех точек сферы. Поэтому гармоническая функция $v = -\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$ на сфере принимает то же значение, что и функция $\frac{1}{r_0}$. Она представляет, очевидно, потенциал заряда величины $-\frac{R}{\rho_0}$, помещенного в точку M_1.

Таким образом, функция

$$G(P, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right) \tag{8}$$

и является искомой функцией источника для сферы, так как это — гармоническая функция, имеющая в M_0 особенность $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_0}$ и обращающаяся в нуль на сфере.

Решение первой краевой задачи дается формулой (4).

Вычислим производную

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) - \frac{R}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right], \tag{9}$$

где n — внешняя нормаль, $r_1 = \overrightarrow{M_1M}$ (M, вообще говоря, не лежит на сфере).

Производные от $\frac{1}{r_0}$ и $\frac{1}{r_1}$ по направлению n равны

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) &= \frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}\right)\frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2}\cos(\widehat{r_0, n}), \\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2}\cos(\widehat{r_1, n}), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

так как

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \cos(\widehat{r_0, n}), \qquad \frac{\partial r_1}{\partial n} = \cos(\widehat{r_1, n}). \tag{11}$$

Нетрудно найти величины $\cos(\widehat{r_0, n})$ и $\cos(\widehat{r_1, n})$:

$$\cos(\widehat{r_0, n}) = \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0}, \tag{11'}$$

$$\cos(\widehat{r_1, n}) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1}. \tag{11''}$$

Используя пропорцию (7), будем иметь:

$$\cos(\widehat{r_1, n})\big|_\Sigma = \frac{R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} r_0^2 - \frac{R^4}{\rho_0^2}}{2R\frac{R}{\rho_0} r} = \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0},$$

так как $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$, по определению точки M_1, и $r_1 = \frac{R}{\rho_0} r_0$ на сфере Σ. Пользуясь формулами (10), а также выражениями (9), (11'), (11''), найдем:

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{r_0^2}\frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0} + \frac{\rho_0^2}{R^2 r_0^2}\frac{R}{\rho_0}\frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}.$$

Таким образом, функция $u(M_0)$ в соответствии с формулой (4) равна

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\int_\Sigma\int f(P)\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3}\, d\sigma_P. \tag{12}$$

Введем сферическую систему координат с началом в центре сферы. Пусть (R, θ, φ) — координаты точки P, а $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ — координаты точки M_0; γ — угол между радиусами-векторами $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM_0}$. Тогда формулу (12) можно переписать в виде

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 - 2R\rho_0\cos\gamma + \rho_0^2)^{3/2}}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{12'}$$

где

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)\ ^{1}). \qquad (13)$$

Эта формула называется *интегралом Пуассона для сферы.*

Тем же методом может быть построена функция источника для области, внешней к сфере,

$$G(M,\ M_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{\rho_1}\frac{1}{r_0}\right), \qquad (14)$$

где $r_1 = MM_1$ — расстояние от фиксированной точки M_1, лежащей вне сферы, $r_0 = MM_0$ — расстояние от точки M_0, сопряженной с точкой M_1, ρ_1 — расстояние M_1 от начала координат, а R — радиус сферы.

Учитывая различие направлений нормалей для внутренней и внешней задач, получим:

$$u(\rho_1,\ \theta_1,\ \varphi_1) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho_1^2 - R^2}{[R^2 - 2\rho_1 R\cos\gamma + \rho_1^2]^{3/2}} f(\theta,\ \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

где $\cos\gamma$ дается формулой (13) (индекс 0 надо заменить на 1).

3. Функция источника для круга. Функция источника для круга может быть получена таким же способом, как и функция для сферы. В этом случае функцию следует искать в виде

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + v. \qquad (15)$$

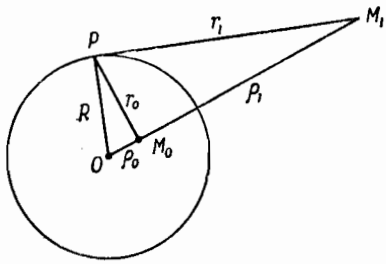


Рис. 52.

Повторяя рассуждение предыдущего пункта от формулы (6) до формулы (8), мы найдем функцию G в виде

$$G(P,\ M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_0} - \ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right], \qquad (16)$$

где $\rho_0 = OM_0$, $r_0 = M_0P$, $r_1 = M_1P$, $R = OP$ — радиус круга (рис. 52). Нетрудно убедиться в том, что определенная таким образом гармоническая функция обращается в нуль на границе

$$G|_\sigma = 0.$$

---

[1]) В самом деле, направляющие косинусы векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM_0}$ равны, соответственно $(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$ и $(\sin\theta_0\cos\varphi_0\ \sin\theta_0\ \sin\varphi_0,\ \cos\theta_0)$, откуда

$$\cos\gamma = \cos\theta\cdot\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0(\cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0) = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0).$$

Для решения первой краевой задачи надо вычислить значения $\frac{\partial G}{\partial n}$ на окружности C. Вычисления проходят аналогично случаю сферы и дают:

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\sigma} = -\frac{1}{2\pi R}\,\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^2}.$$

Пусть (ρ, θ) — полярные координаты точки P, лежащей на окружности, а (ρ_0, θ_0) — координаты точки M_0, тогда

$$r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0).$$

Подставляя в формулу

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} u(P)\,\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^2}\,\frac{ds}{R}$$

это выражение для r_0 и принимая во внимание, что

$$u(P)\big|_{\sigma} = f(\theta) \text{ и } ds = R\,d\theta,$$

приходим для функции $u(M_0)$ к выражению

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}\,f(\theta)\,d\theta, \qquad (17)$$

называемому *интегралом Пуассона для круга* (см. стр. 315, формула (13)). Эта же формула с точностью до знака дает решение внешней задачи.

4. Функция источника для полупространства. Понятие функции источника и формула (4) имеют место и для неограничен-

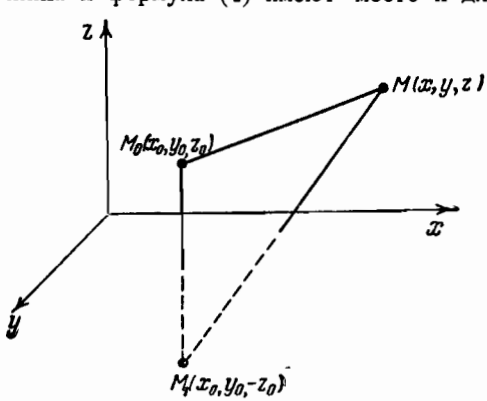


Рис. 53.

ного пространства, если рассматривать функции, регулярные на бесконечности (см. § 2, п. 6). Найдем функцию источника для полу-

пространства $z > 0$. Поместим в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ единичный заряд, который создает в неограниченном пространстве поле, потенциал которого определяется функцией

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{M_0M}}, \text{ где } r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Нетрудно видеть, что «индуцированное поле» v является полем отрицательного единичного заряда, помещенного в точку $M_1(x_0, y_0, -z_0)$, являющуюся зеркальным изображением точки M_0 в плоскости $z = 0$ (рис. 53). Функция G, равная

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_0} - \frac{1}{4\pi r_1},$$

где

$$r_0 = \overrightarrow{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$
$$r_1 = \overrightarrow{M_1M} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2},$$

обращается в нуль при $z = 0$ и имеет нужную особенность в точке M_0.

Вычислим $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$. Очевидно, что

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{z-z_0}{r_0^3} + \frac{z+z_0}{r_1^3}\right].$$

Полагая $z = 0$, находим:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{z_0}{2\pi r_0^3}.$$

Решение первой краевой задачи дается формулой

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_0}\int \frac{z_0}{r_{M_0P}^3} f(P)\, d\sigma_P,$$

где Σ_0 — плоскость $z = 0$, $f(P) = u|_{z=0}$, или

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}} f(x\ y)\, dx\, dy. \quad (18)$$

§ 5. Теория потенциала

Функция

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

представляющая потенциал поля единичной массы (заряда), помещенной в точке $M_0(\xi, \eta, \zeta)$, является решением уравнения Лапласа,

зависящим от параметров ξ, η, ζ. Интегралы от этой функции по параметрам называются *потенциалами* и имеют существенное значение с точки зрения непосредственных приложений в физике, а также и с точки зрения развития методов решения краевых задач.

1. Объемный потенциал. Пусть в некоторой точке $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ помещена масса m_0. По закону всемирного тяготения на массу m, помещенную в точке $M(x, y, z)$, действует сила притяжения

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{mm_0}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{M_0M}$, а γ — гравитационная постоянная. Выбирая систему единиц так, чтобы $\gamma = 1$, и полагая $m = 1$, получим:

$$F = -\frac{m_0}{r^3}\boldsymbol{r},$$

Проекции этой силы на координатные оси будут:

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\alpha = -\frac{m_0}{r^3}(x-\xi), \\ Y &= F\cos\beta = -\frac{m_0}{r^3}(y-\eta), \\ Z &= F\cos\gamma = -\frac{m_0}{r^3}(z-\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где α, β и γ — углы, образованные вектором $\boldsymbol{F}$ с координатными осями.

Введем функцию u, называемую *потенциалом силового поля* [1]) и определяемую равенством

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} u$$

или

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

В нашем случае

$$u = \frac{m_0}{r}.$$

Потенциал поля n материальных точек вследствие суперпозиции силовых полей будет выражаться формулой

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i}.$$

Перейдем к случаю непрерывного распределения массы. Пусть дано тело T с плотностью $\rho(\xi, \eta, \zeta)$. Определим потенциал этого

[1]) Не следует смешивать потенциал с потенциальной энергией силового поля. Термин потенциал употребляется здесь в том же смысле, как *силовая функция* в механике.

тела в точке $M(x, y, z)$. Для этого разобьем тело T на достаточно мелкие части $\Delta\tau$. Сделаем естественное предположение, что действие элемента $\Delta\tau$ эквивалентно действию его массы, сосредоточенной в некоторой «средней» точке [1]) объема $\Delta\tau$; тогда для компоненты силы, действующей на точку M, получим следующее выражение:

$$\Delta X = -\frac{\rho\Delta\tau}{r^3}(x-\xi),$$

где

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Интегрирование по всему объему T дает компоненту полной силы притяжения точки M телом T

$$X = -\int\int\int_T \rho\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau. \tag{3}$$

Потенциал в точке M будет определяться формулой

$$u(M) = \int\int\int_T \rho\frac{1}{r}\,d\tau. \tag{4}$$

Если точка M лежит вне тела, то в этом можно убедиться непосредственно дифференцированием под знаком интеграла [2]). Аналогично вычисляются и производные высших порядков. Очевидно, что потенциал $u(M)$ вне тела T удовлетворяет уравнению Лапласа.

В дальнейшем, не стремясь к доказательству теории в наиболее общих условиях, мы будем пользоваться указанными выше свойствами потенциалов и сформулируем ряд теорем при условии, что ρ — ограниченная функция (подразумевая ее интегрируемость).

Если точка M лежит внутри области T, нельзя утверждать, что $X = \frac{\partial u}{\partial x}$ без дополнительного исследования, которое и будет дано ниже.

---

[1]) Более точно при этом предполагается, что действие некоторого тела T массы m на точку, лежащую вне выпуклого объема $\overline{T}$, содержащего это тело, можно заменить действием некоторого эффективного центра той же массы m, лежащего внутри $\overline{T}$.

[2]) Для возможности дифференцирования определенного интеграла вида

$$f(M) = \int_T F(M, P)\,\varphi(P)\,d\tau_P$$

по параметру под знаком интеграла достаточно непрерывности производной от функции $F(M, P)$ по параметру и абсолютной интегрируемости функции $\varphi(P)$. Обычно эта теорема формулируется при $\varphi(P) \equiv 1$. Доказательство ее для нашего случая ничем не отличается от обычного.

2. Плоская задача. Логарифмический потенциал. Рассмотрим распределение масс в пространстве, зависящее лишь от двух координат (x, y). В любой плоскости $z = \text{const}$ потенциал, очевидно, принимает одно и то же значение, поэтому достаточно исследовать потенциал точки (x, y), лежащей в плоскости $z = 0$.

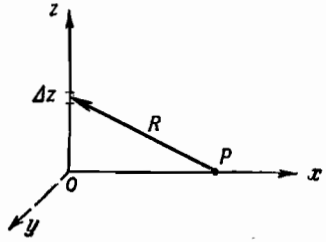


Рис. 54.

Определим потенциал однородной бесконечной прямой L. Направим ось z вдоль этой прямой. Пусть погонная плотность (т. е. масса единицы длины) равна μ. Сила притяжения элементом Δz точки $P(x, 0)$ (рис. 54) и ее составляющая по оси x равны, соответственно,

$$\Delta F = -\frac{\mu \Delta z}{R^2} = -\frac{\mu \Delta z}{(x^2+z^2)},$$

$$\Delta X = \Delta F \cos\alpha = -\mu \Delta z \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2+z^2)^3}}.$$

Отсюда

$$X = -\int_{-\infty}^{\infty} \mu x \frac{dz}{(x^2+z^2)^{3/2}} = -\mu x^2 \frac{1}{x^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \, d\alpha = -\frac{2\mu}{x}$$

$$\left(\frac{z}{r} = \operatorname{tg}\alpha\right).$$

Если $P(x, y)$ — произвольная точка, то сила притяжения точки линией L будет, очевидно, направлена вдоль $\overrightarrow{OP}$ и равна по величине

$$F = -\frac{2\mu}{\rho},$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Потенциал этой силы называется *логарифмическим потенциалом* и равен

$$V = 2\mu \ln\frac{1}{\rho}, \tag{5}$$

в чем легко убедиться непосредственным дифференцированием.

Логарифмический потенциал является решением уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными, обладающим круговой симметрией вокруг полюса в точке $\rho = 0$, в которой он обращается в бесконечность.

Таким образом потенциал однородной прямой дает плоское поле и выражается формулой (5). Представление потенциала в виде интеграла было получено нами лишь для ограниченных объемов [1]). Отметим, что в отличие от объемного потенциала логарифмический потенциал не обращается в нуль на бесконечности, а имеет там логарифмическую особенность.

Вычислим теперь компоненты силы притяжения точки P (рис. 55)

$$X = F\cos\alpha = -2\mu\frac{x}{\rho^2} \qquad \left(\cos\alpha = \frac{x}{\rho}\right),$$

$$Y = F\sin\alpha = -2\mu\frac{y}{\rho^2} \qquad \left(\sin\alpha = \frac{y}{\rho}\right).$$

Если имеется несколько точек (бесконечных прямых с распределенной вдоль них массой), то в силу принципа суперпозиции силовых полей потенциалы точек (линий) будут складываться.

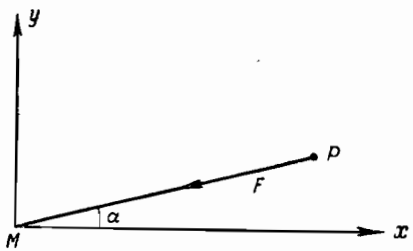


Рис. 55.

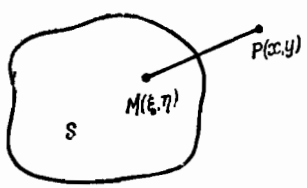


Рис. 56.

В случае области S с непрерывно-распределенной плотностью $\mu(\xi, \eta)$ (рис. 56) компоненты силы притяжения точки P выразятся двойными интегралами:

$$\left.\begin{aligned} X &= -2\int\int_S \mu(\xi,\ \eta)\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\,d\eta, \\ Y &= -2\int\int_S \mu(\xi,\ \eta)\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}\,d\xi\,d\eta, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

---

[1]) При вычислении потенциала бесконечной прямой нельзя было непосредственно интегрировать потенциалы отдельных элементов, так как в этом случае получается расходящийся интеграл. В самом деле, потенциал элемента Δz равен

$$\Delta u = \mu\frac{\Delta z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

Формальное интегрирование дает расходящийся интеграл

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\mu\frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

и потенциал будет равен

$$u(x, y) = 2\int\int_S \mu(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\xi\, d\eta, \qquad (7)$$

что нетрудно проверить дифференцированием для точек, лежащих вне S. Если же точка P лежит в области S, то необходимо провести дополнительное исследование.

3. Несобственные интегралы. Потенциалы и компоненты силы притяжения представляются с помощью интегралов, у которых подинтегральные функции обращаются в бесконечность, если мы рассматриваем их значения в точках, находящихся в области, содержащей притягивающие массы.

Как известно, если подинтегральная функция обращается в некоторой точке области интегрирования в бесконечность, то интеграл нельзя определять как предел интегральной суммы. Действительно, в этом случае интегральная сумма не имеет предела, так как слагаемое, относящееся к элементарному объему, содержащему особую точку, может как угодно сильно менять величину суммы, в зависимости от выбора промежуточной точки. Интегралы от подобных функций определяются как интегралы несобственные.

Пусть в области T задана функция $F(x, y, z)$, обращающаяся в бесконечность в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рассмотрим определенный интеграл по области $T - K_\varepsilon$, где K_ε — некоторая окрестность точки M_0 диаметра, не превосходящего ε.

Если при произвольном стягивании области K_{ε_n} к точке M_0 последовательность интегралов

$$I_n = \int\int\int_{T-K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau \qquad (\varepsilon_n \to 0)$$

имеет предел, не зависящий от выбора областей K_{ε_n}, то этот предел называется *несобственным интегралом* от функции $F(x, y, z)$ по области T и обозначается, как обычно,

$$\int\int\int_T F\, d\tau.$$

Если существует хотя бы одна последовательность областей $\overline{K}_{\varepsilon_n}$, такая, что при $\varepsilon_n \to 0$ существует предел $\overline{I}$, а для других последовательностей K_{ε_n} этот предел имеет другие значения, или даже вообще не существует, то предел $\overline{I}$ называется условно сходящимся несобственным интегралом. Ясно, что при рассмотрении условно сходящегося несобственного интеграла $\overline{I}$ нужно указывать ту последовательность областей $\overline{K}_{\varepsilon_n}$, по которой определяется этот интеграл.

Мы ограничимся здесь рассмотрением того случая, когда подинтегральная функция имеет особенность в изолированной точке. Исследуем сходимость интегралов типа

$$\iiint\limits_{T} \frac{C}{r^{\alpha}}\, d\tau_M, \tag{8}$$

где C и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные,

$$r = r_{MM_0} = \sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+(z_0-\zeta)^2},$$

M_0 — точка области T. Не ограничивая общности, можно считать, что T есть шар радиуса R с центром в точке M_0. Возьмем в качестве области K_{ε_n} шар радиуса ε_n с центром в точке M_0 и будем искать предел последовательности интегралов

$$\iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} \frac{C}{r^{\alpha}}\, d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{\varepsilon_n}^{R} \frac{C}{r^{\alpha-2}}\, dr = 2\pi\cdot 2C \int_{\varepsilon_n}^{R} \frac{dr}{r^{\alpha-2}} =$$

$$= \begin{cases} 4\pi C\left[\dfrac{1}{3-\alpha}\, r^{3-\alpha}\right]_{\varepsilon_n}^{R}, & \text{если } \alpha \neq 3, \\ 4\pi C\,[\ln r]_{\varepsilon_n}^{R}, & \text{если } \alpha = 3. \end{cases}$$

Переход к пределу при ε_n, стремящемся к нулю, показывает, что при $\alpha < 3$ предел существует, при $\alpha \geqslant 3$ предела не существует.

Покажем, что если функция $F(x, y, z)$ неотрицательна и существует предел

$$I_n = \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_n}} F\, d\tau \qquad (\varepsilon_n \to 0),$$

где $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ — шар радиуса ε_n с центром в точке M, то существует предел интегралов I и при любом выборе последовательности областей K_{ε_n}, стягивающихся к точке M, и значение этого предела не зависит от формы области K_{ε_n}. Любую область K_{ε_n} можно заключить между двумя сферами $\overline{K}_{\varepsilon_{n_1}}$ и $\overline{K}_{\varepsilon_{n_2}}$, радиусы которых ε_{n_1} и ε_{n_2} стремятся к нулю вместе с ε_n (рис. 57). В силу положительности подинтегральной функции

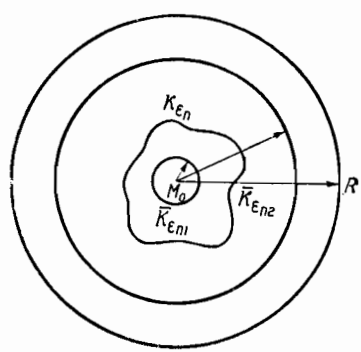


Рис. 57.

$$\iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_{n_1}}} F\, d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_{n_2}}} F\, d\tau.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau = \lim_{n\to\infty}\iiint_{T-\overline{K}_{\varepsilon_n}} F\,d\tau = I,$$

так как пределы крайних интегралов существуют и равны этому числу.

Таким образом, в случае трех независимых переменных несобственный интеграл

$$\iiint_T \frac{C}{r^\alpha}\,d\tau \tag{8}$$

существует, если $\alpha<3$, и не существует, если $\alpha\geqslant 3$.

Для другого числа независимых переменных критическое значение α, определяющее границы сходимости интегралов типа (8), равно числу измерений; так, например, для двух независимых переменных, интеграл

$$\iint_\Sigma \frac{C}{\rho^\alpha}\,d\sigma \quad \begin{matrix}\text{при } \alpha<2 \text{ сходится,}\\ \text{при } \alpha\geqslant 2 \text{ расходится.}\end{matrix}$$

Остановимся на признаке сходимости несобственных интегралов. Докажем, что

для сходимости несобственного интеграла

$$\iiint_T F(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz \tag{9}$$

достаточно, чтобы существовала такая функция $\overline{F}(x, y, z)$, для которой несобственный интеграл по области T сходится, и чтобы имело место неравенство

$$|F(x,\ y,\ z)|<\overline{F}(x,\ y,\ z). \tag{10}$$

Рассмотрим некоторую последовательность областей K_ε, содержащих особую точку M_0. В силу сходимости последовательности интегралов $\overline{I}_n$ от функции $\overline{F}$ для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что

$$|\overline{I}_{n_1}-\overline{I}_{n_2}|=\left|\iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}}-K_{\varepsilon_{n_2}}} \overline{F}\,d\tau\right|<\varepsilon,$$

коль скоро $n_1,\ n_2>N(\varepsilon)$. Так как $\overline{F}$ является мажорантной функцией для $F(x, y, z)$, то можно написать:

$$|I_{n_1}-I_{n_2}|=\left|\iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}}-K_{\varepsilon_{n_2}}} F\,d\tau\right|\leqslant\iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}}-K_{\varepsilon_{n_2}}}|F|\,d\tau\leqslant\iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}}-K_{\varepsilon_{n_2}}}\overline{F}\,d\tau<\varepsilon, \tag{10'}$$

если n_1, $n_2 > N(\varepsilon)$. Выполнение условия (10′) в силу признака сходимости Коши является достаточным для сходимости последовательности

$$I_n = \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau$$

к некоторому пределу

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \iiint\limits_{T} F\,d\tau.$$

Нетрудно видеть, что этот предел не будет зависеть от формы областей K_{ε_n}. Тем самым существование несобственного интеграла (9) доказано.

Если же для некоторой функции $F(x, y, z)$ можно указать такую положительную функцию $\overline{F}(x, y, z)$, что $F(x, y, z) > \overline{F}$, причем несобственный интеграл от $\overline{F}$ по области T расходится, то несобственный интеграл (9) будет, очевидно, расходиться.

Следствие: если для некоторой функции $F(M, P)$, обращающейся в бесконечность при $P = M$, имеет место неравенство

$$|F(M, P)| < \frac{C}{r_{MP}^{\alpha}} \quad \alpha < 3,$$

то несобственный интеграл по области T, содержащей точку M,

$$\iiint\limits_{T} F(M, P)\,d\tau_P$$

сходится.

Из теории интегралов, зависящих от параметров, известно, что непрерывность подинтегральной функции по параметрам и независимым переменным является достаточным условием непрерывности самого интеграла как функции параметров. Для несобственных интегралов непрерывность подинтегральной функции не имеет места и поэтому указанный выше критерий неприменим. Установим критерий непрерывности несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Будем рассматривать несобственные интегралы

$$V(M) = \iiint\limits_{T} F(P, M) f(P)\,d\tau_P, \tag{11}$$

где $F(P, M)$ — функция, обращающаяся в бесконечность при совпадении аргументов и непрерывная по M, а $f(P)$ — ограниченная функция.

Интеграл (11) называется равномерно сходящимся в точке M_0, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что имеет место неравенство

$$|V_{\delta(\varepsilon)}(M)| = \left|\int\limits_{T_{\delta(\varepsilon)}} F(P, M) f(P)\, d\tau_P\right| \leqslant \varepsilon$$

для любой точки M, расстояние которой от M_0 меньше $\delta(\varepsilon)$, и для любой области $T_{\delta(\varepsilon)}$, содержащей точку M_0 и имеющей диаметр $d \leqslant \delta(\varepsilon)$.

Докажем, что интеграл

$$V(M) = \int\limits_T F(P, M) f(P)\, d\tau_P,$$

равномерно сходящийся в точке M_0, есть непрерывная функция в этой точке M_0. Мы должны доказать, что для любого ε можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$|V(M_0) - V(M)| < \varepsilon$$

при

$$|\overrightarrow{MM_0}| < \delta(\varepsilon).$$

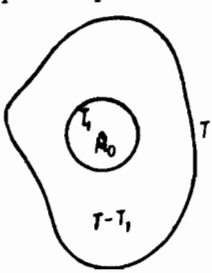


Рис. 58.

Выберем внутри области T некоторую область T_1, содержащую точку M_0 (рис. 58), и разобьем интеграл на два слагаемых

$$V = V_1 + V_2,$$

где интеграл V_1 берется по области T_1, а V_2 — по области $T_2 = T - T_1$. В дальнейшем мы более точно определим размеры области T_1. Рассмотрим неравенство

$$|V(M_0) - V(M)| \leqslant |V_2(M_0) - V_2(M)| + |V_1(M_0)| + |V_1(M)|$$

и покажем, что каждое из слагаемых, стоящих справа, может быть сделано меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ при достаточно малом $|\overrightarrow{M_0M}|$. Выбирая область T_1 внутри сферы радиуса $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, будем иметь:

$$|V_1(M_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |V_1(M)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

если

$$|\overrightarrow{M_0M}| \leqslant \delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Существование такого δ' вытекает из условия размерной сходимости интеграла (11) в точке M_0. Выбор области T_1 определяет область T_2.

Так как точка M_0 лежит вне области T_2, то интеграл V_2 является непрерывной функцией в этой точке.

Отсюда следует существование такого $\delta''\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, что

$$|V_2(M_0) - V_2(M)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

при

$$|\overrightarrow{M_0M}| \leqslant \delta''\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Полагая

$$\delta(\varepsilon) = \min[\delta'(\varepsilon), \delta''(\varepsilon)],$$

получим:

$$|V(M) - V(M_0)| \leqslant \varepsilon \text{ при } |\overrightarrow{MM_0}| \leqslant \delta,$$

что и означает непрерывность равномерно сходящегося интеграла.

Отметим, что полученные результаты справедливы не только для интегралов по объему, но также и для интегралов по поверхностям и линиям. Это обстоятельство будет использовано нами в дальнейшем.

Рассмотрим потенциал

$$V(M) = \int\int\int_T \frac{\rho(P)}{r_{MP}} d\tau_P \tag{12}$$

и компоненты силы притяжения

$$\left.\begin{aligned} X(M) &= -\int\int\int_T \frac{\rho(P)}{r_{MP}^3}(x-\xi)\,d\tau_P; \\ Y(M) &= -\int\int\int_T \frac{\rho(P)}{r_{MP}^3}(y-\eta)\,d\tau_P; \\ Z(M) &= -\int\int\int_T \frac{\rho(P)}{r_{MP}^3}(z-\zeta)\,d\tau_P \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

в точках, лежащих внутри притягивающего тела T. Несобственные интегралы (12) и (13) являются сходящимися, если плотность $\rho(M)$ ограничена $|\rho(M)| < C$. Для потенциала $V(M)$ это очевидно, так как

$$\frac{|\rho|}{r} < \frac{C}{r^\alpha} \quad (\alpha = 1 < 3).$$

Для компонент силы притяжения это следует из неравенства

$$\frac{|\rho|}{r^2}\frac{|x-\xi|}{r} < \frac{C}{r^\alpha} \quad (\alpha = 2 < 3),$$

так как $|x-\xi| < r$.

Для иллюстрации понятия равномерной сходимости несобственных интегралов покажем, что интегралы (12) и (13) являются непрерывными функциями.

Для этого надо доказать, что интегралы (12) и (13) равномерно сходятся во всякой точке M_0.

Вычислим модуль интеграла [1])

$$\left|\int\int_{T_\delta}\int \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P\right| \leqslant C\int\int_{K_\delta^{M_0}}\int \frac{d\tau_P}{r_{MP}},$$

где $K_\delta^{M_0}$ — шар радиуса δ с центром в точке M_0, содержащий область T_δ. Однако вычисление этого интеграла по области $K_\delta^{M_0}$ с центром в точке M_0 — неудобно. Для вычисления последнего интеграла целесообразно перейти к сферической системе координат с центром в точке M. Очевидно, что

$$C\int\int_{K_\delta^{M_0}}\int \frac{d\tau_P}{r_{MP}}\left| \leqslant C\right|\int\int_{K_{2\delta}^{M}}\int \frac{d\tau_P}{r_{MP}}\right| = C\,8\pi\delta^2,$$

где $K_{2\delta}^{M}$ — шар радиуса 2δ с центром в точке M. Если нам задано некоторое $\varepsilon > 0$, то выбирая

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}},$$

мы убедимся в равномерной сходимости интеграла V.

Повторяя аналогичное рассуждение для интеграла

$$X(M) = \int\int_{T}\int \rho(P)\frac{x-\xi}{r_{MP}^3}\,d\tau_P,$$

получаем:

$$\left|\int\int_{T_\delta}\int \rho(P)\frac{x-\xi}{r_{MP}^3}\,d\tau_P\right| \leqslant C\int\int_{K_\delta^{M_0}}\int \frac{d\tau_P}{r_{MP}^2}\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C\left|\int\int_{K_{2\delta}^{M}}\int \frac{d\tau_P}{r_{MP}^2}\right| = 8\pi\delta C \leqslant \varepsilon,$$

если

$$\delta \leqslant \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{8\pi C}.$$

Таким образом, потенциал V и компоненты силы притяжения X, Y, Z являются непрерывными функциями во всем пространстве [2]).

---

[1]) Отметим, что интеграл (12) получается из интеграла (11) при $F(M, P) = \dfrac{1}{r_{MP}}$, $f(P) = \rho(P)$.

[2]) Равномерная сходимость интегралов $V(M)$ и $X(M)$ доказана в предположении ограниченности плотности $|\rho| < C$. Следовательно, эти интегралы непрерывны также и в точках разрыва функции ρ, например на границе области, заполненной массами.

4. Первые производные объемного потенциала. Функции, стоящие под знаком интегралов

$$X(M) = -\int\int\int_T \rho(P)\frac{x-\xi}{r_{MP}^3}\,d\tau_P, \qquad Y(M), \qquad Z(M),$$

являются производными по соответствующим переменным от функции, стоящей под знаком интеграла

$$V(M) = \int\int\int_T \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P.$$

Если для функции V законно дифференцирование под знаком интеграла, то

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{14}$$

т. е. V является потенциалом поля, компоненты которого равны X, Y, Z.

Если точка M лежит вне области T, то функция

$$-\frac{x-\xi}{r_{MP}^3} = \frac{-(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\xi)^2]^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_{MP}}$$

непрерывна по обоим аргументам $M(x, y, z)$ и $P(\xi, \eta, \zeta)$. Следовательно, в этом случае дифференцирование под знаком интеграла V законно.

Производные более высокого порядка можно также вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла всюду вне тела T. Отсюда в силу леммы главы III, § 2 следует, что потенциал вне притягивающих масс удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0 \quad \text{вне тела } T.$$

Докажем, что вычисление производных потенциала V можно производить путем дифференцирования под знаком интеграла и в том случае, когда точка M лежит внутри тела T.

При доказательстве мы будем пользоваться только ограниченностью функции $\rho(x, y, z)$ ($|\rho(x, y, z)| < C$), не предполагая ее непрерывности, откуда будет следовать, что функция $V(x, y, z)$ дифференцируема и в точках границы, которые можно рассматривать как точки разрыва функции $\rho(x, y, z)$, равной нулю вне тела.

Покажем, что для любого ε можно найти такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\left|\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - X\right| < \varepsilon,$$

если

$$|\Delta x| < \delta(\varepsilon).$$

Заключим точку M_0 в достаточно малый шар $K_{\delta'}^{M_0}$, размеры которого мы уточним в дальнейшем, и разобьем V на два слагаемых

$$V = V_1 + V_2,$$

где V_1 и V_2 соответствуют интегрированию по объему $T_1 = K_{\delta'}^{M_0}$ и дополнительному объему $T_2 = T - K_{\delta'}^{M_0}$. Тогда

$$\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x}.$$

При любых фиксированных размерах области T_1

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} = X_2 = \int\int\int_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau,$$

так как точка M_0 лежит вне области T_2.

Оценим разность

$$\left| X - \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| X_2 - \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} \right| + |X_1| +$$
$$+ \left| \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} \right|$$

и покажем, что каждое из слагаемых можно сделать меньше чем $\frac{\varepsilon}{3}$. В самом деле,

$$|X_1| = \left| \int\int\int_{T_1} \rho \frac{x-\xi}{r^3} d\tau \right| < C \int_0^{\delta'}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr}{r^2} =$$
$$= 4\pi C\delta' < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (15)$$

так как $\left|\frac{x-\xi}{r}\right| < 1$ и $|\rho| < C$. Рассмотрим последнее слагаемое

$$|S| = \left| \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int\int\int_{T_1} \rho \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) d\tau \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \int\int\int_{T_1} \rho \frac{r - r_1}{r r_1} d\tau \right|,$$

где

$$r_1 = \sqrt{[(x+\Delta x) - \xi]^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2};$$
$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Стороны треугольника M_0MM_1 равны r, r_1 и $|\Delta x|$. Отсюда следует, что

$$|r - r_1| \leqslant |\Delta x|.$$

Поэтому

$$|S| \leqslant C \int\int\int_{T_1} \frac{d\tau}{r r_1} \leqslant C \frac{1}{2} \left\{ \int\int\int_{T_1} \frac{d\tau}{r_1^2} + \int\int\int_{T_1} \frac{d\tau}{r^2} \right\},$$

так как для любых чисел a и b

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

При этом

$$\int\int\int_{T_1} \frac{d\tau}{r^2} = 4\pi\delta'$$

и

$$\int\int\int_{T_1} \frac{d\tau}{r_1^2} \leqslant \int\int\int_{K_{2\delta'}^{M_1}} \frac{d\tau}{r_1^2} = 8\pi\delta',$$

где $K_{2\delta'}^{M_1}$ — шар радиуса $2\delta'$ с центром в точке M_1.

При соответствующем выборе δ' можно обеспечить неравенство

$$|S| < \frac{C}{2} 12\pi\delta' = 6\pi C\delta' < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Выбирая δ' из условия (16), мы удовлетворим обоим неравенствам (15) и (16). Фиксируем область $T_1 = K_{\delta'}^{M_0}$, а тем самым и область $T_2 = T - T_1$.

Равенство (14) в применении к выбранной области T_2 означает, что для любого ε можно указать такое δ'', что

$$\left| \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

коль скоро $|\Delta x| < \delta''$. Выбирая, наконец, $\delta = \min[\delta', \delta'']$, мы получим:

$$\left| \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - X \right| < \varepsilon, \quad \text{если } |\Delta x| < \delta.$$

Тем самым доказано, что

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X. \tag{17}$$

Формулы

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z$$

не требуют специального доказательства.

Таким образом доказано, что дифференцирование под знаком интеграла законно и что компоненты силового поля X, Y, Z являются компонентами grad V.

5. Вторые производные объемного потенциала. Несобственный интеграл

$$\int\int\int_T \rho(P)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)d\tau_P = -\int\int\int_T \rho\left(\frac{1}{r^3}-3\frac{(x-\xi)^2}{r^5}\right)d\tau \quad (18)$$

не сходится абсолютно для внутренних точек P тела T. В этом случае мажоранта для подинтегральной функции имеет вид

$$\frac{C}{r^\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha = 3.$$

Установим формулы, по которым вычисляются внутри T вторые производные потенциала V в предположении непрерывности и непрерывной дифференцируемости плотности $\rho(x, y, z)$ в окрестности исследуемых точек. В частности, исследование, проводимое ниже, не будет применимо к граничным точкам, где, как правило, имеет место разрыв плотности.

Представим потенциал V в виде суммы двух слагаемых

$$V = V_1 + V_2,$$

относящихся к областям T_1 и T_2, где $T_1 = K_\delta^{M_0}$ — шар радиуса δ с центром в рассматриваемой точке M_0, внутри которого функция ρ дифференцируема.

Вторую производную от V_2 можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, так как точка M_0 лежит вне области T_2

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = \int\int\int_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau.$$

Первая производная V_1 по x равна

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int\int\int_{T_1} \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = -\int\int\int_{T_1} \rho\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau, \quad (19)$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Преобразуем интеграл (19), пользуясь формулой Остроградского

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\int\int\int_{T_1} \rho\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = -\int\int\int_{T_1}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right]d\tau =$$

$$= -\int\int_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{\rho}{r}\cos\alpha\, d\sigma + \int\int\int_{T_1}\frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}d\tau,$$

где $\Sigma_\delta^{M_0}$ — поверхность сферы, ограничивающая объем T_1, α — угол между внешней нормалью к поверхности $\Sigma_\delta^{M_0}$ и осью x. Первое слагаемое является дифференцируемой функцией в точке M_0, так как M_0 лежит вне $\Sigma_\delta^{M_0}$. Второе слагаемое в окрестности точки M_0 является также дифференцируемой функцией, так как функция ρ имеет производную в T_1. Отсюда следует, что в точке M_0 существует вторая производная функции V_1. Перейдем к ее вычислению:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = -\int\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}}\int \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\, d\sigma + \int\limits_{T_1}\int\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\, d\tau.$$

Для второго слагаемого в точке M_0 имеет место следующая оценка:

$$\left|\int\limits_{T_1}\int\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\, d\tau\right| < C_1 \int\limits_{T_1}\int\int \frac{d\tau}{r^2} = C_1 4\pi\delta, \tag{20}$$

если

$$\left|\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right| < C_1.$$

Применяя к поверхностному интегралу теорему о среднем, получим:

$$-\int\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}}\int \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\, d\sigma = -\int\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}}\int \rho \frac{\cos^2\alpha}{r^2}\, d\sigma = -\rho^* \frac{4\pi}{3}.$$

Здесь ρ^* — значение плотности в некоторой точке $\Sigma_\delta^{M_0}$,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{x-\xi}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\cos\alpha$$

и, кроме того,

$$\int\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}}\int \frac{\cos^2\alpha}{r^2}\, d\sigma = \frac{1}{3}\int\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}}\int \frac{1}{r^2}\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) d\sigma = \frac{4}{3}\pi.$$

Переход к пределу при $\delta \to 0$ дает:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left[-\int\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}}\int \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\, d\sigma\right] = -\frac{4\pi}{3}\rho\,(M_0). \tag{21}$$

Равенство

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$$

верно при всяком δ и левая часть его не зависит от δ, поэтому

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right) = -\frac{4\pi}{3}\rho\,(M) + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{T_2}\int\int \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau. \tag{22}$$

Из существования второй производной $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, доказанного выше, следует существование

$$\lim_{\delta \to 0} \int\int\int_{T_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \overline{\int\int\int_{T} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau}. \tag{23}$$

Последний интеграл получен при специальном способе предельного перехода, когда стягиваемые к точке M_0 области являются шарами [1]), что и отмечается чертой над интегралом в формуле (23). Изменение формы этих областей, вообще говоря, может менять значение предела; интеграл (23) следует рассматривать как условно сходящийся. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M_0) = \overline{\int\int\int_{T} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau} - \frac{4\pi}{3}\rho(M_0). \tag{24}$$

Отсюда видно, что вычисление вторых производных потенциала при помощи формального дифференцирования под знаком интеграла привело бы нас к неверному результату.

Для производных $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ получаются аналогичные выражения. Подставляя значения всех трех производных в выражение для оператора Лапласа, найдем:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \\ &= \overline{\int\int\int_{T} \rho\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\tau} - 4\pi\rho(M_0) = \\ &= -4\pi\rho(M_0), \end{aligned} \tag{25}$$

так как $\frac{1}{r}$ — гармоническая функция [2]).

Таким образом, объемный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi\rho \quad \text{внутри тела}$$

и уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0 \qquad \text{вне тела.}$$

---

[1]) Предел (23) можно рассматривать как *главное значение* интеграла.

[2]) Формула (25) установлена в предположении дифференцируемости функции ρ, что является достаточным условием и может быть заменено менее стеснительными условиями. Однако условия непрерывности функции $\rho(M)$ для справедливости (25) недостаточно, так как существуют примеры таких непрерывных функций $\rho(M)$, для которых объемный потенциал не имеет вторых производных.

Неоднородное уравнение

$$\Delta u = -f \tag{25'}$$

при условии дифференцируемости f внутри некоторой области T имеет частное решение

$$u_0 = \frac{1}{4\pi}\int\int\int_T \frac{f\,d\tau}{r}.$$

Отсюда следует, что решение краевой задачи для неоднородного уравнения (25′) можно свести к решению аналогичной краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$, если искомую функцию представить в виде суммы $u = u_0 + v$.

6. Поверхностные потенциалы. Как показывает основная формула Грина (см. § 2)

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\int\left[\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma_P,$$

любая гармоническая функция может быть представлена с помощью интегралов, являющихся поверхностными потенциалами.

Рассмотрим поле, создаваемое массами, распределенными на поверхности, и определим потенциал этого поля. Поверхностной плотностью $\mu(P)$ в точке P поверхности Σ называют предел отношения массы, находящейся на некотором элементе $d\sigma$ поверхности Σ, содержащем точку P, к его площади при стягивании $d\sigma$ к точке P[1]). Потенциал этих масс представляется поверхностным интегралом

$$V(M) = \int_\Sigma\int\frac{\mu(P)}{r_{MP}}\,d\sigma_P, \tag{26}$$

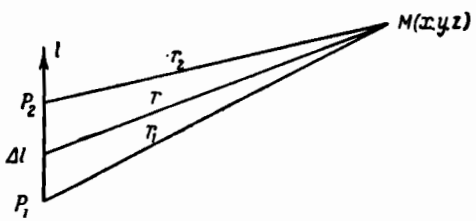


Рис. 59.

называемым *потенциалом простого слоя.*

Другим типом поверхностного потенциала является потенциал двойного слоя. Перейдем к его определению.

Рассмотрим диполь, образованный двумя массами $-m$ и $+m$, расположенными в точках P_1 и P_2 на расстоянии Δl (рис. 59).

[1]) Если массы с объемной плотностью ρ расположены в некотором слое толщины h около поверхности Σ и поле изучается на расстояниях, больших по сравнению с h $\left(\frac{h}{r} \ll 1\right)$, то учет толщины поверхности, вообще говоря, не имеет смысла. Поэтому вместо объемного потенциала с плотностью ρ целесообразно рассматривать поверхностный потенциал с поверхностной плотностью $\mu = \rho h$.

Произведение $m \cdot \Delta l = N$ называется *моментом* диполя. Потенциал в некоторой точке $M(x, y, z)$ равен

$$V = \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = N\frac{1}{\Delta l}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

где r_1 и r_2 — расстояния точки M от точек P_1 и P_2.

Если Δl мало по сравнению с расстоянием до точки $M\left(\frac{\Delta l}{r_1} \ll 1\right)$, то, пользуясь теоремой о конечных приращениях, можно написать:

$$V = N\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

где вектор $\boldsymbol{l}$ направлен от отталкивающей массы к притягивающей и r — расстояние от точки $M(x, y, z)$ до некоторой средней точки $P(\xi, \eta, \zeta)$ отрезка Δl.

Вычислим производную по направлению $\boldsymbol{l}$

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{l}) = \frac{\cos\varphi}{r^2},$$

где вектор $\boldsymbol{r}$ направлен от диполя к фиксированной точке M, а φ есть угол между вектором $\boldsymbol{l}$ и вектором $\boldsymbol{r}$. Таким образом, потенциал диполя равен

$$V(M) = N\frac{\cos\varphi}{r^2}, \tag{27}$$

где N — момент диполя.

Пусть на двух поверхностях Σ и Σ' (рис. 60), находящихся друг от друга на малом расстоянии δ, распределены массы таким образом, что масса каждого элемента поверхности Σ' равна по величине и противоположна по знаку массе соответствующего элемента поверхности Σ. Обозначим через $\boldsymbol{n}$ общую нормаль к поверхностям Σ и Σ', направленную от отталкивающих масс к притягивающим. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим двойной слой как совокупность двух простых слоев с взаимно противоположными плотностями, находящимися друг от друга на малом расстоянии. Если ν — поверхностная плотность момента, то момент элемента поверхности $d\sigma_P$ будет равен

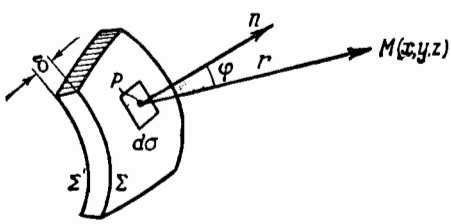


Рис. 60.

$$dN = \nu\, d\sigma_P;$$

для потенциала элемента $d\sigma$ в точке $M(x, y, z)$ мы будем иметь:

$$\nu\frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)d\sigma_P = \nu(P)\frac{\cos\varphi_1}{r_{MP}}d\sigma_P,$$

где $\varphi_1 = (\widehat{\boldsymbol{n}\,\overrightarrow{PM}})$.

Назовем *потенциалом двойного слоя* интеграл

$$W(M) = -\int_{\Sigma}\int \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)\nu(P)\,d\sigma_P. \tag{28}$$

Это определение, очевидно, соответствует такому случаю, когда внешняя сторона поверхности является отталкивающей, а внутренняя — притягивающей.

Очевидно, что

$$W = \int_{\Sigma}\int \frac{\cos\varphi}{r_{MP}^2}\nu(P)\,d\sigma_P,$$

где φ — угол между внутренней нормалью и направлением из точки поверхности P на фиксированную точку M. Если поверхность незамкнутая, то мы должны считать ее двусторонней, так как потенциал двойного слоя определяется только для таких поверхностей.

Потенциалы простого и двойного слоев в случае двух независимых переменных имеют вид

$$V = \int_{C}\mu(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\,ds, \tag{29}$$

$$W = -\int_{C}\nu(P)\frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{r_{MP}}\right)ds = \int_{C}\frac{\cos\varphi}{r_{MP}}\nu(P)\,ds, \tag{30}$$

где C — некоторая линия, μ — линейная плотность простого слоя, ν — плотность момента линейного двойного слоя, φ — угол между внутренней нормалью к линии C и направлением на фиксированную точку.

Если точка наблюдения $M(x, y, z)$ находится вне поверхности (вне притягивающих масс), то подинтегральные функции и их производные по x, y, z любого порядка в формулах

$$V(M) = \int_{\Sigma}\int \mu(P)\frac{1}{r_{MP}}\,d\sigma_P,$$

$$W(M) = -\int_{\Sigma}\int \nu(P)\frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)d\sigma_P$$

непрерывны по переменным x, y, z. Поэтому в точках, лежащих вне поверхности Σ, производные поверхностных потенциалов можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Отсюда в силу принципа суперпозиции следует, что поверхностные потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа всюду вне притягивающих масс. Функции (29) и (30), очевидно, удовлетворяют уравнению Лапласа с двумя независимыми переменными.

Поверхностные потенциалы в точках поверхности Σ представляются несобственными интегралами. Покажем, что если поверхность имеет непрерывную кривизну, то потенциал двойного слоя в точках этой поверхности существует. Проведем доказательство для случая двух независимых переменных:

$$W = \int_{\sigma} \frac{\cos\varphi}{r}\,\nu\,ds.$$

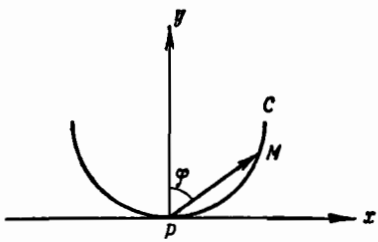


Рис. 61.

Рассмотрим кривую на плоскости (x, y) и выберем начало координат в точке P, ось x направим по касательной, а ось y — по нормали в этой точке (рис. 61). Уравнение кривой в некоторой окрестности точки P запишется в виде

$$y = y(x).$$

Кривая имеет, по предположению, непрерывную кривизну, т. е. $y(x)$ имеет непрерывную вторую производную. Поэтому

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(\vartheta x) \quad (0 < \vartheta < 1),$$

откуда вследствие выбора координатных осей

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 y''(\vartheta x).$$

Отсюда будем иметь:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^4\left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2} = x\sqrt{1 + x^2\left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{y}{r} = \frac{xy''(\vartheta x)}{2\sqrt{1 + x^2\left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2}}$$

и

$$\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{y''(\vartheta x)}{2\left\{1 + x^2\left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2\right\}}.$$

Из выражения кривизны

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

следует

$$y''(0) = K(P).$$

Поэтому

$$\lim_{MP \to 0} \frac{\cos\varphi}{r} = \frac{1}{2}K(P),$$

что доказывает непрерывность $\frac{\cos\varphi}{r}$ вдоль дуги, а тем самым и существование потенциала двойного слоя в точках кривой C для ограниченной функции ν.

Потенциал двойного слоя в случае трех независимых переменных также существует в точках поверхности, потому что функция

$$\frac{\cos\varphi}{r^2}$$

имеет интегрируемую особенность порядка $\frac{1}{r}$. Существование потенциала простого слоя не вызывает сомнений.

7. Поверхности и кривые Ляпунова. Предположение о конечности кривизны оказывается излишним для существования поверхностных потенциалов.

Потенциалы простого и двойного слоя в точках поверхности Σ являются несобственными интегралами. Покажем, что эти интегралы сходятся для определенного класса поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова, если плотность потенциала ограничена $|\nu(P)| < C$, где C — некоторая постоянная.

Поверхность называется *поверхностью Ляпунова*, если выполняются следующие условия:

1. В каждой точке поверхности Σ существует определенная нормаль (касательная плоскость).

2. Существует такое число $d > 0$, что прямые, параллельные нормали в какой-либо точке P поверхности Σ, пересекают часть Σ'_P поверхности Σ, лежащую внутри сферы радиуса d с центром P, не более одного раза. Эти участки поверхности Σ'_P называются окрестностями Ляпунова.

3. Угол $\gamma(P, P') = (\widehat{n_P, n_{P'}})$, образованный нормалями в точках P и P', удовлетворяет следующему условию:

$$\gamma(P, P') < Ar^{\delta}, \tag{31}$$

где r — расстояние между точками P и P', A — некоторая постоянная и $0 < \delta \leqslant 1$.

Пусть P_0 — некоторая точка поверхности Σ. Выберем прямоугольную систему координат, помещая начало координат в точку P_0 и направляя ось z вдоль внешней нормали. Плоскость (x, y) при этом совпадает с касательной плоскостью. В силу условия 2 существует такое ρ_0, что уравнение поверхности Σ может быть представлено в виде

$$z = f(x, y)\ ^{1}) \tag{32}$$

---

[1]) Отметим, что если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные вторые производные в окрестности точки P_0, то поверхность $z = f(x, y)$ удовлетворяет условиям Ляпунова. Таким образом, поверхности с непрерывной кривизной являются поверхностями Ляпунова.

для

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} < \rho_0. \tag{33}$$

Обозначим через Σ'_{P_0} окрестность точки P_0 на поверхности Σ, определяемую условиями (32) и (33). Установим некоторые оценки для функции $f(x, y)$ и ее производных.

Из существования нормали в каждой точке поверхности (условие 1) следует дифференцируемость функции $f(x, y)$. Направляющие косинусы нормали (внешней) выражаются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\beta = \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

В силу выбора нашей системы координат $z_x(P_0) = 0$, $z_y(P_0) = 0$. Будем считать, что поверхность Σ'_{P_0} столь мала (ρ_0 столь мало), что

$$1 \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} > \frac{1}{2}. \tag{34}$$

Обозначим через n'_P проекцию вектора n_P на плоскость (x, y) и через α', β' — углы, образованные вектором n'_P с осями x и y. Очевидно, что

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\alpha', \quad \cos\beta = \sin\gamma\sin\alpha'.$$

Так как в силу условия 3

$$\sin\gamma < \gamma < Ar^{\delta}_{PP_0},$$

то

$$|\cos\alpha| < Ar^{\delta}_{PP_0}, \quad |\cos\beta| < Ar^{\delta}_{PP_0}, \tag{35}$$

а так как $z_x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $z_y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, причем $\frac{1}{\cos\gamma} < 2$, то

$$|z_x| < 2\,Ar^{\delta}_{PP_0}, \quad |z_y| < 2\,Ar^{\delta}_{PP_0}.$$

Пользуясь формулой Тейлора для функции $z = f(x, y)$ в окрестности точки $P_0(0, 0)$, будем иметь:

$$z(x, y) = z(0, 0) + xz_x(\bar{x}, \bar{y}) + yz_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

где

$$0 \leqslant \bar{x} \leqslant x, \quad 0 \leqslant \bar{y} \leqslant y,$$

откуда следует, что

$$|z(x, y)| < 4Ar^{1+\delta}_{PP_0}. \tag{36}$$

Полученные оценки (34), (36) позволяют доказать, что в точках, лежащих на поверхности Σ, потенциал двойного слоя

$$W(M) = \int_{\Sigma}\int \frac{\cos\varphi}{r_{MP}^2}\,\nu(P)\,d\sigma_P \tag{28}$$

является сходящимся несобственным интегралом, если Σ — поверхность Ляпунова. Пусть $M = P_0$ — точка поверхности Σ. Выбирая систему координат, как было указано выше, представим уравнение поверхности Σ в окрестности точки P_0 в виде функции

$$z = f(x,\ y),$$

удовлетворяющей условиям (34) и (36). Вычислим $\cos\varphi$, где φ — угол между направлением внутренней нормали в точке $P(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ и направлением $\overrightarrow{PP_0}$. Нетрудно видеть, что

$$|\cos\varphi| = \left|\frac{\xi}{r}\cos\alpha + \frac{\eta}{r}\cos\beta + \frac{\zeta}{r}\cos\gamma\right| \leqslant |\cos\alpha| + |\cos\beta| + \frac{|\zeta|}{r} \leqslant$$

$$\leqslant Ar_{PP_0}^{\delta} + Ar_{PP_0}^{\delta} + 4Ar_{PP_0}^{\delta} = 6Ar_{PP_0}^{\delta}$$

и

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| \leqslant 6A\frac{1}{r^{2-\delta}} \quad (0 < \delta \leqslant 1). \tag{37}$$

Представим W в виде суммы двух интегралов

$$W = W_1 + W_2,$$

где W_1 — интеграл по поверхности Σ'_{P_0}, содержащей особую точку P_0, а интеграл W_2 берется по остальной части поверхности $\Sigma - \Sigma'_{P_0}$. Так как подинтегральная функция в интервале W_2 нигде не обращается в бесконечность, то для сходимости интеграла W достаточно убедиться в сходимости интеграла W_1. Поскольку

$$d\sigma = \frac{d\xi\,d\eta}{\cos\gamma} = \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\cos\gamma},$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$, θ — полярные координаты на плоскости (xy), то преобразование переменных в этом интеграле дает:

$$W_1 = \int_{\Sigma'_{P_0}}\int \frac{\cos\varphi}{r_{PP_0}^2}\,\nu(P)\,d\sigma_P = \int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r_{PP_0}^2}\,\nu(P)\,\frac{1}{\cos\gamma}\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Для подинтегральной функции в силу оценок (34), (36) и (37) имеем:

$$\left|\nu(P)\frac{\cos\varphi}{r^2}\frac{1}{\cos\gamma}\right| \leqslant \bar{F} = \frac{12AC}{\rho^{2-\delta}},$$

так как $\rho < r$.

Такой вид мажорантной функции $\bar{F}$ обеспечивает сходимость несобственного интеграла в случае двух независимых переменных (см. п. 3).

Нетрудно установить, что для поверхности Ляпунова потенциал простого слоя

$$V(M) = \int_{\Sigma}\int \frac{1}{r_{MP}}\,\mu(P)\,d\sigma_P \tag{26}$$

также сходится в точках поверхности. Следует отметить, что эта сходимость имеет место и для поверхностей более широкого класса.

В случае двух независимых переменных потенциалы простого и двойного слоев сходятся в точках кривой (см. формулы (29) и (30)), если эти потенциалы берутся для кривых Ляпунова, определяемых условиями, аналогичными условиям 1—3 для поверхностей Ляпунова.

8. Разрыв потенциала двойного слоя. Покажем, что потенциал двойного слоя в некоторой точке P_0, лежащей на поверхности Σ, является разрывной функцией, для которой имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} W_{в}(P_0) &= W(P_0) + 2\pi\nu(P_0), \\ W_{н}(P_0) &= W(P_0) - 2\pi\nu(P_0), \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где $W_{в}(P_0)$ — предельное значение потенциала двойного слоя при подходе к точке P_0 с внутренней стороны, а $W_{н}(P_0)$ — предельное значение с наружной стороны поверхности [1]).

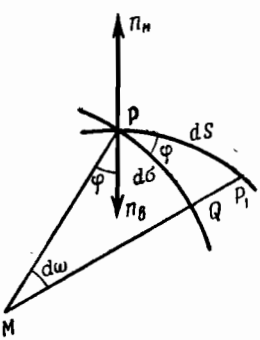


Рис. 62.

В случае двух независимых переменных соответствующие формулы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} W_{в}(P_0) &= W(P_0) + \pi\nu(P_0), \\ W_{н}(P_0) &= W(P_0) - \pi\nu(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Ограничимся для простоты доказательством этих формул для двух независимых переменных.

Потенциал двойного слоя в этом случае выражается интегралом

$$W(M) = \int_{C} \frac{\cos\varphi}{r_{MP}}\,\nu(P)\,ds_P.$$

Рассмотрим некоторый элемент дуги ds, концами которого являются точки P и P_1. Проведем через точку P дугу окружности радиуса MP с центром в точке M до пересечения ее с отрезком MP_1 в точке Q, тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно написать (рис. 62):

$$ds\cos\varphi = d\sigma, \quad \frac{d\sigma}{r} = d\omega, \tag{40}$$

---

[1]) Если Σ — незамкнутая поверхность, то внутренняя сторона может быть условно определена соглашением о том, какая нормаль в точке P_0 называется «внутренней» и какая — «внешней». Следует иметь в виду, что в случае незамкнутых поверхностей потенциал двойного слоя определяется только для двусторонних поверхностей.

где $ds = \overset{\smile}{PP_1}$, $d\sigma = \overset{\smile}{PQ}$, $d\omega$ — угол видимости, под которым видна дуга ds из точки M. Знак $d\omega$ совпадает со знаком $\cos\varphi$, так что: $d\omega > 0$, если φ (угол между внутренней нормалью в точке P и вектором $\overrightarrow{PM}$) меньше $\frac{\pi}{2}$, и $d\omega < 0$, если $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Если $d\omega > 0$, т. е. $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то из точки M видна «внутренняя» сторона кривой C; при $d\omega < 0$ $\varphi > \frac{\pi}{2}$, и из точки M видна «наружная» сторона кривой. Отсюда следует, что угол видимости некоторой дуги $\overset{\smile}{P_1P_2}$ равен углу P_1MP_2, который описывает луч MP, когда точка P пробегает дугу P_1P_2.

Рассмотрим потенциал двойного слоя W^0 с постоянной плотностью $\nu = \nu_0 = \text{const}$. Луч MP описывает угол

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{если точка } M \text{ лежит внутри кривой } C, \\ \pi, & \text{если точка } M \text{ лежит на кривой } C, \\ 0, & \text{если точка } M \text{ лежит вне кривой } C, \end{cases}$$

когда точка P пробегает всю кривую C. Отсюда для потенциала W^0 получаем:

$$W^0 = \nu_0\Omega = \begin{cases} 2\pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ лежит внутри кривой } C, \\ \pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ лежит на кривой } C, \\ 0, & \text{если точка } M \text{ лежит вне кривой } C. \end{cases}$$

Таким образом, потенциал с постоянной плотностью является функцией кусочно-постоянной, причем

$$\left.\begin{aligned} W^0_{\text{в}} &= W^0_c + \pi\nu_0, \\ W^0_{\text{н}} &= W^0_c - \pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

где $W^0_{\text{в}}$, W^0_c, $W^0_{\text{н}}$ — значения потенциала внутри, на и вне кривой C.

Аналогично в случае трех независимых переменных будем иметь:

$$\frac{d\sigma\cos\varphi}{r^2} = d\omega, \tag{42}$$

где $d\omega$ — телесный угол, под которым виден элемент $d\sigma$ поверхности Σ. Пусть $d\sigma'$ — элемент сферической поверхности, получающийся при пересечении сферы, описанной радиусом MP из точки M, с конусом, имеющим вершину в точке M и опирающимся на элемент поверхности $d\sigma$. Элемент поверхности $d\sigma' = d\sigma\cos\varphi$. Отсюда и следует формула (42). Замечание, сделанное выше относительно знака $d\omega$, остается в силе, что приводит нас к формулам

$$W^0 = \nu_0\Omega = \begin{cases} 4\pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ лежит внутри поверхности } \Sigma, \\ 2\pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ лежит на поверхности } \Sigma, \\ 0, & \text{если точка } M \text{ лежит снаружи поверхности } \Sigma, \end{cases}$$

характеризующим кусочное постоянство функции W^0, а также к формулам

$$\left.\begin{aligned} W^0_{\text{в}} &= W^0_{\Sigma} + 2\pi\nu_0, \\ W^0_{\text{н}} &= W^0_{\Sigma} - 2\pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{41'}$$

где $W^0_{\text{в}}$, $W^0_{\text{н}}$ — значение потенциала W^0 внутри и снаружи поверхности Σ, а W^0_{Σ} — значение W^0 на Σ.

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя с переменной плотностью и докажем, что в точках непрерывности плотности имеют место формулы, аналогичные формулам (41) и (41').

Пусть P_0 — точка поверхности Σ, в которой функция $\nu(P)$ непрерывна. Введем потенциал двойного слоя W^0 с постоянной плотностью $\nu_0 = \nu(P_0)$ и рассмотрим функцию

$$I(M) = W(M) - W^0(M) = \int_{\Sigma}\int [\nu(P) - \nu_0] \frac{\cos\varphi}{r^2_{MP}}\, d\sigma_P.$$

Докажем, что функция I непрерывна в точке P_0. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость интеграла $I(M)$ в точке P_0. Зададимся некоторым числом $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции $\nu(P)$ в точке P_0 следует, что для любого наперед заданного числа $\eta > 0$ можно найти Σ_1 — окрестность точки P_0 на поверхности Σ — такую, что

$$|\nu(P) - \nu(P_0)| < \eta,$$

если $P \subset \Sigma_1$. Представим интеграл I в виде суммы

$$I = I_1 + I_2,$$

где интеграл I_1 берется по поверхности Σ_1, а I_2 — по поверхности $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. Из определения Σ_1 следует:

$$|I_1| < \eta B_{\Sigma},$$

где B_{Σ} — постоянная, определяемая условием

$$\int_{\Sigma}\int \frac{|\cos\varphi|}{r^2_{MP}}\, d\sigma_P \leqslant B_{\Sigma} \tag{43}$$

при всевозможных положениях точки M, не зависящая от выбора поверхности Σ_1. Подробнее относительно этой постоянной будет сказано ниже.

Выбирая $\eta = \frac{\varepsilon}{B_{\Sigma}}$, мы убеждаемся в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое Σ_1, содержащее P_0, что

$$|I_1(M)| < \varepsilon$$

при любом положении точки M. Отсюда и следует равномерная сходимость интеграла $I(M)$ в точке P_0, а также его непрерывность в этой точке.

Если $W_в(P_0)$ и $W_н(P_0)$ — пределы потенциала $W(M)$ при $M \to P_0$ с внутренней и наружной сторон поверхности Σ, то

$$W_в(P_0) = W^0_в(P_0) + I(P_0) = W^0(P_0) + I(P_0) + 2\pi\nu_0 = W(P_0) + 2\pi\nu(P_0)$$

и аналогично

$$W_н(P_0) = W(P_0) - 2\pi\nu(P_0).$$

Справедливость формулы (43) установлена.

Проведенное выше доказательство справедливо для поверхностей, удовлетворяющих условию ограниченности (43). Для выпуклой поверхности, которую всякий луч из точки M пересекает не более двух раз, $B_\Sigma \leqslant 8\pi$; для поверхностей, состоящих из конечного числа выпуклых частей, B_Σ также ограничено. Таким образом, наше доказательство относится к весьма широкому классу поверхностей.

Все проведенные выше рассуждения остаются в силе и для функций двух независимых переменных. В этом случае формулы (41) принимают вид

$$W_в(P_0) = W(P_0) + \pi\nu(P_0);$$
$$W_н(P_0) = W(P_0) - \pi\nu(P_0).$$

9. Свойства потенциала простого слоя. В отличие от потенциала двойного слоя потенциал простого слоя

$$V(M) = \int_\Sigma \int \frac{1}{r_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P \tag{26}$$

непрерывен в точках поверхности Σ. Чтобы убедиться в этом, достаточно установить равномерную сходимость интеграла $V(M)$ в точках поверхности Σ.

Действительно, пусть P_0 — некоторая точка поверхности Σ. Представим потенциал V в виде суммы

$$V = \int_{\Sigma_1} \int \frac{1}{r_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P + \int_{\Sigma_2} \int \frac{1}{r_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P = V_1 + V_2,$$

где Σ_1 — достаточно малая часть поверхности Σ, содержащаяся в сфере радиуса δ с центром в точке P_0. Величину δ мы более точно определим в дальнейшем.

Рассмотрим систему координат с началом в точке P_0, ось z которой направлена по внешней нормали в P_0. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, отстоящая от $P_0(0, 0, 0)$ на расстоянии $MP_0 < \delta$. Обозначим через Σ'_1 проекцию Σ_1 на плоскость (x, y), а через

$K_{2\delta}^{M'}$ — круг радиуса 2δ с центром в точке $M'(x, y, 0)$, целиком содержащий область Σ_1'. Предполагая ограниченность функции

$$|\mu(P)| < A$$

и принимая во внимание, что

$$d\sigma = \frac{d\sigma'}{\cos\gamma} = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma}$$

и

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \geqslant \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = \rho,$$

получим:

$$V_1(M) < A\int\limits_{\Sigma_1}\int \frac{d\sigma}{r_{MP}} = A\int\limits_{\Sigma_1'}\int \frac{d\sigma'/\cos\gamma}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2A\int\limits_{\Sigma_1'}\int \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \leqslant 2A\int\limits_{K_{2\delta}^{M'}}\int \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}},$$

если δ настолько мало, что $\cos\gamma > \frac{1}{2}$.

Введем в плоскости (x, y) полярную систему координат (ρ, φ) с началом в точке M'. Тогда можно написать

$$V_1(M) < 2A\int\limits_{K_{2\delta}^{M'}}\int \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = 2A\int\limits_0^{2\delta}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\rho} = 8A\pi\delta.$$

Выбирая $\delta = \frac{\varepsilon}{8\pi A}$, будем иметь:

$$V_1(M) < \varepsilon,$$

если $MP_0 < \delta$. Следовательно, $V(M)$ равномерно сходится во всякой точке $P_0 \subset \Sigma$ и является непрерывной функцией в этой точке.

Нормальные производные потенциала простого слоя на поверхности Σ имеют разрыв такого же типа, как и потенциал двойного слоя.

Внешняя и внутренняя нормальные производные функции V: $\frac{dV}{dn_н}$ и $\frac{dV}{dn_в}$ определяются следующим образом. Пусть P_0—некоторая точка Σ. Из точки P_0 проведем ось z, которую можно направить либо вдоль внешней, либо вдоль внутренней нормали.

Рассмотрим производную $\frac{dV}{dz}$ в некоторой точке M оси z. Обозначим $\left(\frac{dV}{dz}\right)_в$ и $\left(\frac{dV}{dz}\right)_н$ пределы производной $\frac{dV}{dz}$ при стремлении точки M

к точке P_0 с внутренней или наружной стороны поверхности Σ. Если ось z направлена по внешней (внутренней) нормали, то эти значения называются внутренними и внешними предельными значениями производной по внешней (внутренней) нормали в точке P_0 [1]).

Исследуем разрывы внутренней нормальной производной потенциала простого слоя на Σ. Производная $\frac{dV}{dz}$ в точке M оси z, направленной по внутренней нормали, равна

$$\frac{dV}{dz}(M) = \int_\Sigma\int \mu(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)d\sigma_P = \int_\Sigma\int \frac{\cos\psi}{r_{MP}^2}\mu(P)\,d\sigma_P, \qquad (44)$$

где ψ — угол между осью z и вектором $\overrightarrow{MP}$. Проведем из точки P (рис. 63) нормаль PQ и прямую PN, параллельную оси z (нормали в точке P_0), и обозначим через θ угол NPQ, равный углу между нормалями в точках P и P_0 [2]). Выражение для потенциала двойного слоя $W(M)$ содержит множитель $\frac{\cos\varphi}{r^2}$, где $\varphi = \angle MPQ$. Так как угол MPN равен $\pi - \psi$, то

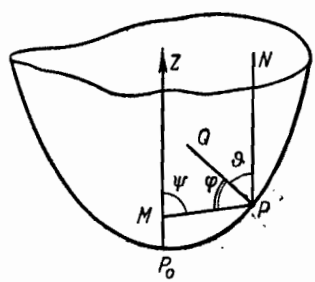


Рис. 63.

$$\cos(\pi-\psi) = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\cos\Omega = -\cos\psi,$$

где Ω — двугранный угол с ребром PQ [3]). Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial z}(M) = -\int_\Sigma\int (\mu\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma - \int_\Sigma\int \mu\sin\theta\cos\Omega\frac{\sin\varphi}{r^2}\,d\sigma =$$

$$= -W_1 - I(M), \qquad (45)$$

---

[1]) Предел разностного отношения $\frac{V(M)-V(P_0)}{MP_0}$ при $M\to P_0$ равен пределу извне для производной по внешней нормали или пределу изнутри для производной по внутренней нормали, в зависимости от того, с какой стороны точка M приближается к точке P_0.

[2]) Очевидно, что θ и $\sin\theta$ стремятся к нулю, когда $P\to P_0$. Если поверхность обладает конечной кривизной в окрестности точки P_0, т. е. ее уравнение можно представить в виде

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ имеет вторые производные, то $\sin\theta$ будет дифференцируемой функцией x, y и, следовательно,

$$\sin\theta < Ar$$

(для поверхностей Ляпунова $\sin\theta < Ar^\delta$).

[3]) Если направление PQ принять за ось новой сферической системы, то эта формула совпадает с формулой (13) на стр. 327.

где $W_1(M)$ — потенциал двойного слоя с плотностью $\mu_1 = \mu\cos\theta$, имеющий разрыв на поверхности Σ. Очевидно, что интеграл $I(M)$ является функцией, непрерывной в точке P_0, так как $I(M)$ сходится равномерно в этой точке (см. примечание, стр. 359).

Возвращаясь к формуле (45), видим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\text{в}} &= -W_1(P_0) - 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\text{н}} &= -W_1(P_0) + 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0).\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Обозначим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = -W_1(P_0) - I(P_0) =$$

$$= \left[-\int_\Sigma\int (\mu\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma - \int_\Sigma\int \mu\sin\theta\cos\Omega\frac{\sin\varphi}{r^2}\,d\sigma\right]_{M=P_0} =$$

$$= \int_\Sigma\int \mu\frac{\cos\psi_0}{r^2_{P_0P}}\,d\sigma,$$

где ψ_0 — угол между осью z и вектором $\overrightarrow{P_0P}$.

Замечая, что $\mu_1(P_0) = \mu(P_0)$, находим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_{\text{в}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_{\text{н}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0),\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

так как по условию ось z направлена по внутренней нормали. Если ось z направить по внешней нормали, то знак $\cos\psi$ изменяется, и мы получим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_{\text{в}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_{\text{н}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0).\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Для случая двух переменных имеют место аналогичные формулы с заменой 2π на π.

10. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач. Поверхностные потенциалы являются удобным аналитическим аппаратом для решения краевых задач. Рассмотрим внутренние краевые задачи для некоторого контура C:

найти функцию u, гармоническую в области T, ограниченной контуром C, и удовлетворяющую на C

граничным условиям

$$u|_\sigma = f \text{ — первая краевая задача,}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma = f \text{ — вторая краевая задача.}$$

Аналогично ставится внешняя краевая задача [1]).

Будем искать решение внутренней первой краевой задачи в виде потенциала двойного слоя

$$W(M) = \int_\sigma \frac{\cos\varphi}{r_{MP}} \nu(P)\, ds_P = -\int_\sigma \frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{r_{MP}}\right)\nu(P)\, ds_P.$$

При любом выборе $\nu(P)$ функция $W(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри C. Функция $W(M)$ разрывна на контуре C. Для выполнения граничного условия, очевидно, надо, чтобы

$$W_в(P_0) = f(P_0).$$

Принимая во внимание формулы (41), получаем уравнение для определения функции $\nu(P)$

$$\pi\nu(P_0) + \int_\sigma \frac{\cos\varphi}{r_{P_0P}} \nu(P)\, ds_P = f(P_0). \tag{49}$$

Если обозначить через s_0, s дуги контура C, соответствующие точкам P_0 и P, то уравнение (49) можно переписать в виде

$$\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\, ds = f(s_0), \tag{50}$$

где L — длина контура C и

$$K(s_0, s) = -\frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{r_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\varphi}{r_{PP_0}} \tag{51}$$

— ядро этого интегрального уравнения, являющегося интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода [2]). Для внешней задачи

---

[1]) При постановке второй краевой задачи как внутренней, так и внешней, в граничном условии нормаль будем считать внутренней.

[2]) Интегральные уравнения, содержащие интегралы с постоянными пределами, называются уравнениями Фредгольма:

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\, ds = f(x) \text{ — первого рода,}$$

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s) ds = f(x) \text{ — второго рода.}$$

получается аналогичное уравнение

$$-\pi\nu(s_0)+\int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0). \tag{52}$$

Для второй краевой задачи получаются уравнения

$$-\pi\mu(s_0)+\int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0) \text{ (внутренняя задача)}, \tag{53}$$

$$\pi\mu(s_0)+\int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0) \text{ (внешняя задача)}, \tag{54}$$

где

$$K_1(s_0, s) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\ln\frac{1}{r_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}}\ ^1), \tag{55}$$

если ее решение искать в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \int_C \ln\frac{1}{r_{MP}}\,\mu(P)\,ds_P.$$

Вопросы, связанные с разрешимостью этих уравнений, будут рассматриваться в п. 11 настоящего параграфа.

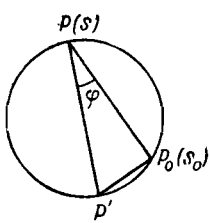


Рис. 64.

Рассмотрим краевые задачи для некоторых простейших областей, для которых соответствующие интегральные уравнения легко разрешимы.

1. Первая краевая задача для круга. Если контур C является окружностью радиуса R, то внутренняя нормаль в точке P направлена по диаметру и

$$\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{1}{2R},$$

так как φ есть угол P_0PP' (рис. 64). Интегральное уравнение для функции ν принимает вид

$$\nu(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_C \frac{1}{2R}\,\nu(s)\,ds = \frac{1}{\pi}f(s_0). \tag{56}$$

Нетрудно видеть, что его решением является функция

$$\nu(s) = \frac{1}{\pi}f(s)+A, \tag{57}$$

---

1) Нетрудно видеть, что $K(s_0, s) = K_1(s, s_0)$. Такие ядра называются *сопряженными*, а соответствующие им уравнения называются сопряженными интегральными уравнениями.

где A — некоторая постоянная, подлежащая определению. Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (56), имеем:

$$\frac{1}{\pi}f(s_0)+A+\frac{1}{\pi}\int_C \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\pi}f(s)+A\right)ds=\frac{1}{\pi}f(s_0),$$

откуда находим для постоянной A выражение через заданную функцию

$$A=-\frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s)\,ds.$$

Таким образом,

$$\nu(s)=\frac{1}{\pi}f(s)-\frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s)\,ds \qquad (58)$$

является решением интегрального уравнения.

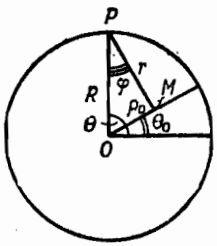


Рис. 65.

Соответствующий потенциал двойного слоя равен

$$W(M)=\int_C \frac{\cos\varphi}{r_{MP}}\nu(P)\,ds_P=\int_C \frac{\cos\varphi}{r}\left[\frac{1}{\pi}f(s)-\frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s)\,ds\right]ds.$$

Преобразуем правую часть предыдущей формулы, предполагая, что M лежит внутри C:

$$W=\frac{1}{\pi}\int_C \frac{\cos\varphi}{r}f(s)\,ds-\left(\frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s)\,ds\right)\int_C \frac{\cos\varphi}{r}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_C \frac{\cos\varphi}{r}f(s)\,ds-\left(\frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s)\,ds\right)\cdot 2\pi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_C \left(\frac{\cos\varphi}{r}-\frac{1}{2R}\right)f(s)\,ds. \qquad (59)$$

Из $\triangle OPM$ (рис. 65) видно, что

$$K=\frac{\cos\varphi}{r}-\frac{1}{2R}=\frac{2R\cos\varphi-r}{2Rr}=\frac{2Rr\cos\varphi-r^2}{2Rr^2}=$$

$$=\frac{R^2-\rho_0^2}{2R\left[R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)\right]}, \qquad (60)$$

так как

$$\rho_0^2=R^2+r^2-2Rr\cos\varphi.$$

Подставляя выражение (60) для K в формулу (59), получаем интеграл Пуассона

$$u=W(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho_0^2)f(\theta)\,d\theta}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}, \qquad (61)$$

дающей решение первой краевой задачи для круга.

Проведенные в этом пункте рассуждения показывают, что при любой непрерывной функции f формула (61) определяет гармоническую функцию, непрерывно примыкающую к граничным значениям f.

Если функция f кусочно-непрерывна, то в силу свойства потенциала двойного слоя функция W также непрерывна во всех точках непрерывности f. Из ограниченности функции f

$$|f| < C$$

следует ограниченность функции (61)

$$|W\rho_0, \theta_0)| < C\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho_0^2)}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}d\theta = C,$$

так как [1])

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}d\theta = 1. \qquad (62)$$

2. Первая краевая задача для полупространства: найти гармоническую функцию, непрерывную всюду в области $z \geqslant 0$, принимающую на границе $z=0$ заданное значение $f(x, y)$ и обращающуюся в нуль на бесконечности.

Будем искать решение этой задачи в виде потенциала двойного слоя

$$W(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\frac{\cos\varphi}{r^2}\nu(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2.$$

В данном случае

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{z}{r^3} = \frac{z}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}$$

и ядро интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_{z=0} = 0.$$

Таким образом, плотность потенциала двойного слоя

$$\nu(P) = \frac{1}{2\pi}f(P)$$

и искомая функция равна

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\frac{z}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

[1]) Равенство (62) следует из того, что левая часть представляет решение первой краевой задачи при $f=1$.

Нетрудно показать, что $u(x, y, z)$ равномерно стремится к нулю при $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty$, если этим свойством обладает функция f.

11. Интегральные уравнения, соответствующие краевым задачам. При решении краевых задач для уравнения Лапласа с помощью потенциалов простого и двойного слоя мы пришли к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (50).

Условия разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и ограниченной (интегрируемой) правой частью сходны с условиями разрешимости систем линейных алгебраических уравнений (к которым они сводятся, если интеграл заменить интегральной суммой). Первая теорема Фредгольма заключается в следующем.

Неоднородное интегральное уравнение второго рода имеет решение, и притом единственное, если соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение [1]).

Докажем, опираясь на формулированную теорему, что интегральное уравнение (50) имеет единственное решение.

Ограничимся рассмотрением выпуклых контуров, не содержащих прямолинейных участков границы. В этом случае ядро уравнения (50)

---

[1]) Для кривых с ограниченной кривизной теория Фредгольма применима непосредственно, так как ядро интегрального уравнения (50) непрерывно.

Теория Фредгольма применима также в том случае, когда непрерывно одно из *повторных ядер*

$$K^{(n+1)}(P_1, P_2) = \int\int_{\Sigma} K^{(1)}(P_1, M)\, K^{(n)}(M, P_2)\, d\sigma_M,$$

$$K^{(1)}(P, M) = K(P, M).$$

Докажем, что если Σ — поверхность Ляпунова, то повторные ядра нашего уравнения, начиная с некоторого номера, непрерывны. Как мы видели, для поверхностей Ляпунова

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| < \frac{C}{r^{2-\delta}}.$$

Повторные ядра могут быть представлены в виде

$$K_{1,2}(P_1, P_2) = \int\int_{\Sigma} K_1(P_1, M)\, K_2(M, P_2)\, d\sigma_M.$$

Покажем, что если

$$|K_i| < \frac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}} \quad (r_i = P_iM;\ \alpha_i > 0;\ i = 1, 2),$$

то

$$|K_{1,2}| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, \text{ если } \alpha_1+\alpha_2 < 2,\ r = P_1P_2.$$

Очевидно, что эту оценку достаточно установить для случая, когда точка P_2 лежит в окрестности Ляпунова Σ_0 точки P_1, причём вместо интеграла по Σ_0 можно рассматривать интеграл по проекции S_0 этой окрестности на каса-

$K(P_0, P)$ неотрицательно, так как

$$K(P_0, P)\, ds_P = d\omega,$$

где $d\omega$ есть угол видимости дуги ds_P из точки P_0.

Рассмотрим прежде всего первую краевую задачу для внутренней области. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (50), имеет вид

$$\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = 0. \tag{63}$$

Как мы видели (см. п. 8), имеет место равенство

$$\int_0^L K(s_0, s)\,ds = \pi,$$

пользуясь которым однородное уравнение (63) можно записать в виде

$$\int_0^L [\nu(s_0) + \nu(s)]\,K(s_0, s)\,ds = 0. \tag{64}$$

тельную плоскость в точке P_1 в силу того, что

$$1 \geqslant \frac{\rho(P, M)}{r(P, M)} \geqslant B > 0$$

(где $\rho(P, M)$ — расстояние между проекциями точек P и M на касательную плоскость, B — некоторая постоянная), а также в силу связи между элементом поверхности $d\sigma$ и его проекцией dS: $d\sigma = \dfrac{dS}{\cos\gamma}$, где согласно формуле (34) $\cos\gamma > \dfrac{1}{2}$.

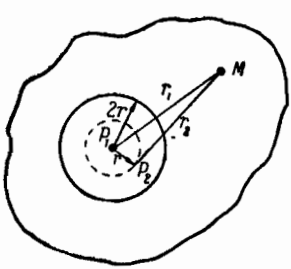


Рис. 66.

Для плоской области справедлива лемма:

если $|K_i| < \dfrac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}}$, то

$$|I| = \left| \int_{S_0} \int K_1(P_1, M)\, K_2(M, P_2)\, dx\, dy \right| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Обозначим через R диаметр области S_0. Разобьем интеграл I на два интеграла: I_1 — взятый по кругу G_1 радиуса $2r$ с центром в точке P_1 и I_2 — распространенный на оставшуюся область G_2 (рис. 66). Так как для точек M, лежащих в G_2,

$$2 \geqslant \frac{r_1}{r_2} \geqslant \frac{2}{3} \qquad \left(\begin{array}{l} r_1 \leqslant r_2 + r \leqslant 2r_2, \\ r_2 \leqslant r_1 + r \leqslant r_1 + \dfrac{r_1}{2} = \dfrac{3r_1}{2} \end{array} \right),$$

Пусть $P_0^*(s_0^*)$ — точка контура C, в которой функция $|\nu(s)|$ достигает своего максимального значения. Отсюда следует, что сумма $\nu(s_0^*)+\nu(s)$ знакопостоянна. Тогда, полагая в (64) $s_0=s_0^*$ и пользуясь тем, что $K(s_0, s)\geqslant 0$, получим равенство

$$\nu(s_0^*)+\nu(s)=0 \quad \text{или} \quad \nu(s)=-\nu(s_0^*),$$

противоречащее непрерывности в точке s_0^*, если только $\nu(s_0^*)\neq 0$.

Следовательно, однородное уравнение (63) имеет только нулевое решение, и тем самым неоднородное уравнение имеет единственное решение при любой функции f [1]).

Внешняя вторая краевая задача, как мы видели (см. п. 10), сводится к интегральному уравнению

$$\pi\mu(s_0)+\int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds=f(s_0), \tag{54}$$

то для интеграла I_2 получаем оценку

$$|I_2|<4C_1C_2\left|\int_0^{2\pi}\int_{2r}^{R}\frac{1}{r_1^{4-\alpha_1-\alpha_2}}\,r_1\,dr_1\,d\varphi\right|<\begin{cases}\dfrac{C_3}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, & \alpha_1+\alpha_2<2,\\ C_3R^{\alpha_1+\alpha_2-1}, & \alpha_1+\alpha_2>2.\end{cases}$$

Производя в интеграле по G_1 замену переменных

$$x=rx',$$
$$y=ry',$$

получаем:

$$|I_1|<\left|\frac{1}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}\int_{G_1'}\int\frac{C_1C_2}{r_1'^{2-\alpha_1}r_2'^{2-\alpha_2}}\,dx'\,dy'\right|.$$

В последнем интеграле, взятом по кругу G_1' с раднусом, равным $2r$, r_1' есть расстояние от центра, r_2' — от середины радиуса, вследствие чего этот интеграл сходится, причем он не зависит от положения точки P_2, т. е. от r.

Отсюда

$$|I_1|<\frac{C_4}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Положив $C_3+C_4=C$, получим искомое неравенство

$$|I|<\begin{cases}\dfrac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, & \alpha_1+\alpha_2<2,\\ CR^{\alpha_1+\alpha_2-2}, & \alpha_1+\alpha_2>2.\end{cases}$$

Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера, интегралы, производящие повторные ядра, ограничены и равномерно сходятся, т. е. являются непрерывнымн функциями своих аргументов.

[1]) При наличии прямолинейных участков границы рассуждения несколько осложняются, хотя доведение их до конца не представляет затруднений.

ядро которого $K_1(s_0, s)$ является сопряженным по отношению к ядру $K(s_0, s)$, т. е. $K_1(s_0, s) = K(s, s_0)$.

Вторая теорема Фредгольма состоит в следующем:

Число линейно-независимых решений некоторого однородного интегрального уравнения равно числу линейно-независимых решений сопряженного уравнения.

Из этой теоремы следует, что решение уравнения (54) определено однозначно. Внешней первой краевой задаче соответствует уравнение

$$-\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0). \tag{52}$$

Однородное уравнение ($f = 0$) согласно предыдущему может быть приведено к виду

$$\int_0^L [\nu(s_0) - \nu(s)]\,K(s_0, s)\,ds = 0. \tag{65}$$

Обозначая через s_0^* точку, в которой $|\nu(s)|$ достигает максимального значения, получим из (65)

$$\nu(s^*) = \nu(s).$$

Отсюда следует, что

$$\nu(s) = \text{const} = \nu_0$$

является единственным решением однородного уравнения. В силу второй теоремы Фредгольма сопряженное однородное уравнение будет иметь единственное решение.

Третья теорема Фредгольма состоит в том, что если некоторое однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

имеет k линейно-независимых решений $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то сопряженное неоднородное уравнение

$$\psi(x) = \int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds + f(x)$$

имеет решение, и притом единственное, если

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0.$$

Применяя третью теорему Фредгольма к уравнению (53), соответствующему внутренней второй краевой задаче, получим условие разрешимости этой задачи

$$\int_0^L f(s)\,ds = 0, \tag{66}$$

с которым мы уже встречались в § 1.

Условие разрешимости внешней первой краевой задачи имеет вид

$$\int_0^L f(s)\,h(s)\,ds = 0, \tag{67}$$

где $h(s)$ — решение однородного уравнения, соответствующего (53). Нетрудно выяснить физический смысл этой функции.

Пусть цилиндрический проводник, имеющий в сечении форму S, заряжен до некоторого потенциала V_0. В проводнике весь заряд находится на поверхности. Обозначим $\overline{h}(s)$ плотность поверхностных зарядов. Потенциал, создаваемый этими поверхностными зарядами, является потенциалом простого слоя с плотностью $\overline{h}(s)$ и выражается формулой (29). Нормальные производные его изнутри равны нулю, так как внутри проводника $V = \text{const}$. Поэтому функция $\overline{h}(s)$ удовлетворяет однородному уравнению (53) и пропорциональна функции $h(s)$, определенной выше, что и выясняет физический смысл этой функции.

Таким образом, интегральные уравнения, к которым сводятся краевые задачи, разрешимы всегда для внутренней первой и внешней второй краевых задач и разрешимы при условиях (66) и (67) для внутренней второй и внешней первой краевых задач. Мы не будем подробнее останавливаться на вопросе о разрешимости краевых задач [1]).

§ 6. Метод конечных разностей

1. Понятие о методе конечных разностей для уравнения Лапласа. В тех случаях, когда не удается получить аналитическое выражение решения, наряду с численными методами решения интегральных уравнений применяется метод сведения дифференциального уравнения к уравнению в конечных разностях.

В случае функции одного аргумента $y = f(x)$ вместо второй производной можно рассматривать разностное отношение

$$\frac{\Delta^2 f}{h^2} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta^+ f}{h} - \frac{\Delta^- f}{h}\right] = \frac{[f(x+h) - f(x)] - [f(x) - f(x-h)]}{h^2} =$$

$$= \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}, \tag{1}$$

[1]) См. подробнее И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, § 39, М. — Л., 1950.

где $\Delta^+ f = f(x+h) - f(x)$, $\Delta^- f = f(x) - f(x-h)$ — первые разности (правые и левые). Вторые разности для случая двух переменных равны

$$\Delta^2_{xx} u = u(x+h, y) + u(x-h, y) - 2u(x, y),$$
$$\Delta^2_{yy} u = u(x, y+h) + u(x, y-h) - 2u(x, y).$$

Разностное отношение для оператора Лапласа, очевидно, имеет вид

$$\frac{\overline{\Delta}_h u}{h^2} = \frac{u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2}. \quad (2)$$

При замене дифференциального уравнения разностным мы переходим от непрерывного изменения аргумента к дискретному.

Зададимся некоторым положительным числом h и построим в плоскости (x, y) сетку, состоящую из двух систем взаимно перпендикулярных прямых, отстоящих друг от друга на расстоянии h (рис. 67). Будем рассматривать значения функции только в узловых точках этой сетки.

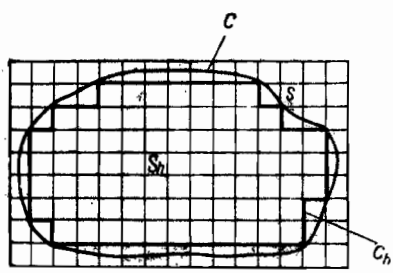


Рис. 67.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Лапласа в некоторой области S, ограниченной кривой C, на которой задана непрерывная ограниченная функция f.

В методе конечных разностей заданная область S заменяется сетчатой областью S_h, аппроксимирующей область S. Будем считать, что область S_h состоит из квадратов нашей сетки, целиком лежащих внутри S (в качестве аппроксимирующей области S_h можно было бы взять совокупность всех квадратов сетки, имеющих хотя бы одну общую точку с S). Обозначим через C_h ломаную линию, ограничивающую область S_h. Очевидно, что расстояние от каждой узловой точки кривой C_h до кривой C не превышает $h\sqrt{2}$.

В узловых точках C_h определим граничную функцию f_h, полагая ее равной значению функции f в ближайшей точке границы C (или в одной из ближайших точек, если их несколько) [1].

Рассмотрим первую краевую задачу для разностного уравнения Лапласа в области S_h:

найти функцию, удовлетворяющую в узловых точках $M_{ik}(x_i, y_k)$ внутри S_h разностному уравнению

[1] Степень неопределенности в выборе может быть в силу непрерывности функции f сделана сколь угодно малой, если h достаточно мало.

Лапласа

$$u^{(h)}_{i+1,\,k} + u^{(h)}_{i,\,k+1} + u^{(h)}_{i-1,\,k} + u^{(h)}_{i,\,k-1} - 4u^{(h)}_{i,\,k} = 0, \qquad (3)$$

где

$$u^{(h)}_{i,\,k} = u(x_i,\ y_k),$$

и принимающую на C_h значения, равные f_h.

Решение этой задачи заключается в отыскании значений сетчатой функции $u^{(h)}_{ik}$ во внутренних узловых точках M_{ik} области S_h.

В каждой внутренней узловой точке M_{ik} должно выполняться разностное уравнение (3). Таким образом, для определения сетчатой функции мы получаем систему линейных алгебраических уравнений 1-го порядка, число которых равно числу неизвестных.

Докажем, что система разностных уравнений имеет единственное решение.

Для этого достаточно убедиться в том, что соответствующая однородная система имеет лишь тривиальное решение.

Разностная система является системой неоднородных уравнений, поскольку значения u_{ik} в узловых точках C_h заданы и равны f_h. Переход к однородной системе эквивалентен тому случаю, когда граничная функция $f_h = 0$. Докажем, что в этом случае решение разностной системы равно нулю во всех узловых точках области S_h.

Пусть некоторое $u_{i_1,\,k_1} \neq 0$; для определенности будем считать, что

$$u_{i_1,\,k_1} > 0.$$

Пусть $u_{i_0,\,k_0}$ — максимальное значение нашей сетчатой функции, так что

$$u_{i,\,k} \leqslant u_{i_0,\,k_0}$$

во всех точках M_{ik} области S_h. Равенство

$$u_{i_0,\,k_0} = \frac{u_{i_0-1,\,k_0} + u_{i_0,\,k_0-1} + u_{i_0+1,\,k_0} + u_{i_0,\,k_0+1}}{4}$$

может иметь место только в том случае, если

$$u_{i_0-1,\,k_0} = u_{i_0,\,k_0-1} = u_{i_0+1,\,k_0} = u_{i_0,\,k_0+1} = u_{i_0,\,k_0}.$$

Последовательно проводя анологичные рассуждения для $u_{i_0+1,\,k_0}$, $u_{i_0+2,\,k_0}$ и т. д., мы достигнем на некотором шаге граничной точки, что приведет нас к противоречию, так как по условию граничные значения равны нулю. Предположение $u_{i_0,\,k_0} < 0$ также приводит к противоречию.

Отсюда следует, что

$$u_{i,\,k} \equiv 0$$

во всех внутренних узловых точках области S, т. е., что система однородных разностных уравнений имеет лишь тривиальное решение. Тем самым теорема единственности решения первой краевой задачи для разностного уравнения Лапласа доказана.

Решая разностные уравнения, мы получаем сетчатую функцию, которая представляет собой приближенное решение исходной задачи для уравнения Лапласа.

2. Метод последовательных приближений для решения разностных уравнений. Метод конечных разностей заключается в том, что вместо решения краевой задачи для дифференциального уравнения $\Delta u = 0$ решается соответствующая краевая задача для разностного уравнения. Для обоснования этого метода надо убедиться в том, что при достаточно малом h функция u_h как угодно мало отличается от u — точного решения уравнения $\Delta u = 0$. Мы не будем приводить этого доказательства [1]).

Остановимся более подробно на методах решения разностного уравнения. Решение краевой задачи разностным методом приводит к решению системы алгебраических уравнений с большим числом неизвестных, достигающим часто нескольких сотен и даже тысяч. Решение этой системы методами теории определителей вызвало бы чрезвычайные технические трудности. Гораздо более удобным методом является метод последовательных приближений.

Метод последовательных приближений для систем линейных алгебраических уравнений заключается в следующем.

Запишем систему уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= f_1 - (a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n),\\ u_2 &= f_2 - (a_{21}u_1 + \ldots + a_{2n}u_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_n &= f_n - (a_{n1}u_1 + \ldots + a_{n,n-1}u_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где каждое уравнение разрешено относительно соответствующей неизвестной. Выбирая в качестве нулевого приближения произвольные числа $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}$ и подставляя их в правые части уравнений (4), найдем первое приближение $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}$. Продолжая этот процесс далее, определим $(k+1)$-е приближение по формулам

$$\begin{aligned} u_1^{(k+1)} &= f_1 - (a_{12}u_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}u_n^{(k)}),\\ u_2^{(k+1)} &= f_2 - (a_{22}u_1^{(k)} + \ldots + a_{2n}u_n^{(k)}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_n^{(k+1)} &= f_n - (a_{n1}u_1^{(k)} + \ldots + a_{n,n-1}u_{n-1}^{(k)}). \end{aligned}$$

[1]) См. И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, § 36, М. — Л., 1950.

Если последовательные приближения $\{u_n^{(k)}\}$ сходятся к пределу

$$\lim_{k\to\infty} u_n^{(k)} = u_n,$$

то эти предельные значения, очевидно, являются искомыми решениями системы (4).

Метод последовательных приближений применим не для всякой системы уравнений.

Докажем, что первая краевая задача для системы разностных уравнений $\overline{\Delta}_h u = 0$ может быть решена методом последовательных приближений. Система алгебраических уравнений, соответствующих уравнению $\overline{\Delta}_h u = 0$, имеет вид

$$u_{ik}^{(h)} = \frac{u_{i+1,k}^{(h)} + u_{i,k+1}^{(h)} + u_{i-1,k}^{(h)} + u_{i,k-1}^{(h)}}{4},$$

где каждое уравнение разрешено относительно соответствующей неизвестной.

Последовательное приближение будем вести, начиная от границы, где заданы граничные значения. Назовем $C_h^{(1)}$ совокупность узловых точек области S_h, отстоящих от узловых точек C_h на расстоянии h. При вычислении последовательных приближений в точках $C_h^{(1)}$, очевидно, будут непосредственно использованы значения функции f_h, заданной на C_h. Назовем, далее, $C_h^{(2)}$ совокупность узловых точек области S_h, отстоящих от $C_h^{(1)}$ на расстоянии h. При вычислении последовательных приближений $C_h^{(2)}$ будут использованы значения $u_{ik}^{(h)}$ на $C_h^{(1)}$. Аналогично определяются «зоны» $C_h^{(3)}$, $C_h^{(4)}$, ... В результате каждая из узловых точек области S_h окажется отнесенной к некоторому $C_h^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, где N — номер последней зоны $C_h^{(N)}$.

Пусть u_{ik} — точное решение системы разностных уравнений, $u_{ik}^{(n)}$ — n-е приближение этой системы.

Рассмотрим разность

$$v_{ik}^{(n)} = u_{ik} - u_{ik}^{(n)},$$

равную нулю на C_h и удовлетворяющую внутри S_h уравнениям

$$v_{ik}^{(n)} = \frac{v_{i+1,k}^{(n-1)} + v_{i,k+1}^{(n-1)} + v_{i-1,k}^{(n-1)} + v_{i,k-1}^{(n-1)}}{4}. \tag{5}$$

Докажем, что последовательные разности $\{v_{ik}^{(n)}\}$ сходятся к нулю

$$\lim_{n\to\infty} v_{ik}^{(n)} = 0.$$

Положим $\max v_{ik}^{(n)} = A_n$ и оценим $(n+1)$-е приближение. Очевидно, что

$$v_{ik}^{(n+1)} \leqslant \frac{3}{4} A_n \quad \text{на} \quad C_h^{(1)},$$

так как в этом случае по крайней мере одно из слагаемых в формуле (5) равно нулю. Отсюда следует, что

$$v_{ik}^{(n+1)} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) A_n \quad \text{на} \quad C_h^{(2)}$$

и вообще

$$v_{ik}^{(n+1)} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4^s}\right) A_n \quad \text{на} \quad C_h^{(s)}.$$

Для последней зоны $C_h^{(N)}$ получим:

$$v_{ik}^{(n+1)} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4^N}\right) A_n \quad \text{на} \quad C_h^{(N)}.$$

Отсюда заключаем, что

$$A_{n+1} \leqslant \alpha A_n, \qquad \alpha = 1 - \frac{1}{4^N},$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$.

Обозначая $\min v_{ik} = B_n$, подобным же образом убеждаемся в том, что

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} v_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} u_{ik}^{(n)} = u_{ik}$$

для всех точек $M_{ik}(x_i, y_k)$ области S_h.

Доказанная здесь сходимость имеет место при любом выборе нулевого приближения. Однако быстрота сходимости очень сильно зависит от выбора нулевого приближения.

3. Методы моделирования. В настоящее время используется много математических машин, служащих для решения систем разностных уравнений. Эти машины построены на принципе использования аналогии, существующей между явлениями разной физической природы, описываемыми одними и теми же дифференциальными уравнениями.

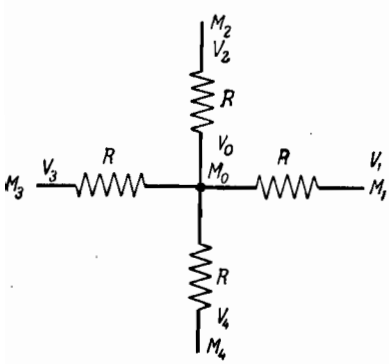


Рис. 68.

Для решения уравнения Лапласа (а также для некоторых более сложных уравнений) широко применяются *электроинтеграторы*. Рассмотрим одну из простейших электрических схем решения уравнения Лапласа, идея которой принадлежит Гершгорину.

Возьмем сетку одинаковых омических сопротивлений, один из узлов которой изображен на рис. 68. Обозначим через V_i потенциал

в точке M_i, а через j_i — ток в звене M_0M_i. Пользуясь законом Ома

$$j_i = \frac{V_i - V_0}{R} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

и законом Кирхгофа

$$j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 0,$$

получим

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}.$$

Таким образом, потенциал в любой узловой точке электрической схемы, составленной из сопротивлений, равен среднему арифметическому потенциалов в четырех соседних узлах. Это соотношение, аналогичное уравнению (5) изложенного выше метода конечных разностей, является основой для электромоделирования уравнения Лапласа.

Простейший электроинтегратор представляет собой панель, в которой имеются гнезда, причем между ними включены одинаковые сопротивления. Пусть, например, требуется решить первую краевую задачу для некоторой области S плоскости (x, y), ограниченной контуром C.

Возьмем на плоскости (x, y) сетку с некоторым шагом h и построим область S_h с границей C_h методом, указанным в предыдущем пункте. В узлах границы C_h при помощи специального делительного устройства задаются напряжения, соответствующие граничным условиям первой краевой задачи. Устанавливающееся при этом распределение напряжений и дает приближенное решение рассматриваемой задачи.

В некоторых системах электроинтеграторов сопротивления между узловыми точками могут варьировать, что позволяет решать уравнения с переменными коэффициентами вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

где

$$k_1 = k_1(x,\ y),\ k_2 = k_2(x,\ y).$$

Такого рода электроинтеграторы были осуществлены Л. И. Гутенмахером. Они позволяют быстро решать задачи для сложных областей на плоскости (x, y).

Существуют и другие методы моделирования краевых задач для уравнения Лапласа, например метод электролитической ванны.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV

1. Найти функцию u, гармоническую внутри круга радиуса a и принимающую на окружности C значения

а) $u|_C = A\cos\varphi$;

б) $u|_C = A + B\sin\varphi$.

2. Решить уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ внутри прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ при граничных условиях

$$u|_{x=0} = f_1(y), \quad u|_{y=0} = f_2(x), \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=b} = 0.$$

Доказать, что получающиеся при этом формулы дают решение задачи для произвольной кусочно-непрерывной функции, заданной на границе.

Решить задачу для частного случая

$$f_1(y) = Ay(b-y), \quad f_2(x) = B\cos\frac{\pi}{2a}x, \quad f_3 = f_4 = 0.$$

3. Решить уравнение $\Delta u = 1$ для круга радиуса a при граничном условии $u|_{r=a} = 0$.

4. Решить уравнение $\Delta u = Axy$ для круга радиуса a с центром в точке (0, 0) при граничном условии $u|_{r=a} = 0$.

5. Решить уравнение $\Delta u = A + B(x^2 - y^2)$ в кольце $a \leqslant \rho \leqslant b$, если

$$u\Big|_{\rho=a} = A_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=b} = 0.$$

Начало координат находится в центре кольца.

6. Построить функцию источника для уравнения Лапласа (первая краевая задача): а) для полукруга, б) для кольца, в) для слоя $(0 \leqslant z \leqslant l)$.

7. Найти гармоническую функцию внутри кольца $a \leqslant \rho \leqslant b$, удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$u|_{\rho=a} = f_1(\varphi), \quad u|_{\rho=b} = f_2(\varphi).$$

8. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полуплоскости $y \geqslant 0$ с граничным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ u_0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

9. Найти функцию $u(\rho, \varphi)$, гармоническую внутри кругового сектора $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ при граничных условиях:

а) $u|_{\varphi=0} = q_1$, $u|_{\varphi=\varphi_0} = q_1$, $u|_{\rho=a} = q_2$, где q_1 и q_2 — постоянные;

б) $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, $u|_{\rho=a} = f(\varphi)$.

10. Методом конечных разностей решить первую краевую задачу для уравнения $\Delta u = 0$ внутри прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, подразделяя каждую из его сторон на 8 равных частей, если граничные условия имеют вид

$$u|_{x=0} = \frac{y}{b}\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad u|_{y=b} = \frac{x}{a}\sin\frac{\pi}{a}x, \quad u|_{x=a} = u|_{y=0} = 0,$$

Сравнить с аналитическим решением.

11. Найти объемный потенциал сферы при постоянной плотности $\rho = \rho_0$.

Указание. Решать уравнения $\Delta u = 0$ вне сферы и $\Delta u = 4\pi\rho_0$ внутри сферы и решения сопрягать на поверхности сферы.

12. Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью $\nu = \nu_0$ на сфере.

Указание. Искать решение уравнения $\Delta u = 0$ вне и внутри сферы и воспользоваться для сопряжения условиями разрыва производной потенциала простого слоя.

13. Решить первую краевую задачу для ограниченного круглого цилиндра ($\rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant l$):

а) на основаниях цилиндра заданы нулевые граничные условия (первого или второго рода), а на боковой поверхности

$$u|_{\rho=a} = f(z);$$

б) на боковой поверхности и на одном из оснований цилиндра заданы нулевые граничные условия (первого или второго рода), а на втором основании цилиндра

$$u = f(\rho),$$

например $f(\rho) = A\rho\left(1 - \frac{\rho}{a}\right)$.

14. Решить неоднородное уравнение

$$\Delta u = -f$$

в неограниченной цилиндрической области при нулевых граничных условиях (первого или второго рода) и построить функцию источника.

15. Найти гармоническую внутри сферы функцию, равную u_1 на одной половине сферы и u_2 на второй половине сферы.

16. Написать разложение по сферическим функциям плотности поверхностных зарядов, индуцированных на проводящей сфере точечным зарядом.

17. Решить задачу о поляризации диэлектрического шара в поле точечного заряда.

18. Вычислить гравитационный потенциал плоского диска. Сравнить с асимптотическим представлением гравитационного потенциала на больших расстояниях.

19. Вычислить магнитный потенциал кругового тока.

20. Решить задачу о возмущении плоскопараллельного электрического поля идеально проводящей сферой. Решить задачу для абсолютно непроводящей сферы.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

I. Асимптотическое выражение объемного потенциала

При изучении объемного потенциала

$$V(M) = \int\int\int_{T} \frac{\rho(P)\, d\tau_P}{d}, \quad \text{где} \quad d = r_{MP} \tag{1}$$

на больших расстояниях от тела обычно принимают значения потенциала равным $\frac{m}{R}$, где m — масса тела T, R — расстояние его центра тяжести от точки наблюдения. Установим более точное асимптотическое выражение для V [1]).

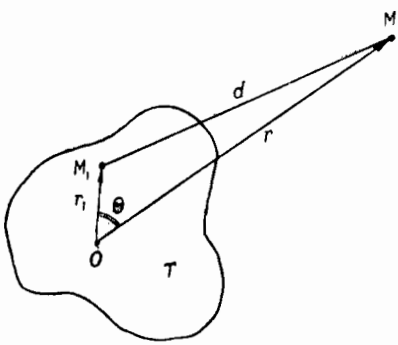


Рис. 69.

Пусть Σ — сфера с центром в начале координат, целиком содержащая тело T. Вне этой сферы потенциал будет гармонической функцией.

Расстояние от точки наблюдения $M(x, y, z)$ до переменной точки внутри тела $M(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 69), по которой производится интегрирование, равно

$$d = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta} \qquad (r = OM,\ r_1 = OM_1), \tag{2}$$

откуда

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\mu}}; \quad \alpha = \frac{r_1}{r}; \quad \mu = \cos\theta. \tag{3}$$

Так как $r_1 < r$, то $\alpha < 1$, и поэтому имеет место разложение (см. Дополнение, ч. II, § 1)

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu), \tag{4}$$

---

[1]) В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, Гостехиздат, 1949.

где $P_n(\mu)$ — полином Лежандра n-го порядка (см. Дополнение II, § 1). Подставляя это выражение в формулу (1) и учитывая, что $\frac{1}{r}$ не зависит от переменных интегрирования, получим:

$$V(M) = \frac{1}{r}\int\int\int_T \rho \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu)\, d\tau = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{r}\int\int\int_T \rho\, d\tau + \frac{1}{r^2}\int\int\int_T \rho r_1 P_1(\mu)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{r^3}\int\int\int_T \rho r_1^2 P_2(\mu)\, d\tau + \ldots \qquad (5)$$

Первый член равен $\frac{m}{r}$, где m — масса всего тела, и дает нам первое приближение для вычисления потенциала при больших r.

Перейдем к вычислению следующих членов разложения (5). Подинтегральное выражение во втором члене равно

$$\rho P_1(\mu)\, r_1 = \rho\mu r_1 = \rho r_1 \cos\theta = \frac{\rho x x_1 + \rho y y_1 + \rho z z_1}{r}.$$

Величины x, y, z и r не зависят от переменных интегрирования и могут быть вынесены за знак интеграла. После этого второй член разложения потенциала принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\int\int\int_T \rho r_1 P_1(\mu)\, d\tau = \frac{1}{r^3}(M_1 x + M_2 y + M_3 z) =$$

$$= \frac{M}{r^3}(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}),$$

где

$$M_1 = \int\int\int_T \rho x_1\, d\tau = M\bar{x}, \quad M_2 = \int\int\int_T \rho y_1\, d\tau = M\bar{y};$$

$$M_3 = \int\int\int_T \rho z_1\, d\tau = M\bar{z}$$

— моменты 1-го порядка, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — координаты центра тяжести. Таким образом, второй член убывает как $\frac{1}{r^2}$. Если начало координат поместить в центре тяжести ($\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$), то $V_2 = 0$.

Рассмотрим третий член разложения. Преобразуем подинтегральное выражение

$$\rho r_1^2 P_2(\mu) = \rho r_1^2 \frac{3\mu^2 - 1}{2} = \rho r_1^2 \frac{3(x x_1 + y y_1 + z z_1)^2 - r_1^2 r^2}{2 r_1^2 r^2} =$$

$$= \frac{\rho}{2r^2}[3(x_1 x + y_1 y + z_1 z)^2 - r_1^2 r^2].$$

Вводя обозначения

$$M_{ik}=\int\int\int_T \rho x_i x_k\, d\tau \quad (x=x_1;\ \ y=x_2;\ \ z=x_3),$$

приходим к следующему выражению для V_3:

$$V_3=\frac{1}{r^3}\int\int\int_T \rho r_1^2 P_2(\mu)\, d\tau=$$

$$=\frac{1}{2r^5}\{x^2[3M_{11}-(M_{11}+M_{22}+M_{33})]+$$

$$+y^2[3M_{22}-(M_{11}+M_{22}+M_{33})]+z^2[3M_{33}-(M_{11}+M_{22}+M_{33})]+$$

$$+2\cdot 3xyM_{12}+2\cdot 3xzM_{13}+2\cdot 3yzM_{23}\}.$$

Полином, стоящий в фигурных скобках, является гармоническим полиномом, так как он может быть записан в виде

$$V_3=\frac{1}{2r^5}\{(x^2-y^2)[M_{11}-M_{22}]+(z^2-x^2)[M_{11}-M_{33}]+$$

$$+(y^2-z^2)[M_{22}-M_{33}]+6[xyM_{12}+xzM_{13}+yzM_{23}]\},$$

где каждое слагаемое удовлетворяет уравнению Лапласа. Коэффициенты, стоящие в квадратных скобках, выражаются через *моменты инерции*. Момент инерции тела T относительно оси x, как известно, равен

$$A=\int\int\int_T \rho(y_1^2+z_1^2)\, d\tau=M_{22}+M_{33}.$$

Аналогично моменты инерции относительно осей y и z равны

$$B=M_{33}+M_{11};\quad C=M_{11}+M_{22}.$$

Отсюда следует, что

$$M_{11}-M_{22}=B-A;\qquad M_{11}-M_{33}=C-A;\qquad M_{22}-M_{33}=C-B.$$

В результате мы приходим к асимптотическому выражению для потенциала

$$V\cong\frac{m}{r}+\frac{m}{r^3}(\bar{x}x+\bar{y}y+\bar{z}z)+\frac{1}{2r^5}\{(x^2-y^2)(B-A)+$$

$$+(y^2-z^2)(C-B)+(z^2-x^2)(A-C)+$$

$$+6(xyM_{12}+yzM_{23}+zxM_{31})\}, \qquad (6)$$

справедливому с точностью до членов порядка $\frac{1}{r^6}$.

Выражение (6) упрощается, если поместить начало координат в центре тяжести, а оси координат направить по главным осям инерции:

$$V\cong\frac{m}{r}+\frac{1}{2r^5}\{(x^2-y^2)(B-A)+(y^2-z^2)(C-B)+$$

$$+(z^2-x^2)(A-C)\}. \qquad (7)$$

Полученное асимптотическое представление потенциала позволяет ответить на ряд вопросов обратной задачи теории потенциала, заключающейся в определении характеристик тела по его потенциалу (или каким-либо его производным).

В самом деле, определяя коэффициенты разложения (6), можно найти массу, координаты центра тяжести и моменты инерции тела.

II. Задачи электростатики

В задачах электростатики решение уравнений Максвелла сводится к отысканию одной скалярной функции — потенциала φ, связанной с напряженностью поля соотношением

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Используя уравнение Максвелла

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = -4\pi\rho,$$

получим:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Таким образом, потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона в тех точках пространства, где находятся электрические заряды, и уравнению Лапласа — в тех точках, где заряда нет.

1. *Основной задачей электростатики* является отыскание поля, создаваемого системой зарядов на заданных проводниках. При этом возможны две различные постановки этой задачи.

I. Задаются потенциалы проводников и требуется определить поле вне проводников и плотность зарядов на проводниках. Математическая формулировка задачи состоит в следующем.

Требуется найти функцию φ, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ всюду вне заданной системы проводников, обращающуюся в нуль на бесконечности и принимающую заданные значения φ_i на поверхностях проводников

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i.$$

Таким образом, в этом случае мы приходим к первой краевой задаче для уравнения Лапласа. Единственность ее решения следует из общей теории.

II. Возможна и обратная постановка задачи. На проводниках задаются полные заряды. Требуется определить потенциалы проводников, распределение зарядов по их поверхностям и поле вне проводников. Решение этой задачи сводится к отысканию функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

вне заданной системы проводников, обращающейся в нуль на бесконечности, принимающей на поверхностях проводников некоторые постоянные

$$\varphi|_{S_i} = \text{const}$$

и удовлетворяющей интегральному соотношению на поверхностях проводников

$$\oint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi e_i,$$

где e_i — полный заряд i-го проводника.

2. Единственность решения второй краевой задачи из общей теоремы не следует, но может быть легко доказана.

Предположим, что существует два решения φ_1 и φ_2 задачи II. Тогда их разность

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$$

будет удовлетворять уравнению

$$\Delta\varphi' = 0$$

и условиям

$$\varphi'|_{S_i} = \text{const},$$

$$\oint_{S_i} \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

$$\varphi'|_\infty = 0.$$

Заключим все заданные проводники внутрь сферы Σ_R достаточно большого радиуса R и применим к функции φ' первую формулу Грина в области T_R, ограниченной сферой Σ_R и поверхностями проводников S_i:

$$\int_{T_R} (\nabla\varphi')^2\, d\tau = \int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\sigma + \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\sigma.$$

В силу условий на бесконечности [1]) и на поверхностях, мы получим:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{T_R} (\nabla\varphi')^2\, d\tau = 0,$$

откуда вследствие положительности подинтегрального выражения следует:

$$\nabla\varphi' = 0$$

---

[1]) Из условия $\varphi'|_\infty = 0$ следует регулярность функции φ' на бесконечности (см. стр. 308), в силу чего

$$\int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

или

$$\varphi' = \text{const}$$

всюду в рассматриваемой области. Учитывая условие на бесконечности

$$\varphi'|_\infty = 0,$$

получаем:

$$\varphi' \equiv 0,$$

что и доказывает единственность поставленной задачи.

3. Из единственности решения краевой задачи для уравнения Лапласа следует, что потенциал уединенного проводника прямо пропорционален сообщенному ему заряду

$$\frac{e}{\varphi} = C.$$

В самом деле, если на уединенный проводник поместить заряды e и $e' = me$, то соответствующие потенциалы φ и φ' должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta\varphi = 0; \quad \Delta\varphi' = 0$$

и граничным условиям

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma = e; \qquad -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma = me,$$

откуда и следует, что $\varphi' - m\varphi = 0$, т. е. $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{e'}{e}$.

На поверхности уединенного проводника получаем:

$$\frac{e'}{\varphi'} = \frac{e}{\varphi} = C = \text{const}.$$

Эту постоянную C называют *емкостью* уединенного проводника. Она не зависит от заряда проводника, а определяется формой и размерами последнего. Таким образом, для уединенного проводника имеет место соотношение

$$e = C\varphi.$$

Емкость уединенного проводника численно равна заряду, при сообщении которого проводник приобретает потенциал, равный 1. Если проводник не уединен, то его потенциал существенно зависит от формы и расположения других проводников. Для системы проводников имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
e_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + C_{1n}(\varphi_n - \varphi_1),\\
e_2 &= C_{21}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{22}\varphi_2 + \ldots + C_{2n}(\varphi_n - \varphi_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_n &= C_{n1}(\varphi_1 - \varphi_n) + C_{n2}(\varphi_2 - \varphi_n) + \ldots + C_{nn}\varphi_n,
\end{aligned}$$

где e_i и φ_i — заряд и потенциал i-го проводника. Величина C_{ik} имеет смысл взаимной емкости i-го проводника по отношению к k-му проводнику. Она может быть определена как тот заряд, который должен быть сообщен i-му проводнику для того, чтобы все проводники, кроме k-го, имели нулевой потенциал, а k-й проводник — потенциал 1.

4. Легко показать, что матрица коэффициентов C_{ik} является симметричной, т. е. имеют место соотношения

$$C_{ik} = C_{ki}.$$

Для определенности рассмотрим случай двух проводников, хотя и в случае n проводников доказательство остается тем же.

Пусть заданы два проводника a и b. Тогда определение коэффициентов C_{ab} и C_{ba} сведется к определению функций $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, удовлетворяющих уравнениям $\Delta u^{(1)} = 0$ и $\Delta u^{(2)} = 0$ и граничным условиям

$$u^{(1)}|_{S_a} = 0; \quad u^{(1)}|_{S_b} = 1; \quad u^{(1)}|_{\infty} = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\, d\sigma = e_a^{(1)} = C_{ab};$$

$$u^{(2)}|_{S_a} = 1; \quad u^{(2)}|_{S_b} = 0; \quad u^{(2)}|_{\infty} = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\, d\sigma = e_b^{(2)} = C_{ba}.$$

Опишем сферу Σ_R достаточно большого радиуса R, заключающую оба проводника, a и b, и применим формулу Грина к функциям $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ в области между поверхностью Σ_R и поверхностями проводников S_a и S_b

$$\int_{T_R} (u^{(1)}\Delta u^{(2)} - u^{(2)}\Delta u^{(1)})\, d\tau = \int_{\Sigma_R + S_a + S_b} \left(u^{(1)}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} - u^{(2)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Интеграл в левой части этого равенства равен нулю. Используя граничные условия и условия в бесконечности, получим:

$$\int_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\, d\sigma - \int_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\, d\sigma = 0$$

или

$$C_{ab} = C_{ba},$$

что и требовалось доказать.

5. Перейдем к конкретным примерам.

Рассмотрим задачу о поле заряженного шара. Пусть на поверхности проводящего шара радиуса a задан потенциал φ_0. Решая

задачу 1, легко показать, что поле и плотность зарядов на поверхности шара в этом случае будет определяться выражениями

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{r} a \text{ и } \sigma = \frac{\varphi_0}{4\pi a}.$$

Если вместо потенциала на поверхности шара φ_0 задан полный заряд e_0, сообщенный шару, то

$$\varphi_0 = \frac{e_0}{a}, \quad \sigma = \frac{e_0}{4\pi a^2}, \quad \varphi = \frac{e_0}{r} \quad (r > a).$$

При этом емкость шара

$$C = a,$$

т. е. в абсолютных единицах емкость уединенного шара численно равна его радиусу.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу о сферическом конденсаторе (система двух концентрических проводящих сфер).

Пусть внутренний шар радиуса r_1 имеет заданный потенциал V_0, а внешний шар радиуса r_2 заземлен. Тогда определение поля внутри конденсатора сводится к отысканию функции φ, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\varphi = 0$$

и условиям

$$\varphi|_{r_1} = V_0, \quad \varphi|_{r_2} = 0.$$

Легко показать, что в этом случае

$$\varphi = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} V_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right),$$

а емкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Более сложной задачей является определение потенциала сферы в присутствии другой сферы, не концентрической с данной. Эта задача решается методом отражений. Аналитическое решение довольно громоздко, и мы здесь приводить его не будем [1]).

С помощью инверсии [2]) можно первую сферу преобразовать в плоскость. Покажем, что с помощью второй инверсии задача определения потенциала плоскости в присутствии сферы сводится к задаче о системе двух концентрических проводящих сфер.

Вместо плоскости и сферы, очевидно, достаточно рассмотреть прямую E и окружность K с центром O радиуса ρ (рис. 70). Опустим

[1]) См. Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, т. II, стр. 713. 1937.

[2]) См. там же.

из O перпендикуляр $OF = l$ на прямую E и проведем из точки F касательную FD к окружности K; опишем радиусом FD из точки F окружность H, пересекающую продолжение перпендикуляра OF в точке S.

Примем точку S за центр инверсии.

При этом преобразовании инверсии прямая $L = SO$, пересекающая окружность K в точке A, и окружность H перейдут во взаимно перпендикулярные прямые $\bar{L}$ и $\bar{H}$, а прямая E и окружность K — в окружности $\bar{E}$ и $\bar{K}$.

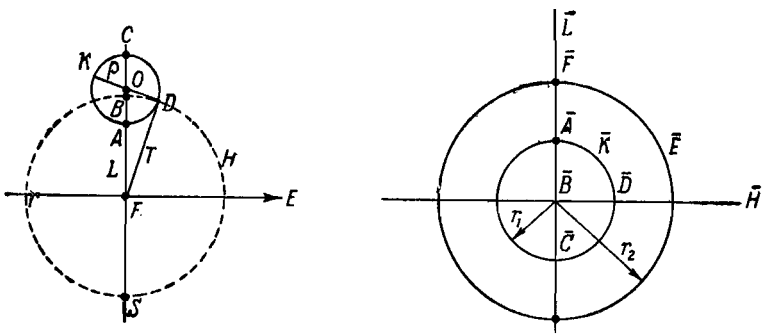


Рис. 70.

Так как при преобразовании инверсии свойство ортогональности сохраняется, то окружности $\bar{E}$ и $\bar{K}$ должны быть ортогональными к прямым $\bar{L}$ и $\bar{H}$.

Это возможно только в том случае, если центры окружностей $\bar{E}$ и $\bar{K}$ совпадут с точкой $\bar{B}$ пересечения прямых $\bar{L}$ и $\bar{H}$.

Таким образом, данное преобразование переводит прямую и окружность в пару концентрических окружностей.

Несложные вычисления позволяют найти радиусы окружностей $\bar{K}$ и $\bar{E}$:

$$r_1 = \frac{\sqrt{l^2-\rho^2}-(l-\rho)}{2\sqrt{l^2-\rho^2}\left[(l-\rho)+\sqrt{l^2-\rho^2}\right]}; \qquad r_2 = \frac{1}{2\sqrt{l^2-\rho^2}},$$

откуда

$$C = \frac{1}{2\ln\dfrac{\sqrt{l^2-\rho^2}+(l-\rho)}{\sqrt{l^2-\rho^2}-(l-\rho)}}.$$

6. Перейдем к двумерным задачам.

В качестве примера рассмотрим цилиндрический конденсатор, образованный двумя бесконечно длинными коаксиальными цилиндрами, на одном из которых равномерно распределен электрический заряд.

Очевидно, что решение задачи одинаково во всех плоскостях, параллельных плоскости нормального сечения цилиндра. Поэтому задачу можно рассматривать как плоскую и вместо полного заряда задавать заряд на единицу длины $\varkappa$.

Если внешний цилиндр радиуса r_2 заземлен, а на внутреннем — радиуса r_1 — задан заряд $\varkappa$, то потенциал поля в конденсаторе определяется выражением

$$\varphi = 2\varkappa \ln \frac{r_2}{r_1},$$

а емкость единицы длины цилиндрического конденсатора равна

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Рассмотренный пример позволяет решить более сложную задачу определения емкости провода, расположенного над проводящей плоскостью. Пусть над бесконечной плоскостью на расстоянии l от нее находится бесконечно длинный провод радиуса ρ, на котором распределен заряд с плотностью $\varkappa$ (заряд на единицу длины). Ясно, что и эта задача может решаться как двумерная.

III. Основная задача электроразведки

Для изучения неоднородности земной коры в целях разведки полезных ископаемых широко применяются электрические методы. Основная схема электроразведки постоянным током заключается в следующем. При помощи заземленных электродов в землю пропускается ток от питающей батареи. На поверхности земли измеряются напряжения созданного таким образом поля постоянного тока. При помощи наблюдений на поверхности определяют подземную структуру. Методы определения подземных структур (интерпретация наблюдений) базируются на математическом решении соответствующих задач.

Потенциал поля постоянного тока в однородной среде удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0 \quad (z > 0) \tag{1}$$

при дополнительном условии

$$\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

которое означает, что вертикальная составляющая плотности тока на («дневной») поверхности $z = 0$ равна нулю, так как полупространство $z < 0$ (воздух) непроводящее.

Рассмотрим точечный электрод на границе полупространства в точке A. Очевидно, что потенциал поля будет равен

$$V = \frac{I\rho}{2\pi R}, \tag{3}$$

где R — расстояние от источника A, ρ — удельное сопротивление среды, а I — сила тока. Эта функция отличается от функции источника в неограниченном пространстве коэффициентом 2 в силу условия (2).

Измеряя разность потенциалов в точках M и N, лежащих на одной прямой с A, при помощи измерительной цепи, получим:

$$V(M) - V(N) = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r,$$

где Δr — расстояние между точками N и M.

Предполагая, что точки M и N достаточно близки между собой, получим:

$$\frac{V(M) - V(N)}{\Delta r} \cong \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| \cong \frac{I\rho}{2\pi r^2},$$

где r — расстояние точки O (центра приемной цепи MN) от питающего электрода. Сила тока I в питающей цепи известна, так как регистрируется в течение хода работы. Отсюда для сопротивления однородного полупространства получим:

$$\rho = \frac{2\pi r^2}{I} \cdot \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|. \tag{4}$$

Если среда неоднородна, то величину ρ, определяемую по формуле (4), называют кажущимся сопротивлением и обозначают через ρ_k; ρ_k не будет постоянной величиной.

Рассмотрим задачу о вертикальном электрическом зондировании, когда слои земной коры залегают горизонтально и сопротивление их зависит только от глубины

$$\rho = \rho(z).$$

В этом случае кажущееся сопротивление будет функцией расстояния $r = AO$. Задача интерпретации результатов вертикальных электрических зондирований заключается в определении функции $\rho(z)$, дающей «электрический разрез» среды по известным значениям

$$\rho_k(r).$$

Рассмотрим подробнее задачу о двуслойной среде, когда однородный слой мощности l и сопротивления ρ_0 лежит на однородной среде с сопротивлением ρ_1,

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 \text{ при } 0 \leqslant z < l, \\ \rho_1 \text{ при } l < z. \end{cases}$$

Очевидно, что на небольших расстояниях $r \ll l$ кажущееся сопротивление ρ_k равно ρ_0, так как влияние подстилающей среды будет сказываться мало. Для больших расстояний ($r \gg l$) ρ_k будет равно ρ_1.

Задача сводится, таким образом, к нахождению решения уравнения Лапласа V_0 в слое $0 < z < l$ и V_1 в полупространстве $z > l$. При $z = l$ должны выполняться условия непрерывности потенциала

$$V_0|_{z=l} = V_1|_{z=l} \tag{5}$$

и непрерывности нормальных составляющих плотности тока

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial V_0}{\partial z}\Big|_{z=l} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial V_1}{\partial z}\Big|_{z=l}. \tag{6}$$

При $z = 0$ потенциал V_0 должен удовлетворять условию (2), а в точке A, которую мы выберем за начало цилиндрических координат (φ, r, z), потенциал V_0 должен иметь особенность типа (3)

$$V_0 = \frac{\rho_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}} + v_0, \tag{7}$$

где v_0 — ограниченная функция.

Функция V_1 должна быть ограниченной на бесконечности. Функции v_0 и V_1 удовлетворяют уравнению (1), которое в силу цилиндрической симметрии задачи приобретает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Метод разделения переменных дает для V два типа решений, ограниченных при $r = 0$:

$$e^{\pm \lambda z} J_0(\lambda r),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка (см. Дополнение, ч. I, § 1), а λ — параметр разделения. Будем искать решение в виде

$$V_0(r, z) = \frac{\rho_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + \int_0^\infty (A_0 e^{-\lambda z} + B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r)\, d\lambda,$$

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty (A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r)\, d\lambda,$$

где A_0, B_0, A_1, B_1 — некоторые постоянные. Условие (2) дает связь между A_0 и B_0. Вычислим

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = -\frac{\rho_0 I}{2\pi}\cdot\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}} + \int_0^\infty (-\lambda A_0 e^{-\lambda z} + \lambda B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r)\, d\lambda.$$

Условие (2) принимает вид

$$\int_0^\infty (B_0 - A_0) J_0(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda = 0$$

при произвольном r, откуда

$$B_0 = A_0.$$

Из условия ограниченности V_1 при $z \to \infty$ следует, что

$$B_1 = 0.$$

Таким образом,

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty A_1 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

и

$$V_0(r, z) = \int_0^\infty [qe^{-\lambda z} + A_0(e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})]\, J_0(\lambda r)\, d\lambda;$$

при этом мы воспользовались формулой

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda z}\, d\lambda \tag{8}$$

(см. Дополнение, ч. I, § 4) и обозначили $\frac{\rho_0 I}{2\pi} = q$.

Оставшиеся постоянные A_0 и A_1 определяются из условий (5) и (6) для $z = l$, которые сводятся к системе алгебраических уравнений:

$$A_0(e^{-2\lambda l} + 1) - A_1 e^{-2\lambda l} = -qe^{-2\lambda l},$$

$$\frac{1}{\rho_0} A_0(e^{-2\lambda l} - 1) - \frac{1}{\rho_1} A_1 e^{-2\lambda l} = -\frac{q}{\rho_0} e^{-2\lambda l},$$

откуда находится коэффициент

$$A_0 = q\, \frac{(\rho_1 - \rho_0)\, e^{-2\lambda l}}{(\rho_1 + \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0)\, e^{-2\lambda l}},$$

и решение V_0 для верхнего слоя дается формулой

$$V_0(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + \frac{ke^{-2\lambda l}}{1 - ke^{-2\lambda l}} (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \right] J_0(\lambda r)\, d\lambda, \tag{9}$$

где положено

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} = k.$$

Преобразуем полученное выражение. Так как $|k| < 1$, то можно записать:

$$\frac{ke^{-2\lambda l}}{1 - ke^{-2\lambda l}} = \sum_{n=1}^\infty k^n \cdot e^{-2\lambda l n}$$

и

$$V_0(r,\ z)=\frac{I\rho_0}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}k^n e^{-\lambda(2nl+z)}J_0(\lambda r)\,d\lambda+$$

$$+\frac{I\rho_0}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}k^n e^{-\lambda(2nl-z)}J_0(\lambda r)\,d\lambda. \qquad (9')$$

Отсюда, воспользовавшись формулой (8), получим:

$$V_0(r,\ z)=\frac{I\rho_0}{2\pi}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}k^n\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-2nl)^2}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}k^n\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+2nl)^2}}\Big). \qquad (10)$$

Это выражение для решении (9) может быть сразу написано, если решать задачу методом отражений. Полагая $z=0$, получаем распределение потенциала на поверхности земли

$$V_0(r,\ 0)=\frac{I\rho_0}{2\pi}\left[\frac{1}{r}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{\sqrt{r^2+(2nl)^2}}\right], \qquad (11)$$

откуда

$$\frac{\partial V_0}{\partial r}=-\frac{I\rho_0}{2\pi}\left[\frac{1}{r^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n r}{[r^2+(2nl)^2]^{3/2}}\right],$$

и для ρ_k по формуле (4) имеем:

$$\rho_k=\rho_0\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n r^3}{[r^2+(2nl)^2]^{3/2}}\right]=$$

$$=\rho_0\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n\left(\frac{\xi}{2}\right)^3}{\left[\left(\frac{\xi}{2}\right)^2+n^2\right]^{3/2}}\right]=\rho_0 f(\xi), \qquad (12)$$

где $\xi=\frac{r}{l}$, $f(\xi)$ обозначает выражение в квадратных скобках. При $r\ll l$ имеем

$$\rho_k\cong\rho_0.$$

Чтобы оценить поведение ρ_k при больших r, устремим в формуле (12) $r\to\infty$ $(\xi\to\infty)$. Предел n-го члена суммы будет равен k^n, откуда

следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\rho_k=\rho_0\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}k^n\right)=\rho_0\left(1+\frac{2k}{1-k}\right)=$$

$$=\rho_0\frac{1+k}{1-k}=\rho_0\frac{\rho_1+\rho_0+(\rho_1-\rho_0)}{\rho_1+\rho_0-(\rho_1-\rho_0)}=\rho_1.$$

Сравнивая экспериментальную кривую с кривой, определяемой формулой (12), мы можем определить ρ_0 по значениям ρ_k при малых значениях r, ρ_1 по значениям ρ_k при больших значениях r. Мощность верхнего проводящего слоя l определяется подбором. Она равна тому значению l, при котором эмпирическая кривая как функция $\rho(\xi)=\rho\left(\frac{r}{l}\right)$ наиболее близко совпадает с кривой, вычисляемой по формуле (12). На технике подбора, производимого с помощью билогарифмических масштабов, мы не будем останавливаться [1]).

В случае многослойных разрезов кривые для ρ_k вычисляются аналогично. Характер электрического разреза среды определяется при помощи подбора теоретической кривой, наиболее близко совпадающей с эмпирической. При увеличении числа слоев техника интерпретации весьма осложняется, так как число вспомогательных теоретических кривых сильно растет.

Отметим, что при различных электрических разрезах $\rho_1(z)\neq\rho_2(z)$ соответствующие кажущиеся сопротивления также различны

$$\rho_k^{(1)}(r)\neq\rho_k^{(2)}(r);$$

следовательно, задача об определении электрического разреза по кажущемуся сопротивлению с математической точки зрения имеет единственное решение [2]).

Задачи, аналогичные рассмотренной задаче электроразведки, встречаются в различных областях физики и техники.

С электростатическими задачами мы встречаемся при конструировании различных электронных приборов, с тепловыми и гидродинамическими — во многих областях техники (теплоотдача зданиями, фильтрация воды под плотиной и т. д.) [3]).

Задачи определения магнитного поля в неоднородной среде встречаются, например, в магнитной дефектоскопии. Для определения дефекта в детали, например наличия пустот под поверхностью, метал-

---

[1]) См., например, прекрасную книгу А. И. Заборовского «Электроразведка», 1943.

[2]) А. Н. Тихонов, О единственности решения задачи электроразведки, ДАН **69**, № 6, 1949, стр. 797.

[3]) Н. Н. Павловский, Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения, гл. XIV, 1922.

лическую деталь помещают между полюсами магнита и измеряют магнитное поле на поверхности детали. По возмущению магнитного поля требуется определить наличие дефекта, а также, если возможно, размеры дефекта, глубину его залегания и т. д.

Для решения задач широко используются методы моделирования, основанные на подобии потенциальных полей различной физической природы [1]).

В самом деле, рассмотрим потенциальные поля в неоднородных средах различной физической природы (например, стационарное поле температур, магнитное поле в неоднородной среде, электростатическое поле, поле скоростей жидкости при фильтрации). Потенциальные функции этих полей $u(x, y, z)$ в каждой однородной области удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. На границе областей G_1 и G_2 с различными коэффициентами теплопроводности, магнитной проницаемости и т. д. выполняется условие

$$k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n},$$

где k_1 и k_2 — соответствующие физические постоянные.

Пусть на границах равных геометрических областей заданы численно равные значения потенциалов или их нормальных производных различных физических полей. Предположим, что физические неоднородности этих областей геометрически равны и равно расположены; отношения физических постоянных (теплопроводностей, магнитных проницаемостей и т. д.) любой пары соответственных неоднородностей тоже равны. Тогда численные значения потенциалов этих полей во внутренних соответственных точках также равны, так как являются решением одной и той же математической задачи, имеющей единственное решение.

Непосредственные измерения температурного, магнитного и других полей значительно труднее, чем измерение поля стационарного тока в электролитической ванне. Поэтому целесообразно заменить непосредственные измерения этих полей измерениями в электролитической ванне, учитывая возможность изменять при этом масштабы.

IV. Определение векторных полей

Наряду со скалярными задачами во многих вопросах электродинамики и гидродинамики часто встречаются задачи об определении векторного поля по заданным ротору и дивергенции этого поля.

Докажем, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ однозначно определено внутри некоторой области G, ограниченной поверхностью S, если заданы

---

[1]) А. В. Лукьянов, Об электролитическом моделировании пространственных задач, ДАН **75**, № 5, 1950.

ротор и дивергенция поля внутри G:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = C, \tag{2}$$

а на границе S задана нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{A}$.

$$A_n|_S = f(M). \tag{3}$$

Отметим, что функции $\boldsymbol{B}$, C и f не могут быть заданы произвольно. Должны выполняться соотношения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

$$\int\int_S f(M)\, dS = \int\int\int_G C\, d\tau. \tag{5}$$

Функцию f будем считать непрерывной на поверхности S, функции $\boldsymbol{B}$ и C — непрерывными в G вместе со своими производными и поверхность S — такой, что для нее разрешима вторая внутренняя краевая задача при непрерывных граничных значениях.

Поставленную задачу будем решать в несколько этапов. Найдем вектор $\boldsymbol{A}_1$, удовлетворяющий условиям

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 = C. \tag{7}$$

Из соотношения (6) следует, что

$$\boldsymbol{A}_1 = \operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

Взяв функцию φ в виде

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int_G \frac{C(Q)}{r_{PQ}}\, d\tau_Q, \tag{9}$$

мы удовлетворим и уравнению (7). Определим теперь вектор $\boldsymbol{A}_2$ так, чтобы

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{B}, \tag{10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_2 = 0. \tag{11}$$

Положив

$$\boldsymbol{A}_2 = \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \tag{12}$$

мы удовлетворим уравнению (11), причем вектор $\boldsymbol{\psi}$ можно выбрать так, чтобы

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0. \tag{13}$$

Если условие (13) не выполнено, то, не нарушая условия (12), мы можем положить

$$\boldsymbol{\psi}^* = \boldsymbol{\psi} + \operatorname{grad} \chi, \tag{14}$$

где функция χ выбирается из условия $\operatorname{div}\psi^* = 0$, т. е.

$$\Delta\chi = -\operatorname{div}\psi. \tag{15}$$

Вернемся к определению вектора A_2. Из уравнений (10) и (12) следует, что

$$\Delta\psi = -B. \tag{16}$$

Поэтому, положив

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi}\int\int\int_{G}\frac{B(Q)}{r_{PQ}}d\tau_Q, \tag{17}$$

мы удовлетворим уравнению (10). Ясно, что вектор $A_1 + A_2$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{rot}(A_1 + A_2) = B, \tag{18}$$

$$\operatorname{div}(A_1 + A_2) = C. \tag{19}$$

Чтобы найти вектор A нам остается удовлетворить граничному условию (2). Для этого найдем вектор A_3, удовлетворяющий условиям внутри G:

$$\operatorname{rot} A_3 = 0, \tag{20}$$

$$\operatorname{div} A_3 = 0, \tag{21}$$

на S

$$A_n|_S = f(M) - A_{1n}|_S - A_{2n}|_S = f^*(M). \tag{22}$$

Ясно, что функция $f^*(M)$ определена однозначно. Из уравнения (20) следует, что

$$A_3 = \operatorname{grad}\theta.$$

Подставляя это значение A_3 в уравнение (21), получим внутри G:

$$\Delta\theta = 0; \tag{23}$$

условие (22) дает

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_S = f^*(M), \tag{24}$$

т. е. для определения функции θ мы получим вторую краевую задачу. Поэтому вектор A_3 определится однозначно.

Таким образом, доказано, что задача (1)—(3) имеет единственное решение

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

V. Применение метода конформного преобразования в электростатике

1. Для решения двумерных электростатических задач часто используется теория функций комплексного переменного. Рассмотрим, например, следующую задачу электростатики:

найти электрическое поле нескольких заряженных проводников, потенциалы которых равны $u_1, u_2, \ldots$

Такая задача, как известно (см. приложение II), приводит к уравнению

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u|_{S_i} = u_i, \tag{2}$$

где через S_i обозначена поверхность проводника с номером i. Если поле можно считать плоским, не меняющимся, например вдоль оси z, то уравнение (1) и граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{C_i} = u_i, \tag{4}$$

где C_i — контур, ограничивающий область S_i.

Будем искать потенциал u как мнимую часть некоторой аналитической функции

$$f(z) = v(x, y) + iu(x, y) \qquad (z = x + iy), \tag{5}$$

причем в силу условий Коши — Римана

$$v_x = u_y, \qquad v_y = -u_x \tag{6}$$

и

$$v_x v_y + u_x u_y = 0. \tag{7}$$

Из граничного условия (4) следует, что функция $f(z)$ имеет постоянную мнимую часть на контурах C_i, ограничивающих наши проводники.

Обращаясь к условию (6), замечаем, что

$$v(x, y) = \text{const} \tag{8}$$

представляет собой уравнение семейства силовых линий [1]), в то время как уравнение

$$u(x, y) = \text{const} \tag{9}$$

в силу условия (7) определяет семейство эквипотенциальных линий.

Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно найти конформное преобразование

$$w = f(z),$$

переводящее плоскость комплексного переменного

$$z = x + iy$$

---

[1]) В самом деле, уравнение силовых линий имеет вне $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$. Заменяя u_x и u_y согласно условиям (6) через $-v_y$ и v_x, получим $v_x\,dx + v_y\,dy = dv = 0$ или $v(x, y) = \text{const}$.

на плоскость

$$w = v + iu,$$

при котором границы проводников переходят в прямые

$$u = \text{const}$$

или

$$\operatorname{Im} w = \text{const}.$$

Если известна такая функция $w = f(z)$, то искомый потенциал находится по формуле

$$u = u(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Зная потенциал, можно вычислить электрическое поле

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{10}$$

и плотность поверхностных зарядов на единицу длины по оси z:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

которая в силу условий Коши — Римана равна

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}|f'(z)|. \tag{11}$$

2. Поле полубесконечного плоского конденсатора.

Найдем поле конденсатора, образованного бесконечно тонкими металлическими пластинами $y = -\frac{d}{2}$ и $y = \frac{d}{2}$, простирающимися в области $x < 0$. Не останавливаясь на выводе конформного преобразования, переводящего область, изображенную на рис. 71, в слой $|\operatorname{Im} w| \leqslant \pi$, мы применяем его непосредственно к решению указанной задачи [1]).

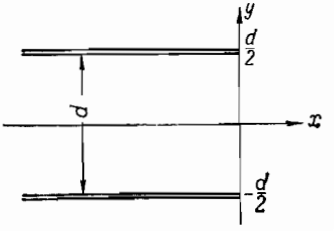


Рис. 71.

Преобразование

$$z = \frac{d}{2\pi}(w + e^w) \qquad (w = \varphi + i\psi) \tag{12}$$

переводит плоскость $z = x + iy$ с двумя разрезами $\left(y = \pm\frac{d}{2}, x < 0\right)$ в слой $|\psi| \leqslant \pi$ плоскости $w = \varphi + i\psi$ (рис. 72). В качестве комплекс-

[1]) См. Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, т. II, гл. XV, § 5, 1937.

ного потенциала выберем функцию

$$\frac{u_0}{2\pi} w, \tag{13}$$

где через u_0 обозначена разность потенциалов между пластинами конденсатора, так что потенциал электрического поля выражается функцией

$$u(x, y) = \frac{u_0}{2\pi} \psi, \tag{14}$$

где ψ связано с x и y соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d}{2\pi}(\varphi + e^{\varphi} \cos\psi), \\ y &= \frac{d}{2\pi}(\psi + e^{\varphi} \sin\psi). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

На рис. 73 изображены эквипотенциальные и силовые линии полубесконечного плоского конденсатора.

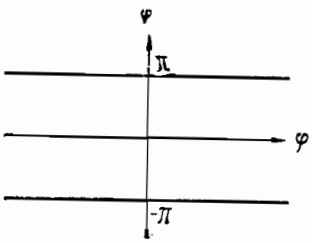


Рис. 72.

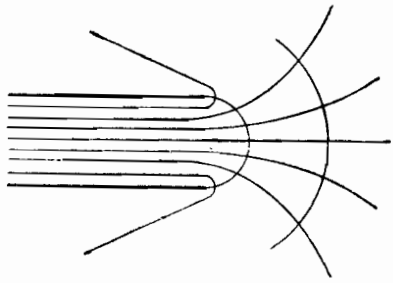


Рис. 73.

Перейдем к исследованию поля вблизи края конденсатора. Из формул (15) видно, что при $\varphi \to -\infty$

$$x \approx \frac{d}{2\pi}\varphi, \qquad y \approx \frac{d}{2\pi}\psi, \tag{16}$$

т. е. внутри конденсатора, далеко от краев, поле является плоским, а при $\varphi \to \infty$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \frac{d}{2\pi} e^{\varphi}, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \approx \psi, \tag{17}$$

т. е. вне конденсатора, на больших расстояниях от его краев, эквипотенциальные линии являются кругами.

Если вместо w ввести комплексный потенциал $f = \frac{u_0}{2\pi} w$, так что $w = \frac{2\pi}{u_0} f$, то связь между z и $f(z)$ задается уравнением

$$z = d\left(\frac{f}{u_0} + \frac{1}{2\pi} e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

откуда следует:

$$\frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0}\left(1 + e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

а при $f = \frac{u_0}{2\pi}(\varphi \pm \pi i)$ мы получаем:

$$\frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0}(1 - e^{\varphi}) \quad \text{или} \quad f'(z) = \frac{u_0}{d(1 - e^{\varphi})}.$$

Полагая $u_0 = 1$, мы получим для плотности зарядов σ согласно формуле (11) следующее значение:

$$\sigma = \frac{|f'(z)|}{4\pi} = \frac{1}{4\pi d\,|1 - e^{\varphi}|}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что при $\varphi \to -\infty$ $\sigma \approx \frac{1}{4\pi d}$, а при $\varphi \to +\infty$ $\sigma \approx \frac{1}{4\pi d e^{\varphi}}$, т. е. в этом случае плотность зарядов убывает на внешней стороне пластин как $\frac{1}{\rho}$.

Из формулы (18) видно, что при $\varphi = 0$ (на краю конденсатора) $\sigma = \infty$. В самом деле, край плоской пластины имеет бесконечную кривизну и для того, чтобы зарядить его до некоторого потенциала, необходимо поместить на него бесконечный заряд.

Круг задач, решаемых методом конформного преобразования, очень широк. С его помощью может быть успешно решен вопрос о влиянии края толстой стенки плоского конденсатора, ряд задач, относящихся к влиянию изгибов в конденсаторе и т. п. Конформное преобразование может быть также применено к расчету динамических задач. Недостатком изложенного метода является то, что конформное преобразование применяется в основном лишь к плоским задачам, сводящимся к двумерному уравнению $\Delta_2 u = 0$.

VI. Применение метода конформного преобразования в гидродинамике

1. При решении задач о движении твердого тела в жидкости существенную роль играют граничные условия на поверхности тела.

В случае идеальной жидкости граничное условие состоит в том, что проекция v_n скорости жидкости на направление нормали к поверхности тела должна равняться нормальной составляющей скорости движения тела.

Если тело неподвижно, то граничное условие принимает простой вид

$$v_n = 0$$

на поверхности тела.

Если рассматриваемое движение потенциально, т. е.

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

то граничные условия принимают вид

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = 0 \text{ в случае неподвижного тела,}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = u_n \text{ в случае тела, движущегося со скоростью } \boldsymbol{u}.$$

Как известно из гидродинамики, потенциал скоростей для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi = 0.$$

Таким образом, задача о потенциальном обтекании твердого тела потоком несжимаемой идеальной жидкости сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

с дополнительным граничным условием на поверхности обтекаемого тела

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = u_n,$$

т. е. к решению второй краевой задачи для уравнения Лапласа.

Если рассматриваемое движение плоское, то решение задачи может быть получено при помощи теории функций комплексного переменного.

В случае плоского движения несжимаемой жидкости уравнение непрерывности дает:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial (-v_y)}{\partial y}. \tag{1}$$

Запишем уравнения линий тока

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

в виде

$$v_x\, dy - v_y\, dx = 0 \tag{2}$$

и введем функцию ψ при помощи соотношений

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда из уравнения (1) следует, что левая часть выражения (2) является полным дифференциалом функции ψ:

$$v_x\, dy - v_y\, dx = d\psi.$$

Однопараметрическое семейство кривых

$$\psi(x, y) = C$$

представляет собой линии тока несжимаемой жидкости.

Если существует потенциал скоростей, то равенство $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ равносильно уравнению

$$\Delta\psi = 0.$$

Из выражения для v_x и v_y следует:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

т. е. функции φ и ψ удовлетворяют условиям Коши — Римана. Следовательно, функция комплексного переменного

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

является аналитической.

Итак, всякое потенциальное плоское движение жидкости соответствует определенной аналитической функции комплексного переменного и, обратно, всякая аналитическая функция связана с определенной кинематической картиной движения жидкости (точнее, с двумя картинами, так как функции φ и ψ можно поменять ролями).

Рассмотрим конкретные примеры применения теории аналитических функций к решению задач об обтекании тел плоским потоком жидкости.

2. Обтекание кругового цилиндра. Пусть на круговой цилиндр радиуса $r = a$ набегает плоский поток жидкости, имеющий на бесконечности постоянную скорости u. В случае стационарного движения задачу можно обратить и рассматривать движение цилиндра с постоянной скоростью u относительно жидкости.

Свяжем с цилиндром неподвижную систему координат и направим ось Ox параллельно скорости движения цилиндра.

На поверхности движущегося в жидкости тела, очевидно, выполняется граничное условие

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = u\frac{\partial y}{\partial s},$$

где ds — элемент дуги на контуре, ограничивающем тело.

В случае поступательного движения со скоростью u это условие может быть проинтегрировано по поверхности тела, и мы получим:

$$\psi = uy + C$$

на поверхности тела.

Итак, наша задача свелась к решению уравнения

$$\Delta\psi = 0$$

с граничными условиями:

1) $\psi = uy + C$ на поверхности цилиндра,

2) $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ стремятся к нулю на бесконечности.

Последнее условие означает, что функция

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_x - iv_y$$

является вне круга C однозначной аналитической функцией, обращающейся в нуль в бесконечно удаленной точке. Это позволяет представить функцию w в виде

$$w = C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{z^2} + \ldots$$

Положив

$$C_k = A_k + iB_k,$$

мы определим постоянные A_k и B_k из граничного условия

$$\psi = ua\sin\theta + C,$$

перейдя к полярным координатам $z = ae^{i\theta}$.

Для постоянных получаются выражения

$$A_1 = 0; \quad A_2 = ua^2; \quad B_2 = 0; \quad A_3 = B_3 = 0;$$

$$B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}.$$

Отсюда

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z - u\frac{a^2}{z};$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - u\cos\theta\frac{a^2}{r};$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + u\sin\theta\frac{a^2}{r}.$$

Первый член в выражении для w выражает циркуляцию вокруг цилиндра интенсивности Γ. В простейшем случае отсутствия циркуляции мы получим

$$w = -u\frac{a^2}{z}.$$

Комплексный потенциал для потока, обтекающего неподвижный цилиндр и имеющего на бесконечности скорость u, имеет вид

$$w = uz + \frac{ua^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$

3. Обтекание пластинки. Полученные результаты для обтекания кругового цилиндра позволяют решать задачи об обтекании произвольных контуров. При этом применяется метод конформного преобразования. Рассмотрим его применение на конкретной задаче об обтекании пластинки.

Пусть на бесконечно длинную пластинку ширины $2a$, расположенную на оси Ox (рис. 74), набегает постоянный плоский поток,

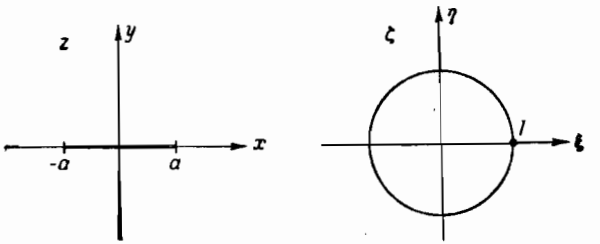


Рис. 74.

имеющий на бесконечности скорость с компонентами u и v. При помощи аналитической функции

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = f(\zeta)$$

можно установить взаимно однозначное соответствие между областью вне пластинки на плоскости z и областью вне круга единичного радиуса на плоскости ζ. При этом точке $z = \infty$ будет соответствовать точка $\zeta = \infty$, а

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{a}{2} > 0 \text{ при } \zeta = \infty.$$

Посмотрим, как изменится условие на бесконечности. Для комплексного потенциала

$$w(z) = \varphi + i\psi$$

мы имеем

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty} = u - iv = \bar{v}_\infty$$

— сопряженное значение комплексной скорости.

Найдем значение комплексной скорости фиктивного течения на плоскости ζ

$$w(\zeta) = w[f(z)]; \qquad \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta},$$

откуда

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = k\bar{v}_\infty \qquad \left(k = \frac{a}{2}\right).$$

Итак, фиктивное течение представляет собой обтекание цилиндра единичного радиуса потоком, имеющим на бесконечности комплексную

скорость kv_∞. Для такого движения комплексный потенциал имеет вид

$$w(\zeta) = k\bar{v}_\infty \zeta + \frac{kv_\infty}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta.$$

Из соотношения $z = f(\zeta)$ следует:

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}; \quad \frac{1}{\zeta} = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

Используя эти соотношения, мы получим для комплексного потенциала жидкости, обтекающей пластинку, выражение

$$w(z) = uz - iv\sqrt{z^2 - a^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}\right).$$

В случае отсутствия циркуляции это выражение принимает вид

$$w(z) = uz - iv\sqrt{z^2 - a^2}.$$

Из полученных соотношений видно, что скорость на концах пластинки достигает бесконечно больших значений. В реальных условиях это, конечно, не имеет места. Наши результаты объясняются тем, что мы считаем жидкость идеальной. Применяя теорему Бернулли, можно найти выражение для силы, действующей на обтекаемое жидкостью тело.

Изучением сил, с которыми воздух действует на движущееся в нем крыло самолета, занимается аэродинамическая теория крыла. В развитии этой теории исключительная роль принадлежит русским и советским ученым, в первую очередь Н. Е. Жуковскому и С. А. Чаплыгину. В простейшем случае бесциркулярного обтекания цилиндра плоским потоком жидкости мы получаем парадоксальный результат — поток не оказывает на цилиндр никакого действия. В случае наложения на поступательный поток циркуляции скорости вокруг цилиндра возникает сила, действующая на цилиндр перпендикулярно к направлению скорости потока в бесконечности.

Теория аналитических функций может быть использована лишь в случае плоского движения. В трехмерном случае приходится прибегать к другим методам решения задачи об обтекании жидкостью твердого тела. В общем случае решение задачи представляет большие трудности. Рассмотрим простейший случай движения шара в безграничной покоящейся жидкости с постоянной скоростью. Задача заключается в решении уравнения

$$\Delta\varphi = 0$$

с граничным условием

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{r=a} = u\cos\vartheta$$

на поверхности шара и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

в бесконечности.

Решение ищем в виде

$$\varphi=Au\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}.$$

Используя граничное условие, получим:

$$\varphi=-\frac{a^3ur}{2r^3},$$

что и дает решение поставленной задачи.

Во всех рассмотренных случаях мы считали жидкость идеальной. Для вязкой жидкости граничные условия изменяются. На поверхности тела должно выполняться условие прилипания, а именно: в точках твердой границы скорость жидкости по величине и направлению должна совпадать со скоростью соответствующей точки границы.

Задачи обтекания тел вязкой жидкостью приводят к большим математическим трудностям. В развитии этой области гидродинамики большую роль сыграли теории пограничного слоя.

VII. Бигармоническое уравнение

В приложении I к главе II было получено уравнение поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4u}{\partial x^4}=0. \tag{1}$$

Задача о колебании тонкой пластинки, свободной от нагрузки и закрепленной на краях, также приводит к аналогичному уравнению [1])

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+a^2\left(\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4u}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)=0 \quad\text{или}\quad \frac{\partial^2u}{\partial t^2}+a^2\Delta\,\Delta u=0 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u=0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ на границе.} \tag{3}$$

Кроме того, функция u должна удовлетворять начальным условиям

$$u(x,\ y,\ 0)=\varphi(x,\ y);\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ y,\ 0)=\psi(x,\ y). \tag{4}$$

Если на пластинку действует внешняя сила, распределенная с плотностью $f(x,\ y)$, то статический прогиб закрепленной по краям пла-

[1]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики. т. III, Гостехиздат, 1949.

стинки будет определяться из уравнения

$$\Delta\Delta u = f \tag{5}$$

при граничных условиях

$$u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \tag{3}$$

Уравнение

$$\Delta\Delta u = 0 \tag{5'}$$

называется *бигармоническим*, а его решения, имеющие производные до 4-го порядка включительно, называются *бигармоническими функциями*.

Основная краевая задача для бигармонического уравнения ставится следующим образом:

найти функцию $u(x, y)$, непрерывную вместе с первой производной в замкнутой области $S+C$, имеющую производные до 4-го порядка в S, удовлетворяющую уравнению (5) или (5′) внутри S и граничным условиям на C

$$u|_C = g(s); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h(s), \tag{6}$$

где $g(s)$ и $h(s)$ — непрерывные функции дуги s контура C.

При решении формулированной выше задачи (2)—(4) с начальными условиями методом разделения переменных полагают, как обычно,

$$u(x, y, t) = v(x, y)\,T(t). \tag{7}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2) и разделяя переменные, мы приходим к задаче об отыскании собственных значений уравнения

$$\Delta\Delta v - \lambda v = 0 \tag{8}$$

при граничных условиях

$$v = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C. \tag{9}$$

1. Единственность решения. Докажем, что бигармоническое уравнение

$$\Delta\Delta u = 0$$

при граничных условиях

$$u|_C = g(s), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h(s) \tag{3'}$$

имеет единственное решение.

Пусть существует два решения u_1 и u_2. Рассмотрим их разность

$$v = u_1 - u_2.$$

Функция v удовлетворяет бигармоническому уравнению (5) и однородным граничным условиям

$$v|_G = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_G = 0.$$

Применяя формулу Грина

$$\int_G (\Delta\varphi \cdot \psi - \varphi\,\Delta\psi)\,dS = \int_G \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) ds$$

к функциям $\varphi = v$, $\psi = \Delta v$, получаем:

$$\int_G (\Delta v)^2\,dS = 0,$$

откуда

$$\Delta v = 0.$$

Принимая во внимание, что $v|_G = 0$, получаем

$$v \equiv 0 \quad \text{и} \quad u_1 \equiv u_2.$$

Следовательно, бигармоническая функция однозначно определяется граничными условиями (3).

2. Представление бигармонических функций через гармонические функции. Докажем следующую теорему.

Если u_1 и u_2 — две гармонические в некоторой области G функции, то функция $u = xu_1 + u_2$ бигармонична в области G.

Для доказательства воспользуемся тождеством

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\,\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \tag{10}$$

Полагая

$$\varphi = x, \quad \psi = u_1,$$

найдем:

$$\Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{11}$$

Применяя еще раз оператор Δ, учитывая, что $\Delta\Delta u_2 = 0$, получим:

$$\Delta\Delta(xu_1 + u_2) = 0.$$

Если область G такова, что каждая прямая, параллельная оси x, пересекает ее границу не более чем в двух точках, то имеет место обратная теорема.

Для каждой заданной в области G бигармонической функции u найдутся такие гармонические функции u_1 и u_2, что

$$u = xu_1 + u_2.$$

Для доказательства этого утверждения, очевидно, достаточно установить возможность выбора функции u_1, удовлетворяющей двум условиям

$$\Delta u_1 = 0 \tag{12}$$

и

$$\Delta (u - xu_1) = 0. \tag{13}$$

Из условия (13) и формулы (11) следует:

$$\Delta u = \Delta (xu_1) = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{14}$$

Уравнению (14) удовлетворяет функция

$$\bar{u}_1 (x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2} \Delta u (\xi, y)\, d\xi.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{u}_1 = \Delta \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_1 = \frac{1}{2} \Delta \Delta u = 0,$$

то $\Delta \bar{u}_1$ зависит только от y:

$$\Delta \bar{u}_1 = v (y).$$

Определим функцию $\bar{\bar{u}}_1 (y)$ так, чтобы

$$\Delta \bar{\bar{u}}_1 = \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_1}{\partial y^2} = - v (y),$$

и положим

$$u_1 = \bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1.$$

Эта функция, очевидно, будет удовлетворять обоим условиям (12) и (13).

Рассмотрим другой вид представления бигармонических функций. Допустим, что начало координат выбрано внутри области G и что любой луч, выходящий из начала, пересекает границу области G, в одной точке. Тогда любая бигармоническая в G функция u может быть представлена с помощью двух гармонических функций u_1 и u_2 в виде

$$u = (r^2 - r_0^2) u_1 + u_2. \tag{15}$$

Здесь $r^2 = x^2 + y^2$, а r_0 — заданная постоянная.

Это доказывается аналогично предыдущему с помощью тождества (10) и соотношений

$$\Delta r^2 = 4; \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}.$$

3. Решение бигармонического уравнения для круга. Рассмотрим круг радиуса r_0 с центром в начале координат и будем искать бигармоническую функцию, удовлетворяющую при $r = r_0$ граничным условиям (6). Как было указано выше, искомую функцию можно представить в виде суммы

$$u = (r^2 - r_0^2)\, u_1 + u_2, \tag{15}$$

где u_1 и u_2 — гармонические функции. Из граничных условий находим:

$$u_2|_{r=r_0} = g. \tag{16}$$

Отсюда видно, что u_2 есть решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа и может быть представлено с помощью интеграла Пуассона

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)\, g\, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \tag{17}$$

Из второго граничного условия получаем:

$$2r_0 u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = h. \tag{18}$$

Нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, что функция

$$2r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r} \tag{19}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому может быть выражена интегралом Пуассона

$$2r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)\, h\, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \tag{20}$$

Продифференцировав (17) по r и подставляя значение $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ в формулу (20), найдем u_1. Заменяя в формуле (15) u_1 и u_2 их выражениями, получим:

$$u = \frac{1}{2\pi r_0} (r^2 - r_0^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-h\, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{g\,[r_0 - r\cos(\alpha - \theta)]\, d\alpha}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)]^2} \right].$$

ГЛАВА V

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Задача с начальными условиями. Метод усреднения

1. Метод усреднения. В настоящем параграфе мы будем рассматривать уравнение колебаний в пространстве

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f \tag{1}$$

и искать его решение при следующих начальных условиях:

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ y,\ z,\ 0) &= \varphi(x,\ y,\ z),\\ u_t(x,\ y,\ z,\ 0) &= \psi(x,\ y,\ z). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эта задача имеет фундаментальное значение в теории распространения звука, в теории распространения электромагнитных полей и в ряде других областей физики. В настоящем пункте для простоты будем считать $f = 0$.

Для определения функции u в некоторой точке M_0 введем новую функцию

$$\bar{u}(r,\ t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S_r^{M_0}}\int u\, dS = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_r^{M_0}}\int u\, d\Omega, \tag{3}$$

где $S_r^{M_0}$ — сфера вокруг точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ радиуса r, а $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$ — элемент телесного угла, соответствующий dS. Очевидно, $\bar{u}(r, t)$ является средним значением функции u на сфере $S_r^{M_0}$ радиуса r с центром в M_0. Отметим сразу же, что

$$u(M_0,\ t_0) = \bar{u}(0,\ t_0).$$

Покажем, что функция $\bar{u}$ удовлетворяет однородному уравнению (1). Оператор Лапласа Δu в сферической системе координат равен

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Поскольку $\bar{u}$ не зависит от θ и φ, то должно удовлетворяться уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}=0.$$

Докажем это. Интегрирование (1) без правой части по объему $T_r^{M_0}$, ограниченному сферой $S_r^{M_0}$, дает:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_{T_r^{M_0}} u\,d\tau=\iiint\limits_{T_r^{M_0}}\Delta u\,d\tau=\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS.$$

Учитывая, что нормаль к $S_r^{M_0}$ направлена по радиусу и что элемент поверхности равен $dS=r^2\,d\Omega$, находим:

$$\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial r}r^2\,d\Omega=r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\iint\limits_{S_r^{M_0}} u\,d\Omega\right].$$

Отсюда, заменяя в левой части элемент интеграла его выражением $d\tau=r^2\,dr\,d\Omega$, получаем:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^r r'^2dr'\left[\iint\limits_{S_r^{M_0}} u\,d\Omega\right]=r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\iint\limits_{S_r^{M_0}} u\,d\Omega\right].$$

Дифференцированием последнего равенства по r и делением его на r^2 убеждаемся, что для $\bar{u}$ справедливо уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right).$$

Отметим следующее свойство оператора Лапласа: для всякой функции $U=U(r,\,t)$, не зависящей от φ и θ, оператор Лапласа принимает вид:

$$\Delta U=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2}.$$

Пользуясь этим свойством оператора Лапласа, нетрудно видеть, что для всякого сферически симметричного решения $\bar{u}$ уравнения колебаний в пространстве подстановка $v=r\bar{u}$ приводит к одномерному уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v=r\bar{u}=f_1\left(t-\frac{r}{a}\right)+f_2\left(t+\frac{r}{a}\right).$$

При $r=0$ в силу ограниченности $\bar{u}$ находим, что

$$0=f_1(t)+f_2(t) \quad \text{или} \quad f_1(t)=-f_2(t)=-f(t)$$

для любого значения t, т. е.

$$v=r\bar{u}=f\left(t+\frac{r}{a}\right)-f\left(t-\frac{r}{a}\right).$$

Дифференцирование последней формулы по r дает:

$$\bar{u}+r\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}=\frac{1}{a}\left[f'\left(t-\frac{r}{a}\right)+f'\left(t+\frac{r}{a}\right)\right],$$

откуда при $r=0$ и $t=t_0$ следует:

$$\bar{u}(0,\ t_0)=u(M_0,\ t_0)=\frac{2}{a}f'(t_0).$$

Для решения исходной задачи с начальными условиями нам остается выразить функцию $f(t)$ через начальные функции φ и ψ. Складывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})=\frac{1}{a}\left[f'\left(t-\frac{r}{a}\right)+f'\left(t+\frac{r}{a}\right)\right],$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u})=\frac{1}{a}\left[-f'\left(t-\frac{r}{a}\right)+f'\left(t+\frac{r}{a}\right)\right],$$

находим:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u})=\frac{2}{a}f'\left(t+\frac{r}{a}\right).$$

Полагая $t=0$ и $r=at_0$, получаем:

$$u(M_0,\ t_0)=\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u})\right]_{r=at_0,\ t=0}$$

или после замены $\bar{u}$ его значением

$$u(M_0,\ t_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_{S_r^{M_0}}\int ru\,d\Omega+\frac{1}{a}\int\limits_{S_r^{M_0}}\int r\frac{\partial u}{\partial t}\,d\Omega\right]_{r=at_0,\ t=0}.$$

Подставляя сюда заданные начальные значения и опуская индексы 0 при M_0, t_0, приходим к следующей формуле:

$$u(M,\ t)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{at}^{M}}\int\frac{\varphi}{r}\,dS+\int\limits_{S_{at}^{M}}\int\frac{\psi}{r}\,dS\right], \tag{4}$$

называемой обычно *формулой Пуассона*. Эта формула получена в предположении существования решения задачи. Тем самым приведенные выше рассуждения доказывают единственность решения (ср. гл. II, § 2). Непосредственной проверкой можно убедиться, что эта формула при весьма общих предположениях относительно φ и ψ дает решение задачи.

2. Метод спуска. Полученная в предыдущем пункте формула (4) решает в пространстве (x, y, z) однородное уравнение колебаний с начальными условиями, являющимися, вообще говоря, произвольными функциями переменных x, y и z. Если начальные функции φ и ψ не зависят от z, то, очевидно, и функция u, даваемая формулой (4), также не будет зависеть от переменного z. Следовательно, эта функция будет удовлетворять уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

и начальным условиям

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$
$$u_t(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

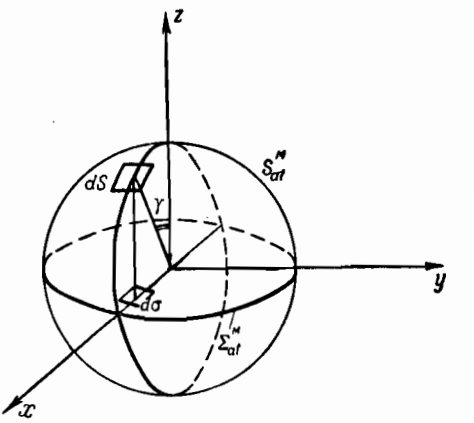


Рис. 75.

Таким образом, формула, дающая решение пространственной задачи, позволяет также решить задачу для плоскости.

В формуле (4) интегрирование происходит по сфере S^M_{at}. В силу независимости начальных данных от z интегрирование по верхней полусфере можно заменить интегрированием по кругу Σ^M_{at}, получающемуся при пересечении сферы S^M_{at} с плоскостью x, y (рис. 75). Элемент поверхности dS связан с элементом плоскости $d\sigma$ соотношением

$$d\sigma = dS \cos\gamma,$$

где

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}}{at} = \frac{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}.$$

То же относится к интегрированию по нижней полусфере; следовательно, интеграл по кругу следует взять дважды.

В результате мы приходим к формуле

$$u(M, t) = u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma^M_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{\Sigma^M_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\right], \quad (5)$$

в которой интегрирование производится по внутренности круга радиуса at с центром в точке (x, y).

Аналогично, если начальные функции φ и ψ зависят только от одного переменного x, то формула (4) позволяет найти функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Для этого введем сферическую систему координат, направив полярную ось по оси x. Элемент поверхности dS выразится следующим образом:

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = -r \, d\varphi \, d\xi,$$

так как

$$\xi = r\cos\theta, \quad d\xi = -r\sin\theta \, d\theta.$$

Интегрируя в формуле Пуассона (4) по φ, получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\, d\xi + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi\right].$$

Выполняя в первом интеграле дифференцирование по t, приходим к известной из главы II, § 2 формуле Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \qquad (6)$$

Уравнения колебаний с тремя, двумя и, соответственно, одним пространственным аргументом часто называют уравнениями сферических, цилиндрических и плоских волн. Эта терминология вполне соответствует примененному выше методу, называемому *методом спуска*, поскольку при решении уравнения колебаний на плоскости и на прямой мы исходили из пространственной задачи, как бы «спускаясь» к меньшему числу переменных. Полученные решения для двух и одного переменного носят характер цилиндрических и плоских волн.

Метод спуска применим не только к уравнению колебания, но и к другим типам уравнений и позволяет в ряде случаев из формулы, определяющей решение уравнения для многих переменных, извлечь решение задачи для уравнения с меньшим числом независимых переменных.

3. Физическая интерпретация. Формулы (4) и (5) дают возможность выяснить физическую картину распространения сферических и цилиндрических волн. Начнем со случая трех переменных, для которого физический характер процесса распространения существенно отличается, как мы увидим из дальнейшего, от случая двух пространственных переменных.

Ограничимся изучением распространения локального возмущения, когда начальное состояние (функции $\varphi > 0$ и $\psi > 0$) отлично от нуля только в некоторой ограниченной области T_0. Рассмотрим сначала изменение состояния $u(M_0, t)$ в точке M_0, лежащей вне области T_0. Состояние u в точке M_0 в момент времени t определяется в силу (4) начальным состоянием в точках, лежащих на сфере $S_{at}^{M_0}$ радиуса at с центром в M_0. Функция $u(M_0, t)$ отлична от нуля только в том случае, если сфера $S_{at}^{M_0}$ пересекает область начальных значений T_0. Пусть d и D — расстояния от точки M_0 до ближайшей и наиболее удаленной точек области T_0 (рис. 76). Очевидно, если t достаточно мало $\left(t < t_1 = \frac{d}{a}\right)$, то сфера $S_{at}^{M_0}$ не пересекается с областью T_0, поверхностные интегралы в формуле (4) равны нулю: до точки M_0 возмущение еще не дошло.

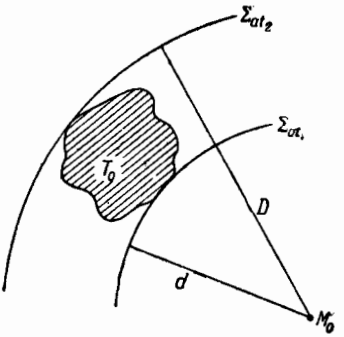


Рис. 76.

Начиная с момента $t_1 = \frac{d}{a}$, до момента $t_2 = \frac{D}{a}$ сфера $S_{at}^{M_0}(t_1 < t < t_2)$ будет пересекать область T_0; поверхностные интегралы в формуле (4), вообще говоря, отличны от нуля: точка M_0 находится в возбужденном состоянии. При дальнейшем увеличении t сфера $S_{at}^{M_0}$ будет содержать область T_0 внутри себя, поверхностные интегралы равны нулю: возмущение прошло точку M_0. Таким образом, при распространении локального возмущения в трехмерном пространстве явление последействия отсутствует.

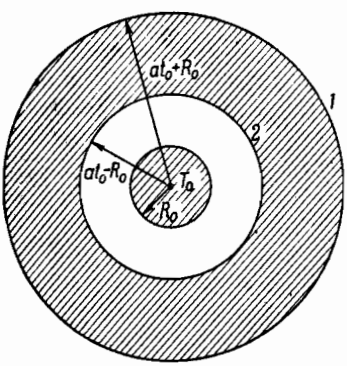


Рис. 77.

Рассмотрим теперь мгновенную пространственную картину возмущения $u(M, t_0)$ в некоторый момент t_0. Точки M, находящиеся в возбужденном состоянии, характеризуются тем, что сферы $S_{at_0}^{M}$ пересекают область начальных возмущений T_0. Иными словами, это означает, что геометрическое место точек W, в которых возмущение отлично от нуля, состоит из точек M, находящихся на сферах $S_{at_0}^{P}$ радиуса at_0 с центрами в точках P области T_0. Огибающие семейства сфер $S_{at_0}^{P}$ будут границами области W. Внешняя огибающая называется передним фронтом, внутренняя — задним фронтом распространяющейся волны. На рис. 77 изображены передний и

задний фронты волны (*1* и *2*) для того случая, когда область T_0 является сферой радиуса R_0.

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке M_0 пространства действие, локализованное во времени; при этом имеет место распространение волны с резко очерченными передним и задним фронтами (*принцип Гюйгенса*).

Перейдем к случаю двух переменных. Пусть начальное возмущение задано в области S_0 на плоскости x, y. Рассмотрим изменение состояния $u(M_0, t)$ в точке M_0, лежащей вне S_0. Состояние $u(M_0, t)$ в точке M_0 в момент t определяется согласно (5) начальными значениями в точках P, принадлежащих кругу $\Sigma_{at_0}^{M_0}$ радиуса at_0 с центром в M_0. Для моментов времени $t < t_1 = \frac{d}{a}$ (d — расстояние от M_0 до ближайшей точки области S_0) функция $u(M_0, t) = 0$ — до точки M_0 возмущение еще не дошло. Если $t > t_1$, то $u(M_0, t) \neq 0$. Это значит, что, начиная с момента $t = t_1$, в точке M_0 возникает возмущение, которое сначала, вообще говоря, возрастает, а затем, начиная с некоторого момента, убывает до нуля (при $t \to \infty$). В этом явлении последействия и заключается отличие плоского случая от пространственного. Влияние начальных возмущений, локализованных на плоскости, не локализовано во времени и характеризуется длительно продолжающимся последействием. Принцип Гюйгенса не имеет места.

Мгновенная картина возмущений на плоскости имеет резко очерченный передний фронт, но не имеет заднего фронта. Задачу для двух измерений можно рассматривать как пространственную задачу, когда начальные возмущения заданы в бесконечном цилиндре и не зависят от третьей координаты. Пользуясь этой схемой, легко себе представить процесс последействия.

4. Метод отражения. Задача с начальными условиями для уравнения колебаний в случае областей, ограниченных плоскостями, может быть решена методом отражений.

Рассмотрим задачу для полупространства $z > 0$.

Найти решение уравнения колебаний

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= \varphi(x, y, z), \\ u_t(x, y, z, 0) &= \psi(x, y, z) \end{aligned}\right\} \quad (z \geqslant 0)$$

и граничному условию

$$u\Big|_{z=0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0.$$

Решение этой задачи дается формулой (4), если начальные условия продолжить на все пространство нечетно (при $u|_{z=0}=0$)

$$\varphi(x, y, z)=-\varphi(x, y, -z);\quad \psi(x, y, z)=-\psi(x, y, -z)$$

или четно $\left(\text{при } \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0\right)$

$$\varphi(x, y, z)=\varphi(x, y, -z);\quad \psi(x, y, z)=\psi(x, y, -z).$$

Проверим, что при нечетном продолжении функций φ и ψ граничное условие $u|_{z=0}=0$ выполняется автоматически. В самом деле,

$$u(P, t)=u(x, y, 0, t)=$$
$$=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{at}^P}\int \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{at}\,ds+\int\limits_{S_{at}^P}\int \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{dt}\,ds\right]=0,$$

так как поверхностные интегралы по сферам с центрами в точках плоскости $z=0$ равны нулю при нечетных функциях φ и ψ.

Аналогично может быть решена задача для плоского слоя $0\leqslant z\leqslant l$ при граничных условиях первого и второго рода

$$u=0 \quad \text{при} \quad z=0 \quad \text{и} \quad z=l$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad z=0 \quad \text{и} \quad z=l$$

и соответствующих начальных условиях.

Формула (4) сразу же дает решение задачи, если начальные условия продолжить нечетно (или четно) относительно плоскостей $z=0$ и $z=l$. Определяемые таким образом начальные функции φ и ψ будут периодическими по переменному z с периодом $2l$.

Если в слое $0<z<l$ начальные функции φ и ψ являются локальными функциями, отличными от нуля в области T_0, то продолженные функции будут отличны от нуля в ряде областей T_n, получающихся из T_0 при помощи зеркальных изображений. Функция $u(M, t)$ для всякого M и t представляется как сумма конечного числа слагаемых, определяемых возмущениями в T_n (ср. с главой II, § 2, п. 5). Физический смысл этого заключается в том, что за конечный промежуток времени происходит конечное число отражений от стенок $z=0$ и $z=l$. Аналогично может быть решена задача для параллелепипеда.

§ 2. Интегральная формула

1. Вывод интегральной формулы. При решении уравнения колебания струны

$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=-f$$

методом распространяющихся волн мы широко пользовались понятием

характеристического угла. Переходя к решению уравнения колебания на плоскости или в пространстве

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f, \tag{1}$$

рассмотрим поверхность

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = |t - t_0|,$$

называемую *характеристическим конусом* для точки M_0 и момента t_0. Совокупность точек «фазового» пространства (M, t), в которые приходит сигнал, распространяющийся со скоростью a и вышедший из точки M_0 в момент t_0, определяется уравнением

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t - t_0 \quad (t > t_0)$$

и является верхней полостью характеристического конуса точки M_0. Аналогично сигнал, вышедший из точки M в момент t, приходит в точку M_0 в момент t_0, если

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t_0 - t \quad (t < t_0).$$

Геометрическое место таких точек (M, t) образует нижнюю полость характеристического конуса (рис. 78).

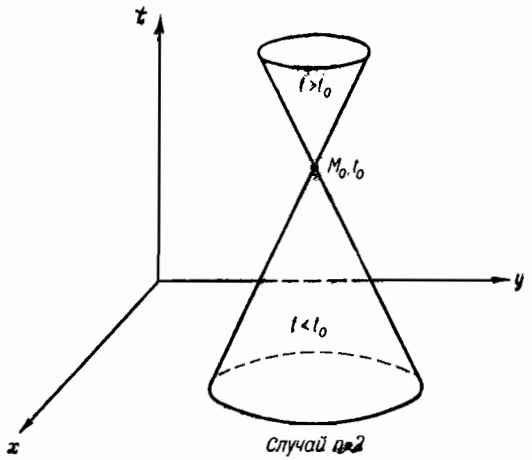


Рис. 78.

Для определения в точке (M_0, t_0) функции $u(M, t)$, представляющей решение уравнения (1), введем вместо времени t локальное время t^* точки M_0, полагая

$$t^* = t - \left(t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$$

и оставляя при этом неизменными геометрические координаты. Пользуясь сферической системой координат (r, θ, φ), связанной с точкой M_0, мы приходим к новой системе переменных

$$r^* = r, \quad \theta^* = \theta, \quad \varphi^* = \varphi, \quad t^* = t - \left(t_0 - \frac{r}{a}\right).$$

Установим уравнение, которому удовлетворяет функция

$$u(r, \theta, \varphi, t) = u\left(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^* + t_0 - \frac{r}{a}\right) = U(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*).$$

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Выразим производные функции u через производные новой функции U:

$$u_r = U_{r^*} + \frac{1}{a}U_{t^*},$$

$$u_{rr} = U_{r^*r^*} + \frac{2}{a}U_{r^*t^*} + \frac{1}{a^2}U_{t^*t^*},$$

$$u_\theta = U_{\theta^*}; \quad u_{\theta\theta} = U_{\theta^*\theta^*},$$

$$u_\varphi = U_{\varphi^*}; \quad u_{\varphi\varphi} = U_{\varphi^*\varphi^*},$$

$$u_t = U_{t^*}; \quad u_{tt} = U_{t^*t^*}.$$

Уравнение (1) переходит в уравнение

$$\Delta U = -\frac{2}{ar^*}\frac{\partial}{\partial r^*}(r^* U_{t^*}) - F(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*), \tag{2}$$

где

$$F(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*) = f(r, \theta, \varphi, t).$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит некоторому телу T, ограниченному поверхностью S. Рассматривая (2) как неоднородное уравнение Лапласа, в котором t^* играет роль параметра, воспользуемся основной формулой Грина (глава IV). Применим ее к области T, полагая при этом $t^* = 0$ [1]):

$$4\pi U(M_0, 0) = \int_S\int\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS + \\ + \int_T\int\int\frac{2}{ar^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right)d\tau + \int_T\int\int\frac{F}{r^*}d\tau.$$

Точка M_0 является особой точкой сферической системы координат. Поэтому объемные интегралы естественно рассматривать как пределы

[1]) В силу принятого в главе IV условия знаки в формуле соответствуют внешней нормали.

при $\varepsilon \to 0$ соответствующих интегралов, взятых по объему $T - T_\varepsilon$, где T_ε — шар радиуса ε с центром в точке M_0. Преобразуем объемный интеграл

$$I_\varepsilon = \int\int_{T-T_\varepsilon}\int \frac{2}{ar^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau =$$

$$= \int\int_{T-T_\varepsilon}\int \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*}\right) \sin\theta^*\, dr^*\, d\theta^*\, d\varphi^*.$$

Интегрируя по переменному r^*, получим:

$$I_\varepsilon = \int_S\int \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} \cos(\widehat{n, r^*})\, dS - \int_{S_\varepsilon}\int \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} dS,$$

так как

$$dS_n = dS \cos(\widehat{n, r^*}) = r^{*2} \sin\theta^*\, d\theta^*\, d\varphi^*.$$

Второе слагаемое в I_ε стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, так как площадь поверхности S_ε равна $4\pi\varepsilon^2$. Таким образом, предел I_ε при $\varepsilon \to 0$ равен

$$I_0 = \int\int_T\int \frac{2}{ar^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau = \int_S\int \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{dr^*}{dn} dS\ ^{1}),$$

так как

$$\cos(\widehat{n, r^*}) = \frac{dr^*}{dn},$$

что дает:

$$4\pi U(M_0, 0) =$$

$$= \int_S\int \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right) + \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{dr^*}{dn}\right) dS + \int_T\int\int \frac{F}{r^*} d\tau.$$

Вернемся к старым переменным и функции u:

$$u(M, t) = U(M, t^*) \quad \left(t = t^* + t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}\right),$$

так что

$$U(M_0, 0) = u(M_0, t_0),$$

а также

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{dr}{dn}.$$

---

[1]) При этом преобразовании мы пользуемся тем, что $d\tau = (r^*)^2\, d\Omega\, dr$, интегрируем по r^* и затем заменяем $d\Omega = \frac{dS}{(r^*)^2}$.

В результате для функции $u(M_0, t_0)$ получаем следующую *интегральную формулу*:

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{ar}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{dr}{dn}\right\} dS_M + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_T\int\int \frac{[f]}{r}\, d\tau_M, \quad (3)$$

часто называемую формулой Кирхгоффа[1]). Здесь квадратные скобки показывают, что значение функций надо брать для $t^* = 0$, т. е. при $t = t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}$, так что $[f] = f\left(M, t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$.

2. Следствия из интегральной формулы. Формула (3) находит свое применение при решении целого ряда задач. В качестве первого примера рассмотрим задачу с начальными данными: найти решение уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

в неограниченном пространстве, если заданы начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

Нижняя полость характеристического «конуса» $r = a(t_0 - t)$ точки M_0, t_0 пересекается с многообразием $t = 0$ по сфере $S_{at_0}^{M_0}(r = at_0)$ радиуса at_0 с центром в точке M_0. Воспользуемся формулой (3), полагая в ней $S = S_{at_0}^{M_0}$. Для любой функции $v(M, t)$ значения $[v]$ на сфере $S_{at_0}^{M_0}$ имеют вид

$$[v] = v\left(M, t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}\right) = v(M, 0).$$

Поэтому

$$[u]_{S_{at_0}^{M_0}} = u(M_0, 0) = \varphi(M_0),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{S_{at_0}^{M_0}} = \frac{\partial u}{\partial t}(M_0, 0) = \psi(M_0),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{S_{at_0}^{M_0}} = \frac{\partial u}{\partial r}(M_0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(M_0).$$

---

[1]) Формула Кирхгоффа была обобщена С. Л. Соболевым для уравнения гиперболического типа с четным числом переменных. При помощи этой формулы Кирхгоффа — Соболева может быть построено решение задачи с начальными условиями для указанного уравнения (С. Л. Соболев, ДАН СССР, 1933).

Далее

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi).$$

Подставляя это выражение в (3), находим:

$$u(M_0,\ t_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_{at_0}^{M_0}}\int\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)+\frac{1}{ar}\psi\right\}dS=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_{S_{at_0}^{M_0}}\int r\varphi\,d\Omega+\frac{1}{a}\int\limits_{S_{at_0}^{M_0}}\int r\psi\,d\Omega\right]_{r=at_0}, \tag{4}$$

откуда, опуская индексы 0 при M_0 и t_0, получаем формулу Пуассона

$$u(M,\ t)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{at}^{M}}\int\frac{\varphi}{r}\,dS+\int\limits_{S_{at}^{M}}\int\frac{\psi}{r}\,dS\right].$$

В качестве второго примера рассмотрим теперь решение неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными данными. Выбирая попрежнему $S=S_{at_0}^{M_0}$, убеждаемся в том, что поверхностный интеграл в (3) обращается в нуль, вследствие чего получаем:

$$u(M_0,\ t_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{T_{at_0}^{M_0}}\int\int\frac{[f]}{r}\,d\tau_M, \tag{5}$$

где $T_{at_0}^{M_0}$ — шар радиуса at_0 с центром в M_0. Исследуем подробнее тот случай, когда правая часть является периодической функцией времени

$$f(M,\ t)=f_0(M)\,e^{i\omega t},$$

где ω — заданная частота колебаний. Из (5) находим:

$$u(M_0,\ t_0)=e^{i\omega t_0}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{T_{at_0}^{M_0}}\int\int f_0(M)\frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}}\,d\tau_M\qquad\left(k=\frac{\omega}{a}\right). \tag{6}$$

Пусть $f_0(M)$ — локальная функция, т. е. функция, отличная от нуля только внутри некоторой области T. Если M_0 лежит вне области T и расстояние от M_0 до ближайшей точки области T равно d, то интеграл по T_{at_0} равен нулю для $t_0<\frac{d}{a}$. Для таких значений возмущение не успевает дойти до точки M_0. Если расстояние от M_0 до наиболее удаленной точки области T равно D, то для моментов

$t_0 > \frac{D}{a}$ интеграл в правой части постоянен и сводится к интегралу, распространенному по всей области T. Таким образом, во всякой точке M_0, начиная с момента $t_0 = \frac{D}{a}$, имеют место периодические колебания с амплитудой

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_T \int \int f_0(M) \frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} d\tau_M, \tag{7}$$

так что

$$u(M_0,\ t_0) = v(M_0)\, e^{i\omega t_0}.$$

Прямая подстановка выражения (6) для u $\left(\text{при } t_0 > \frac{D}{a}\right)$ в уравнение колебаний показывает, что функция $v(M)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta v + k^2 v = -f_0(M) \quad \left(k > \frac{\omega}{a}\right), \tag{8}$$

которое мы будем в дальнейшем называть *волновым уравнением* (см. главу VII).

Рассмотрим формулу (3) для случая установившихся колебаний, когда

$$u(M,\ t) = v(M)\, e^{i\omega t},$$

где $v(M)$ — амплитуда колебаний, удовлетворяющая волновому уравнению (8).

В этом случае имеем:

$$[u] = u\left(M,\ t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right) = v(M)\, e^{i(\omega t - kr)},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \frac{\partial v}{\partial n} e^{i(\omega t - kr)},$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\right] = ikv(M)\, e^{i(\omega t - kr)},$$

$$[f] = f_0(M)\, e^{i(\omega t - kr)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3), приходим к интегральной формуле для волнового уравнения

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right] dS_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_T \int \int f_0(M) \frac{e^{-ikr}}{r} d\tau_M \qquad (r = r_{MM_0}), \tag{9}$$

которая часто также называется формулой Кирхгоффа.

При $k = 0$ ($\omega = 0$ — статический случай) формула (9) переходит в основную формулу Грина (гл. IV, § 2) для неоднородного уравнения Лапласа.

§ 3. Колебания ограниченных объемов

1. Общая схема метода разделения переменных. Стоячие волны. Задача о колебании ограниченных объемов состоит в следующем: найти решение уравнения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - q(M)\, u = \rho(M)\, u_{tt}, \tag{1}$$

$M = M(x, y, z)$, внутри некоторого объема T, ограниченного замкнутой поверхностью S, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= \varphi(M), \\ u_t(M, 0) &= \psi(M) \end{aligned}\right\} \quad \text{внутри } T, \tag{2}$$

$$u|_S = 0 \qquad \text{для } t > 0. \tag{3}$$

В случае однородной среды ($k = \text{const}$, $\rho = \text{const}$) для $q = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f \quad \left(a^2 = \frac{k}{\rho}; \quad f = \frac{F}{k}\right).$$

С задачами подобного типа мы встречаемся при изучении процесса колебаний мембраны (случай двух независимых геометрических переменных), акустических колебаний газа, электромагнитных процессов в непроводящих средах. Особое значение представляют задачи, связанные с генерацией электромагнитных колебаний в замкнутых полых резонаторах (эндовибраторы, клистроны, магнетроны и т. д.).

Заметим, что однородность граничного условия (3) не связана с ограничением общности. В самом деле, случай

$$u|_S = \mu, \tag{3'}$$

где μ — произвольная функция точки P поверхности S и времени t, легко сводится к случаю однородного граничного условия методом, который изложен в § 3 главы II для одного переменного и заключается в том, что рассматривается отклонение от заданной функции. Аналогично ставятся вторая и третья краевые задачи.

Будем искать решение $u(M, t)$ однородного уравнения (1) с условиями (2) и (3) методом разделения переменных. В дальнейшем мы ограничимся изложением формальной схемы решения. С этой целью рассмотрим основную вспомогательную задачу (ср. § 3 главы II):

найти нетривиальное решение однородного уравнения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = \rho u_{tt} \tag{1*}$$

при граничных условиях

$$u|_S = 0, \tag{3}$$

представимое в виде произведения

$$u(M, t) = v(M)\,T(t). \tag{4}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (4) в (1) и разделяя, как обычно, переменные, приходим к следующим уравнениям для функций $v(M)$ и $T(t)$:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda \rho v = 0; \tag{5}$$

$$v|_S = 0;$$

$$T'' + \lambda T = 0. \tag{6}$$

Задача (5) является задачей о собственных значениях λ, которым соответствуют нетривиальные решения (собственные функции) однородного уравнения с однородными граничными условиями. Остановимся подробнее на этой задаче, аналогичной основной задаче § 3 главы II. В нашем случае уравнение для собственных функций представляет собой уравнение с частными производными, вследствие чего трудно рассчитывать на получение явного представления собственных функций для произвольной области T. В дальнейшем (пп. 2 и 3) будут рассмотрены примеры областей T, для которых явное представление возможно, хотя и требует введения нового класса специальных функций. Здесь мы рассмотрим общие свойства собственных функций и собственных значений и проведем формальную схему метода разделения переменных. Перечислим эти свойства.

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, которым соответствуют собственные функции

$$v_1(x, y, z), \qquad v_2(x, y, z), \ldots, v_n(x, y, z), \ldots$$

Собственные значения λ_n с возрастанием номера n неограниченно возрастают; $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

2. При $q \geqslant 0$ все собственные значения λ положительны:

$$\lambda_n > 0.$$

3. Собственные функции $\{v_n\}$ ортогональны между собой с весом $\rho(x, y, z)$ в области T:

$$\int_T v_m(M)\, v_n(M)\, \rho(M)\, d\tau_M = 0 \qquad (m \neq n), \tag{7}$$

$$M = M(x, y, z); \quad d\tau_M = dx\,dy\,dz.$$

4. Теорема разложимости. Произвольная функция $F(M)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничному условию

$$F = 0 \text{ на } S,$$

разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{v_n(M)\}$:

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M),$$

где F_n — коэффициенты разложения.

Доказательство свойств 1 и 4 основывается обычно на теории интегральных уравнений. Перейдем к доказательству свойств 2 и 3, не требующему специального математического аппарата. Докажем ортогональность собственных функций $\{v_n\}$ (свойство 3). Пусть $v_n(M)$ и $v_m(M)$ — две собственные функции, соответствующие различным собственным значениям λ_n и λ_m:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v_m}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v_m}{\partial z}\right)-qv_m+\lambda_m\rho v_m=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v_n}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v_n}{\partial z}\right)-qv_n+\lambda_n\rho v_n=0,$$

причем $v_m = 0$ и $v_n = 0$ на S. Умножая первое уравнение на $v_n(M)$ и вычитая из него второе уравнение, умноженное на $v_m(M)$, находим:

$$\iiint_T \{v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_m) - v_m \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n)\}\, d\tau + (\lambda_m - \lambda_n)\iiint_T v_n v_m \rho\, d\tau = 0.$$

Отсюда после преобразований, аналогичных тем, которые используются при выводе второй формулы Грина [1]), получаем:

$$\iint_S \left(v_n k\frac{\partial v_m}{\partial \nu} - v_m k\frac{\partial v_n}{\partial \nu}\right) d\sigma + (\lambda_m - \lambda_n)\iiint_T v_m v_n \rho\, d\tau = 0.$$

В силу граничных условий $v_m = 0$ и $v_n = 0$ на S, так что

$$(\lambda_m - \lambda_n)\iiint_T v_m v_n \rho\, d\tau = 0,$$

откуда и следует, что при $\lambda_m \neq \lambda_n$

$$\iiint_T v_m v_n \rho\, d\tau = 0 \qquad (m \neq n),$$

т. е. собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны между собой с весом $\rho(M)$.

[1]) В эту формулу входят нормальные производные собственных функций на поверхности S. Обоснование этой формулы для поверхностей типа Ляпунова см. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV.

При изучении аналогичной краевой задачи для одного независимого переменного

$$X'' + \lambda\rho X = 0,$$
$$X(0) = 0,$$
$$X(l) = 0$$

было доказано, что каждому собственному значению соответствует одна нормированная собственная функция. Для двух и трех независимых переменных это обстоятельство не имеет места. Как видно из примеров собственных функций прямоугольника и круга, рассмотренных ниже (пп. 2 и 3), одному и тому же собственному значению может соответствовать несколько собственных функций. Однако каждому собственному значению, как это следует из теории интегральных уравнений, может соответствовать лишь конечное число собственных функций, линейно-независимых между собой. Пусть некоторому значению λ_n соответствует система линейно-независимых функций $v_n^{(1)}, v_n^{(2)}, \ldots, v_n^{(m)}$. Очевидно, что любая линейная комбинация этих функций

$$\overline{v}_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_n^{(i)}$$

также является собственной функцией для того же собственного значения λ_n. Пользуясь известным приемом *ортогонализации* [1]), можно построить функции $\overline{v}_n^{(1)} \ldots \overline{v}_n^{(m)}$, являющиеся линейными комбинациями исходных функций и ортогональные между собой. Таким образом, если собственные функции, соответствующие некоторому λ_n, не ортогональны между собой, то мы можем ортогонализировать их и получить новую систему собственных функций, ортогональных между собой и соответствующих тому же λ_n.

Совокупность таких систем собственных функций для разных λ_n образует ортогональную систему собственных функций рассматриваемой краевой задачи

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda\rho v = 0,$$
$$v = 0 \text{ на } S.$$

Интеграл

$$N(v_n) = \iiint_T v_n^2 \rho \, d\tau > 0$$

называется *нормой* собственной функции. Умножая каждую функцию v_n на $\frac{1}{\sqrt{N(v_n)}}$, получим систему собственных функций, нормированных к единице.

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV.

Для доказательства положительности собственных значений (свойство 2) достаточно воспользоваться первой формулой Грина

$$\iiint_T (k \operatorname{grad} v_n)^2 \, d\tau = $$

$$= -\iiint_T v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n) \, d\tau + \int_S \int v_n k \frac{\partial v_n}{\partial n} \, d\sigma =$$

$$= -\iiint_T q v_n^2 \, d\tau + \lambda_n \iiint_T v_n^2 \rho \, d\tau.$$

Отсюда видно, что при $q \geqslant 0$ собственные значения λ_n положительны.

В дальнейшем мы будем пользоваться теоремой разложимости (свойство 4), отсылая за доказательством к соответствующему разделу интегральных уравнений. Пусть

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M).$$

Отсюда обычным способом, используя условие ортогональности (7), находим коэффициенты разложения

$$F_n = \frac{\iiint_T F(M) v_n(M) \rho \, d\tau}{\iiint_T v_n^2 \rho \, d\tau}. \tag{8}$$

Вернемся теперь к уравнению в частных производных. Решение уравнения

$$T_n'' + \lambda_n T_n = 0$$

имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

так что решением нашей основной вспомогательной задачи будет произведение

$$u_n(M, t) = T_n(t) v_n(M) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) v_n(M).$$

Общее решение исходной задачи с начальными данными естественно искать в виде суммы

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(M, t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) v_n(M). \tag{9}$$

Удовлетворяя начальным условиям (2)

$$u(M,\ 0) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(M),$$

$$u_t(M,\ 0) = \psi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} v_n(M)$$

и пользуясь теоремой разложимости 4, находим:

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n \sqrt{\lambda_n} = \psi_n,$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ в их разложении по ортогональной с весом $\rho(M)$ системе функций $v_n(M)$. Тем самым формальное построение решения исходной задачи закончено.

Физическая интерпретация полученного решения вполне аналогична случаю одного переменного. Частные решения

$$u_n(M,\ t) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t)\, v_n(M)$$

представляют собой *стоячие волны*, которые могут существовать внутри ограниченного объема T.

«Профили» стоячих волн, определяемые функцией $v_n(M)$, для разных моментов времени отличаются лишь множителем пропорциональности. Линии или поверхности (соответственно для двух или трех переменных), вдоль которых $v_n(M) = 0$, называются *узловыми линиями* (поверхностями) стоячей волны $v_n(M)$. Точки, в которых $v_n(M)$ достигает относительных максимумов или минимумов, называются *пучностями* этой стоячей волны [1]). Общее решение представляется в виде бесконечной суммы таких стоячих волн. Возможность представления общего решения в виде суммы слагаемых подобного типа и означает возможность представления произвольного колебания в виде суперпозиции стоячих волн [2]).

Таким образом, задача о колебании мембран или объемов сводится по существу к нахождению соответствующих собственных функций. В пп. 2 и 3 мы рассмотрим колебания прямоугольной и круглой мембран, обращая при этом главное внимание на построение собственных функций. Как уже отмечалось выше, нахождение собственных функций в явной аналитической форме сопряжено с большими трудностями для областей более сложной формы. В случае произвольных областей для построения собственных функций могут

[1]) Если возбудить колебания мембраны, посыпанной песком, то песок из пучностей будет сбрасываться к узловым линиям, образуя при этом так называемые хладниевые фигуры, воспроизводящие узловые линии собственных функций.

[2]) Обоснованию метода разделения для случая многих переменных посвящена работа О. А. Ладыженской (ДАН СССР 85, 3, 1952).

быть использованы приближенные методы. Существуют различные приближенные методы, основанные на использовании интегральных уравнений, вариационных принципов, конечных разностей.

2. Колебания прямоугольной мембраны. Процесс колебаний плоской однородной мембраны, как было показано в главе II, § 2, описывается уравнением колебаний

$$u_{tt} = a^2 \Delta u. \tag{10}$$

Пусть в плоскости (x, y) расположена прямоугольная мембрана со сторонами b_1 и b_2, закрепленная по краям и возбуждаемая с помощью начального отклонения и начальной скорости. Для нахождения функции $u(x, y, t)$, характеризующей отклонение мембраны от положения равновесия, мы должны решить уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{10'}$$

при заданных начальных

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= \psi(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и граничных условиях

$$u(0, y, t) = 0, \qquad u(b_1, y, t) = 0, \tag{12}$$

$$u(x, 0, t) = 0, \qquad u(x, b_2, t) = 0. \tag{13}$$

Мы ищем, как обычно, решение методом разделения переменных, полагая

$$u(x, y, t) = v(x, y) T(t). \tag{14}$$

Подставляя (14) в (10) и разделяя переменные, получаем для функции $T(t)$ уравнение

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \tag{15}$$

а для функции $v(x, y)$ — следующую краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} + \lambda v &= 0; \\ v(0, y) = 0, \quad v(b_1, y) &= 0; \\ v(x, 0) = 0, \quad v(x, b_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Таким образом, сама задача для собственных значений состоит в решении однородного уравнения в частных производных при однородных граничных условиях. Будем и эту задачу решать методом разделения переменных, полагая

$$v(x, y) = X(x) Y(y).$$

Проводя разделение переменных, получаем следующие одномерные задачи на собственные значения:

$$\left.\begin{aligned} X'' + \nu X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(b_1) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} Y'' + \mu Y = 0, \\ Y(0) = 0, \quad Y(b_2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где ν и μ — постоянные разделения переменных, связанные соотношением $\mu + \nu = \lambda$. При этом граничные условия для $X(x)$ и $Y(y)$ вытекают из соответствующих условий для функции v. Например, из

$$v(0, y) = X(0)\,Y(y) = 0$$

следует $X(0) = 0$, так как $Y(y) \not\equiv 0$ (мы ищем нетривиальные решения).

С решением задач, подобных (17) и (18), мы уже встречались при изучении колебаний струны. Решения уравнений (17) и (18) имеют вид

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{b_1}x, \qquad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi}{b_2}y;$$

$$\nu_n = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2; \qquad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2.$$

Собственным значениям

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2,$$

таким образом, соответствуют собственные функции

$$v_{n,m} = A_{n,m} \sin\frac{n\pi}{b_1}x \sin\frac{m\pi}{b_2}y,$$

где $A_{n,m}$ — некоторый постоянный множитель. Выберем его так, чтобы норма функции $v_{n,m}$ с весом 1 была равна единице

$$\int_0^{b_1}\int_0^{b_2} v_{n,m}^2\,dx\,dy = A_{n,m}^2 \int_0^{b_1} \sin^2\frac{n\pi}{b_1}x\,dx \int_0^{b_2} \sin^2\frac{m\pi}{b_2}y\,dy = 1.$$

Отсюда

$$A_{n,m} = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}}.$$

Ортогональность функций $\{v_{n,m}\}$ очевидна и не нуждается в доказательстве. Следовательно, функции

$$v_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} \sin\frac{n\pi}{b_1}x \sin\frac{m\pi}{b_2}y \tag{19}$$

образуют ортонормированную систему собственных функций прямоугольной мембраны.

Число собственных функций, принадлежащих $\lambda_{n,m}$ (кратность $\lambda_{n,m}$), зависит от количества целочисленных решений n и m уравнения

$$\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2=\lambda_{n,m}.$$

Найденная система собственных функций $v_{n,m}$ такова, что любая функция $F(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничному условию, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по $v_{n,m}$. Это утверждение можно обосновать, сославшись на теорию кратных рядов Фурье.

Покажем, что система (19) содержит все собственные функции нашей задачи о собственных значениях. Предположим, что существует собственная функция u_0, принадлежащая собственному значению λ_0. Так как функция u_0 ортогональна всем собственным функциям, принадлежащим другим значениям λ, то в ее разложении по системе (19) останется лишь конечное число членов, соответствующих собственным функциям, принадлежащим собственному значению $\lambda_{n,m}=\lambda_0$. Поэтому u_0 является линейной комбинацией лишь тех функций (19), которые соответствуют $\lambda_{n,m}=\lambda_0$. Таким образом, все функции прямоугольной мембраны даются формулой (19).

Возвращаясь к исходной задаче для уравнения (10), мы видим, что частные решения

$$u_{n,m}=v_{n,m}\left(\overline{B}_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}at+\overline{\overline{B}}_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}at\right)$$

представляют собой стоячие волны, профиль которых определяется собственными функциями $v_{n,m}$. Геометрические места точек внутри прямоугольника, в которых собственные функции обращаются в нуль, называются узловыми линиями. Рассмотрим для простоты квадрат со стороной b ($b_1=b_2$). Узловые линии функции

$$v_{n,m}=\frac{2}{b}\sin\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

являются прямыми, параллельными осям координат (рис. 78, *а*).

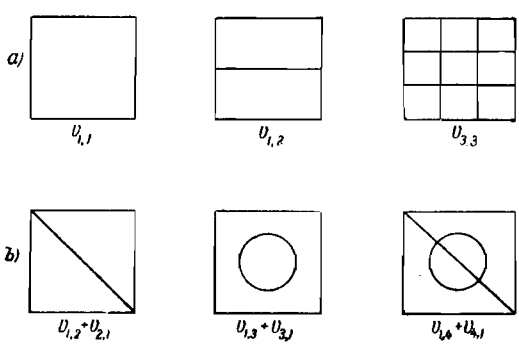


Рис. 79.

При кратных собственных значениях линейная комбинация собственных функций также будет собственной функцией. Ее узловые линии могут иметь весьма сложную форму (рис. 79, *б*).

Искомое решение уравнения (10) при дополнительных условиях (11)—(13) имеет вид

$$u(x,\ y,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{B}_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}at+\overline{\overline{B}}_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}at\right)v_{n,m}(x,\ y),$$

где $v_{n,m}$ определяется формулой (19), а коэффициенты $\overline{B}_{n,m}$ и $\overline{\overline{B}}_{n,m}$ равны:

$$\overline{B}_{n,m}=\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\varphi(x,\ y)\,v_{n,m}(x,\ y)\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{\frac{4}{b_1b_2}}\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\varphi(x,\ y)\sin\frac{n\pi}{b_1}x\sin\frac{m\pi}{b_2}y\,dx\,dy,$$

$$\overline{\overline{B}}_{n,m}=\frac{1}{\sqrt{a^2\lambda_{n,m}}}\sqrt{\frac{4}{b_1b_2}}\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\psi(x,y)\sin\frac{n\pi}{b_1}x\sin\frac{m\pi}{b_2}y\,dx\,dy.$$

3. Колебания круглой мембраны. При изучении колебаний круглой мембраны полезно перейти к полярным координатам. Тогда уравнение колебаний запишется в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}.\tag{20}$$

Будем искать решение этого уравнения при заданных начальных условиях

$$\left.\begin{aligned}u(r,\ \theta,\ 0)&=f_1(r,\ \theta),\\ u_t(r,\ \theta,\ 0)&=f_2(r,\ \theta)\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

и граничном условии

$$u(r_0,\ \theta,\ t)=0\tag{22}$$

(закрепленная по краям мембрана радиуса r_0). Как и в случае прямоугольной мембраны, мы прибегаем к разделению переменных. Положив

$$u(r,\ \theta,\ t)=v(r,\ \theta)\,T(t),$$

мы получим уравнение для $T(t)$

$$T''+a^2\lambda T=0,$$

$$T=C_1\cos\sqrt{a^2\lambda}t+C_2\sin\sqrt{a^2\lambda}t$$

и следующую задачу на собственные значения для функции $v(r, \theta)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\lambda v=0 \quad (0<r<r_0),\\ &|v(0, \theta)|<\infty \qquad \text{(условие ограниченности)},\\ &v(r_0, \theta)=0 \qquad \text{(граничное условие)},\\ &v(r, \theta)=v(r, \theta+2\pi) \quad \text{(условие периодичности)}. \end{aligned}\right\}$$

Функция v должна быть однозначной и дифференцируемой функцией точки; поскольку же θ является циклической координатой, то для однозначности v мы должны потребовать, чтобы выполнялось условие периодичности с периодом 2π, т. е. $v(r, \theta+2\pi)=v(r, \theta)$.

Положим

$$v(r, \theta)=R(r)\Theta(\theta).$$

Подставляя предполагаемую форму решения в наше уравнение и производя деление на $R\Theta$, получаем:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R}+\frac{\Theta''}{\Theta}+\lambda r^2=0.$$

Отсюда приходим к уравнениям

$$\Theta''+\mu^2\Theta=0;$$

$$\Theta(0)=\Theta(\theta+2\pi); \quad \Theta'(0)=\Theta'(\theta+2\pi);$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\right)R=0,$$

$$R(r_0)=0, \quad |R(0)|<\infty.$$

Нетривиальные периодические решения для $\Theta(\theta)$ существуют лишь при $\mu^2=n^2$ (n — целое число) и имеют вид

$$\Theta_n(\theta)=D_{1n}\cos n\theta+D_{2n}\sin n\theta.$$

Отметим, что собственному значению n^2 принадлежат две линейно-независимые собственные функции $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$.

Для определения функции $R(r)$ мы имеем уравнение

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0 \tag{23}$$

с однородными граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} &R(r_0)=0,\\ &|R(0)|<\infty. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Таким образом, для определения функции $R(r)$ мы должны решить задачу о собственных значениях.

Второе условие, налагаемое на функцию $R(r)$, представляющее условие ограниченности при $r=0$, связано с тем, что $r=0$ является особой точкой уравнения; для особых же точек в качестве граничного условия достаточно выставить требование ограниченности (см. Дополнение, стр. 573).

Вводя новую переменную

$$x=\sqrt{\lambda}\,r$$

и обозначая

$$R(r)=R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)=y(x),$$

получим для определения функции $y(x)$ уравнение цилиндрических функций n-го порядка (см. Дополнение, ч. I)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \tag{25}$$

с дополнительными граничными условиями

$$y(x_0)=0 \qquad (x_0=\sqrt{\lambda}\,r_0), \tag{26}$$
$$|y(0)|<\infty.$$

Общее решение уравнения цилиндрических функций имеет вид

$$y(x)=d_1J_n(x)+d_2N_n(x), \tag{27}$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя, N_n — функция Неймана n-го порядка (см. Дополнение, ч. I). Из второго условия следует, что $d_2=0$. Первое условие дает:

$$J_n(\sqrt{\lambda}\,r_0)=0 \quad \text{или} \quad J_n(\mu)=0 \tag{28}$$
$$(\mu=\sqrt{\lambda}\,r_0).$$

Если $\mu_m^{(n)}$ — m-й корень уравнения $J_n(\mu)=0$, то

$$\lambda_{n,m}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \tag{29}$$

Этому собственному значению принадлежит собственная функция

$$R_{n,m}=y(\sqrt{\lambda}\,r)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\,r\right). \tag{30}$$

Отметим следующие свойства собственных функций (30) [1]:

1. Собственные функции $R(r)$, принадлежащие различным собственным значениям λ, ортогональны с весом r:

$$\int_0^{r_0} rR_{nm_1}(r)\,R_{nm_2}(r)\,dr=0 \quad (m_1\neq m_2)$$

[1]) См. Дополнение, ч. I, § 1.

или

$$\int_0^{r_0} rJ_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0}r\right)J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}r\right)dr=0. \tag{31}$$

2. Норма этих функций равна

$$\int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)dr=\frac{r_0^2}{2}[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2. \tag{31'}$$

В частности, норма функции $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)$ равна

$$\int_0^{r_0} r\left[J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)\right]^2 dr=\frac{r_0^2}{2}[J_1(\mu_m^{(0)})]^2. \tag{32}$$

3. Всякая непрерывная в интервале $(0, r_0)$ функция $f(r)$, имеющая кусочно-непрерывные первую и вторую производные и удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty} f_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right), \tag{33}$$

причем коэффициенты разложения определяются формулой

$$f_m=\frac{\int_0^{r_0} rf(r)\,J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2}. \tag{34}$$

Возвращаясь к задаче о собственных значениях для круглой мембраны, получим для собственного значения

$$\lambda_{n,\,m}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2$$

две собственные функции

$$\bar{v}_{n,\,m}=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\cos n\theta,\quad \bar{\bar{v}}_{n,\,m}=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\sin n\theta. \tag{35}$$

Составив их линейную комбинацию, получим:

$$v_{n,\,m}(r,\,\theta)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)(A_{n,\,m}\cos n\theta+B_{n,\,m}\sin n\theta). \tag{36}$$

Вычислим норму собственной функции $v_{n,m}$; попутно получится доказательство ортогональности собственных функций, вытекающее также из общей теории. Для упрощения вычислений ограничимся собственными функциями $\bar{v}_{n,m}$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \bar{v}_{n_1,m_1}\bar{v}_{n_2m_2}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{r_0} J_{n_1}\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n_1)}}{r_0}r\right) J_{n_2}\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n_2)}}{r_0}r\right) r\,dr \int_0^{2\pi} \cos n_1\theta \cos n_2\theta\, d\theta =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad n_1 \neq n_2, \\ 0 \quad \text{при} \quad n_1 = n_2, \quad m_1 \neq m_2, \\ \dfrac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2\pi \quad \text{при} \quad n_1 = n_2 = n \neq 0 \quad \text{и} \quad m_1 = m_2 = m, \\ \dfrac{r_0^2}{2}\left[J_0'(\mu_m^{(n)})\right]^2 2\pi \quad \text{при} \quad n_1 = n_2 = 0 \quad \text{и} \quad m_1 = m_2 = m. \end{cases} \tag{37}$$

Аналогичные условия имеют место для функции

$$\bar{\bar{v}}_{n,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\sin n\theta.$$

Выражение для нормы можно записать в виде

$$\int\int_{\Sigma} v_{n,m}^2\, d\sigma = \frac{r_0^2}{2}\pi\varepsilon_n\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2, \qquad (d\sigma = r\,dr\,d\theta) \tag{38}$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 \quad \text{при} \quad n = 0, \\ 1 \quad \text{при} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Из общей теории следует, что

всякая непрерывная функция $F(r, \theta)$ с непрерывными первыми и вторыми производными, удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$F(r, \theta) = \sum_{n,m}\left(A_{n,m}\bar{v}_{n,m}(r, \theta) + B_{n,m}\bar{\bar{v}}_{n,m}(r, \theta)\right) \tag{39}$$

по собственным функциям задачи о собственных значениях для круга.

Коэффициенты разложения вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} F(r,\theta)\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\theta\, r\, dr\, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2}, \\ B_{n,m} &= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} F(r,\theta)\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\sin n\theta\, r\, dr\, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2}. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Отметим, что функция

$$v_{0,m}(r,\theta) = J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)$$

не зависит от θ.

Если заданная функция F зависит только от r, $F = F(r)$, то ряд, представляющий разложение F по собственным функциям, будет содержать лишь функции $v_{0,m}$:

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right), \quad (41)$$

где

$$A_{0,m} = \frac{\int_0^{r_0} F(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\, dr}{\frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})}. \quad (42)$$

Все остальные коэффициенты $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ равны нулю.

Возвращаясь к исходной задаче колебания мембраны при заданном начальном отклонении и начальной скорости, можем написать ее решение в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{v}_{n,m}(r,\theta)\left(A_{n,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + B_{n,m}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t\right) + \\ + \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{\bar{v}}_{n,m}(r,\theta)\left(C_{n,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + D_{n,m}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t\right).$$

Коэффициенты $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$, $D_{n,m}$ определяются из начальных условий

$$u(r,\theta,0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{n,m}\bar{v}_{n,m} + C_{n,m}\bar{\bar{v}}_{n,m}) = f_1(r,\theta),$$

$$u_t(r,\theta,0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (B_{n,m}\bar{v}_{n,m} + D_{n,m}\bar{\bar{v}}_{n,m})\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} = f_2(r,\theta)$$

по формулам

$$A_{n,m}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\varphi(r,\theta)\,J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r)\cos n\theta\, r\,dr\,d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\,[J_n'(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r)]^2},$$

$$C_{n,m}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\varphi(r,\theta)\,J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r)\sin n\theta\, r\,dr\,d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\,[J_n'(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r)]^2}.$$

Аналогичные формулы имеют место для $a\sqrt{\lambda_{n,m}}B_{n,m}$ и, соответственно, для $a\sqrt{\lambda_{n,m}}D_{n,m}$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ V

1. Решить задачу с начальными данными для уравнения колебаний $u_{tt}=a^2\Delta u$ в пространстве, предполагая, что начальная скорость всюду равна нулю, а начальные отклонения $u|_{t=0}=\varphi$ имеют вид

а) $\varphi=\begin{cases}1 & \text{внутри единичной сферы,}\\ 0 & \text{вне единичной сферы}\end{cases}$

или

б) $\varphi=\begin{cases}A\cos\frac{\pi}{2r_0}r & \text{внутри сферы радиуса } r_0,\\ 0 & \text{вне сферы радиуса } r_0.\end{cases}$

2. Решить задачу о колебании полупространства $z>0$ при однородном граничном условии первого или второго рода, если заданы

а) локальное возмущение, т. е. начальная скорость и начальное отклонение в некоторой области T_0;

б) сосредоточенная сила, действующая по произвольному закону.

3. Решить ту же задачу для слоя $-l\leqslant z\leqslant l$.

4. Решить уравнение колебаний в области, представляющей собой клин, угол раствора которого равен $\frac{\pi}{2}$ и вообще $\frac{\pi}{n}$ (n — целое число), если заданы однородные граничные условия первого или второго рода, а также начальная скорость и начальное отклонение.

5. Вывести аналог интегральной формулы (3) для уравнения

$$u_{tt}=a^2\Delta u+cu,\ \text{где}\ \ c=\text{const}.$$

Рассмотреть случай $c<0$ и найти решение задачи с начальными данными для неоднородного уравнения. Дать физическую интерпретацию полученных результатов.

6. Найти функцию $u(\rho, \varphi, t)$, характеризующую колебания мембраны под действием импульса K, сосредоточенного

а) в центре круглой мембраны,

б) в произвольной точке круглой мембраны,

в) в произвольной точке прямоугольной мембраны.

7. Найти собственные частоты и собственные функции мембран, имеющих форму

а) полукруга,

б) кольца,

в) кругового сектора,

г) кольцевого сектора.

Рассмотреть первую и вторую краевые задачи.

8. Найти установившиеся колебания круглой мембраны (мембраны микрофона) под действием периодической силы, распределенной по мембране с постоянной плотностью $f = A \sin \omega t$. Решить ту же задачу, если $f = A\left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right) \sin \omega t$, где c — радиус мембраны.

9. Вывести уравнение распространения звука в среде, движущейся с постоянной скоростью. Преобразовать полученное уравнение, перейдя к системе координат, движущихся вместе со средой.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ V

I. Приведение уравнений теории упругости к уравнениям колебаний

Теория упругости ставит своей целью изучение возникающих в упругих телах деформаций и движений при помощи математических методов. Возникающие под действием внешних сил деформации и движения можно характеризовать с помощью *вектора смещений* $\boldsymbol{u}$, проекции которого на координатные оси x, y, z будем обозначать $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$. Эти смещения возникают в упругом теле под действием внутренних сил (*напряжений*), которые образуют симметрический тензор напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

где σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} — составляющие силы (напряжения), действующей на единицу площади поверхностного элемента, перпендикулярного к оси x; аналогично τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} и τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z — компоненты напряжений, действующих на единицу площади поверхностных элементов, перпендикулярных к осям y и z. Компоненты σ_x, σ_y, σ_z называют *нормальными напряжениями*, а τ_{xy}, τ_{xz} и так далее называют *скалывающими напряжениями*. Рассматривая элемент объема и составляя для него уравнение движения, получим:

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ρ — объемная плотность в точке (x, y, z), X, Y, Z — составляющие внешних объемных сил. Связь напряжений, возникающих при

деформации, с ее характеристиками дается законом Гука, который записывается в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left\{\varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2}\right\}, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\left\{\varepsilon_y + \frac{\theta}{m-2}\right\}, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G\left\{\varepsilon_z + \frac{\theta}{m-2}\right\}, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

При этом величины

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

образуют симметрический тензор деформаций

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

В формулах (2) мы пользуемся следующими обозначениями: G — *модуль сдвига*, m — коэффициент, характеризующий *сжатие* тела в поперечном направлении при его удлинении в продольном направлении, $\theta = \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

К уравнениям (1) и (2) следует еще присоединить граничные условия (на границе заданы, например, смещения u, v, w, либо поверхностные силы и т. д.), на которых мы здесь не будем останавливаться.

Уравнения (1) и (2) образуют полную систему дифференциальных уравнений в частных производных для напряжений и деформаций. Подставляя выражения для напряжений из (2) в уравнения движения (1) и учитывая соотношения (3), получаем систему уравнений для смещений

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G\left\{\Delta u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right\} + X, \\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= G\left\{\Delta v + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right\} + Y, \\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= G\left\{\Delta w + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right\} + Z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Часто вводят вместо постоянных G и m так называемые *постоянные Ламэ* λ и μ, связанные с ними соотношениями

$$\mu = G, \quad \lambda = \frac{2}{m-2}G.$$

Это позволяет записать предыдущую систему уравнений в виде одного векторного уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{u}$ — вектор смещения с составляющими u, v и w, $\boldsymbol{F}$ — вектор объемных сил с составляющими X, Y, Z.

Покажем, что уравнения (5) могут быть сведены к волновым уравнениям для соответствующим образом выбранных функций [1]).

Произвольный вектор $\boldsymbol{F}$ всегда можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U + \operatorname{rot} \boldsymbol{L},$$

где U — скалярный, а $\boldsymbol{L}$ — векторный потенциал.

Положим

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

где

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi + U,$$

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}.$$

Нетрудно убедиться прямой подстановкой, что определенный таким способом вектор $\boldsymbol{u}$ действительно удовлетворяет уравнениям упругости (4).

Если объемные силы отсутствуют, то для потенциалов Φ и $\boldsymbol{A}$ мы получаем однородные уравнения колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi,$$

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{A}.$$

Уравнение колебаний для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ в некоторых случаях (например, в декартовой системе координат) распадается на три скалярных уравнения. Однако вопрос о приведении уравнений упругости к отдельным скалярным уравнениям колебаний не может быть рассмотрен до конца без привлечения граничных условий, которые могут связывать разные компоненты и тем самым представлять значительные трудности для полного расщепления уравнений.

II. Уравнения электромагнитного поля

1. Уравнения электромагнитного поля и граничные условия. Электромагнитное поле характеризуется векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ напряженностей электрического и магнитного полей и векторами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$

[1]) С. Л. Соболев, Некоторые вопросы теории распространения колебаний; Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XII, Гостехиздат, 1937.

электрической и магнитной индукции. Полная система уравнений Максвелла, связывающих эти величины, имеет вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{j}$ — объемная плотность токов проводимости, $\boldsymbol{j}^{(e)}$ — плотность токов, происходящих от действия сторонних э. д. с., ρ — объемная плотность зарядов, c — скорость света в пустоте. В дальнейшем мы часто будем считать $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$.

К этим уравнениям следует присоединить так называемые материальные уравнения поля

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{7}$$

где ε — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, σ — проводимость среды. В дальнейшем мы будем предполагать среду однородной и изотропной. В этом случае $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$. Мы часто будем рассматривать электромагнитные процессы в пустоте, где $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$, при условии отсутствия зарядов и токов. В этом случае уравнения Максвелла упрощаются:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0.$$

Уравнения (1) и (4) совместны, так как между ρ и $\boldsymbol{j}$ имеется соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

выражающее закон сохранения электрического заряда.

Законы электромагнитного поля, выраженные в дифференциальной форме уравнениями (1)—(4), могут быть выражены в интегральной

форме

$$\oint_C H_s\,ds = \frac{4\pi}{c}\int_\Sigma\int i_n\,d\sigma, \tag{1'}$$

$$\oint_C E_s\,ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_\Sigma\int B_n\,d\sigma = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{2'}$$

где

$$i = j_{\text{см}} + j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} + j \tag{8}$$

— полный ток, $j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t}$ — ток смещения. Интегрирование производится по контуру C и по поверхности Σ, опирающейся на этот контур; $\Phi = \int_\Sigma\int B_n\,d\sigma$ — поток индукции, пронизывающий контур C.

Обозначая через T некоторый замкнутый объем, а через Σ — ограничивающую его поверхность, будем иметь вместо (3) и (4)

$$\int_\Sigma\int B_n\,d\sigma = 0, \tag{3'}$$

$$\int_\Sigma\int D_n\,d\sigma = 4\pi\int_T\int\int \rho\,d\tau = 4\pi e, \tag{4'}$$

где e — полный заряд внутри объема T.

Уравнения (1')—(4') имеют простой физический смысл и являются математическим выражением основных опытных фактов, послуживших основанием для вывода уравнений Максвелла. Так, уравнение (1') является обобщением известного закона Био и Савара, уравнение (2') выражает собой закон электромагнитной индукции Фарадея, уравнение (4') может быть непосредственно выведено из закона Кулона. Уравнение (3') является следствием замкнутости силовых линий магнитного поля.

Если среда неоднородна, то к уравнению Максвелла следует присоединить граничные условия. На границе раздела двух разных сред (1) и (2) должны выполняться следующие условия:

$E_s^{(1)} = E_s^{(2)}$ (непрерывность тангенциальных составляющих вектора $\boldsymbol{E}$), (9)

$H_s^{(1)} = H_s^{(2)}$ (непрерывность тангенциальных составляющих вектора $\boldsymbol{H}$), (10)

а также

$B_{n_1}^{(1)} = B_{n_2}^{(2)}$ (непрерывность нормальных составляющих вектора $\boldsymbol{B}$), (11)

$$D_{n_1}^{(1)} - D_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu, \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{n_1}^{(1)} - \varepsilon_2 E_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ — нормали к поверхности раздела двух сред, причем $\boldsymbol{n}_1$ направлена внутрь первой среды, а $\boldsymbol{n}_2$ — внутрь второй среды, ν — поверхностная плотность зарядов. Эти условия легко получаются из уравнений (1')—(4').

Уравнения Максвелла вместе с граничными условиями позволяют однозначно найти электромагнитное поле в пространстве по заданному начальному состоянию поля. При этом для однозначного определения поля достаточно использовать условия (9) и (10) непрерывности тангенциальных составляющих поля.

Если электромагнитный процесс является статическим, т. е. не меняется во времени, то уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \\ \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned}$$

Если, кроме того, среда не обладает проводимостью, т. е. $\sigma = 0$, то мы получаем две независимые системы уравнений для электрического и магнитного полей

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} &= 4\pi\rho \end{aligned}\right\} \quad \text{(уравнения электростатики)},$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \\ \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(уравнения магнитостатики)}.$$

Уравнения электростатики были рассмотрены нами в главе IV и в приложениях к главе IV.

В случае однородной среды нетрудно получить уравнения для каждого из векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в отдельности. Предположим, что $\rho = 0$, $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$.

Применяя к уравнению (1) операцию rot, имеем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{E},$$

откуда в силу уравнения (2) и соотношения $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H}$ получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

или

$$\Delta \boldsymbol{H} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad \left(a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\right), \tag{13}$$

так как

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

Аналогично выводится уравнение для $\boldsymbol{E}$

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{14}$$

В частности, уравнению (13) или (14) будут удовлетворять компоненты E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{15}$$

где u — одна из компонент E_x, E_y, E_z или H_x, H_y, H_z.

Тип этого уравнения определяется свойствами среды и характером процесса. Если среда непроводящая ($\sigma = 0$), то мы получаем обычное уравнение колебаний

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{16}$$

т. е. электромагнитные процессы распространяются в непроводящей среде без затухания со скоростью $a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ и, в частности, в пустоте со скоростью света c.

Если среда обладает большой проводимостью и можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, то будем иметь уравнение параболического типа

$$\Delta u = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{17}$$

В общем случае, когда токи проводимости и токи смещения одного порядка, уравнение (15) является уравнением гиперболического типа, описывающим процессы распространения с затуханием, вызываемым диссипацией энергии вследствие проводимости.

Для установившихся процессов, например в задачах дифракции

$$u = v(x, y, z)\, e^{i\omega t},$$

мы приходим к уравнению эллиптического типа

$$\Delta v + (k^2 + iq^2)\, v = 0, \tag{18}$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}; \qquad q^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}. \tag{19}$$

Статические поля, как было уже отмечено в главе IV, описываются уравнением Лапласа.

2. Потенциалы электромагнитного поля. Для определения электромагнитного поля мы должны найти шесть величин, являющихся составляющими векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. В ряде случаев, однако, можно свести эту задачу к отысканию четырех, а иногда и меньшего числа величин. С этой целью вводят потенциалы поля — векторный $\boldsymbol{A}$, скалярный φ — следующим образом. Рассмотрим уравнение Максвелла в однородной среде, например, в пустоте. Из уравнения (3)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \tag{3}$$

следует, что вектор $\boldsymbol{H}$ соленоидален и потому может быть представлен с помощью другого вектора $\boldsymbol{A}$ в виде

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{20}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

получаем:

$$\operatorname{rot}\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right] = 0,$$

т. е. вектор $\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ является потенциальным и потому может быть представлен в виде градиента некоторой скалярной функции φ

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{21}$$

откуда следует

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

Введенные таким образом векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ и скалярный потенциал φ определены не однозначно. В самом деле, из формул (20) и (21) видно, что мы получим одни и те же поля, если заменим $\boldsymbol{A}$ и φ потенциалами

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} F, \qquad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t},$$

где F — произвольная функция. Чтобы устранить эту неопределенность, налагают на потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ дополнительное условие

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{22}$$

называемое часто условием Лоренца. Покажем, что при выполнении этого условия потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{23}$$

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{24}$$

где ρ и $\boldsymbol{j}$ — плотности заданных зарядов и токов.

Подставляя выражения (20) и (21) в уравнение (1)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{1}$$

и пользуясь векторным тождеством

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A},$$

будем иметь

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)-\Delta \boldsymbol{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},$$

откуда в силу условия (22) и следует уравнение (24). Подставляя затем выражение (21) в четвертое уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}=4\pi\rho \tag{4}$$

и учитывая условие (22), получим уравнение (23) для φ.

В случае однородной проводящей среды ($\sigma \neq 0$) потенциалы вводятся с помощью соотношений

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{25}$$

$\boldsymbol{A}$ и φ связаны между собой соотношением

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\varphi=0 \tag{26}$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \boldsymbol{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \tag{27}$$

$$\Delta\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \tag{28}$$

к которым относится все сказанное выше по поводу уравнений (23) и (24).

Если свободных зарядов нет ($\rho \equiv 0$), то потенциал $\varphi = 0$ и векторы поля выражаются через один вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющий дополнительному условию

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}=0.$$

В ряде случаев электромагнитные поля можно описывать с помощью векторного потенциала, у которого отлична от нуля лишь одна компонента.

Некоторые из примеров будут рассмотрены в дальнейшем (см. также приложение I к гл. VII).

3. Электромагнитное поле осциллятора.

1. В теории излучения электромагнитных волн часто пользуются понятием осциллятора или вибратора. Это понятие тесно связано с представлением о линейных токах. Осциллятор представляет собой линейный ток бесконечно малой длины.

Рассмотрим прямолинейный ток L, сила которого меняется во времени. В простейшей модели предполагается, что сила тока неизменна по длине проводника.

Ток, постоянный по длине проводника, связан с наличием на его концах зарядов, меняющихся во времени. По аналогии с электроста-

тическим диполем, представляющим совокупность двух зарядов $+e$ и $-e$, осциллятор можно характеризовать моментом

$$\boldsymbol{p}(t) = e(t)\,\boldsymbol{l}. \tag{1}$$

Сила тока в осцилляторе, очевидно, равна

$$J(t) = \dot{e}(t),$$

так что

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{J}(t)\,\boldsymbol{l}. \tag{2}$$

Произведение $J(t)\,\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}_0(t)$ называют моментом тока.

2. Найдем электромагнитное поле, возбуждаемое осциллятором с моментом

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 f(t) \tag{3}$$

в неограниченном пространстве, предполагая, что $\sigma = 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ (вакуум).

Рассмотрим задачу о возбуждении электромагнитного поля прямолинейным током L, предельным случаем которого является осциллятор.

Вне тока L электромагнитное поле определяется из уравнений Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, & \operatorname{div}\boldsymbol{H} &= 0, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, & \operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

На линии тока L векторы поля $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$ должны иметь особенность, характеризующуюся тем, что циркуляция по бесконечно малой окружности K_ε, охватывающей линию тока L, имеет следующее значение:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{K_\varepsilon} H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} J, \tag{5}$$

где $J = J(t)$ — сила тока.

Из этого условия следует, что составляющая H_s на токе имеет особенность типа

$$H_s \approx \frac{2J}{c\rho}, \tag{6}$$

где $\rho = M_0P$, M_0 — точка на линии L, P — точка на K_ε ($\rho = \varepsilon$).

Для однозначного определения поля надо добавить начальные условия, которые мы предполагаем нулевыми.

Для решения этой задачи целесообразно ввести потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ, через которые, как мы видели (см. стр. 448), поля выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

причем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Векторный потенциал вне тока L удовлетворяет однородному уравнению колебаний

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Введем декартову систему координат, направив ось z вдоль тока L. Положим

$$\boldsymbol{A} = A(x, y, z)\, \boldsymbol{z}^0,$$

где $\boldsymbol{z}^0$ — единичный вектор оси z.

Функция $A(x, y, z)$, очевидно, удовлетворяет вне линии тока L однородному уравнению колебаний

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{10}$$

Чтобы выяснить особенность вектора $\boldsymbol{A}$ на токе, воспользуемся условием (6). Из уравнения (7) следует, что

$$H_s = \frac{\partial A}{\partial \rho}.$$

Пользуясь далее условием (6), находим, что функция $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ должна в точках линии L иметь особенность вида

$$A \approx \frac{2J}{c} \ln \rho. \tag{11}$$

Будем искать потенциал A в виде

$$A(P, t) = \int_L A_1(P, M, t)\, dl_M \qquad (P = P(x, y, z)), \tag{12}$$

где $\boldsymbol{A}_0(P, M, t) = A_1(P, M, t)\, \boldsymbol{dl}_M$ — вектор-потенциал элементарного тока осциллятора, момент которого равен $J_0 = J\, dl$.

Для того чтобы потенциал A имел нужную особенность, функция $A_0(P, M, t)$ должна иметь особенность вида

$$A_0(P, M, t) \approx \frac{J_0(t)}{c r_{PM}}. \tag{13}$$

В самом деле, предполагая, что A_0 имеет указанную особенность, и вычисляя по формуле (12) значение A вблизи тока $L\,(0 < z < l)$,

получаем:

$$A \approx J \int_0^l \frac{1}{cr_{MP}}\, d\zeta = \frac{J}{c} \int_0^l \frac{d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}} =$$

$$= \frac{J}{c} \ln \left[z - \zeta + \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2} \right]_0^l = \frac{J}{c} \ln \frac{z - l + \sqrt{\rho^2 + (z-l)^2}}{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{J}{c} \ln \frac{(l-z)\left[-1 + 1 + \frac{\rho^2}{2(l-z)^2} + \dots \right]}{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{2J}{c} \ln \rho + \dots,$$

где точками обозначены члены, не обращающиеся в бесконечность при $\rho = 0$.

3. Таким образом, функция $A_0(P, M, t)$ должна удовлетворять по переменным $P(x, y, z)$, t уравнению колебаний

$$\Delta A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = 0 \tag{14}$$

всюду, кроме точки M, а в этой точке она должна иметь особенность вида

$$A_0 \approx \frac{J_0(t)}{cr_{MP}}. \tag{15}$$

Начальные условия в силу сказанного выше — нулевые.

Решение этой задачи, как мы видели в главе V, представляется в виде запаздывающего потенциала

$$A_0(M, P, t) = \frac{J_0\left(t - \frac{r_{MP}}{c}\right)}{cr_{MP}}. \tag{16}$$

Как было отмечено выше, момент тока равен

$$\boldsymbol{J}_0(t) = J(t)\, d\boldsymbol{l} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{p}_0 \mathring{f}(t). \tag{17}$$

Таким образом, вектор-потенциал осциллятора можно также представить в виде

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_0 \mathring{f}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr}. \tag{18}$$

Часто вместо вектора-потенциала пользуются поляризационным потенциалом или вектором Герца $\boldsymbol{\Pi}$, полагая

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t}. \tag{19}$$

Вектор $\mathbf{\Pi}$ также удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \tag{20}$$

и связан со скалярным потенциалом соотношением

$$\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{\Pi}. \tag{21}$$

Векторы поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ выражаются через поляризационный потенциал с помощью формул

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t}. \tag{23}$$

Учитывая соотношение (18), получаем следующее выражение поляризационного потенциала для осциллятора

$$\mathbf{\Pi}_0 = \frac{p_0 f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

или

$$\mathbf{\Pi}_0 = \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{24}$$

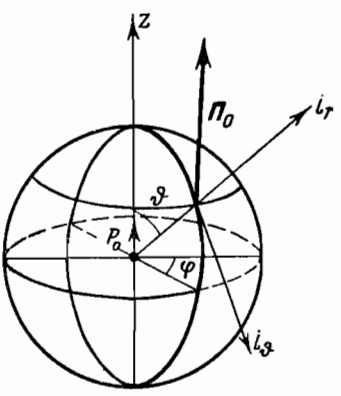


Рис. 80.

4. Для вычисления полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ перейдем к сферической системе координат (r, ϑ, φ), в начале координат которой поместим осциллятор и направим ось $z\,(\vartheta = 0)$ вдоль вектора $\boldsymbol{p}_0$ (рис. 80). Обозначим $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\vartheta$, $\boldsymbol{i}_\varphi$ единичные векторы сферической системы координат.

Вектор $\mathbf{\Pi}_0$, параллельный вектору $\boldsymbol{p}$, может быть представлен в виде

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{\Pi}_0 = \Pi_0\cos\vartheta\,\boldsymbol{i}_r - \Pi_0\sin\vartheta\,\boldsymbol{i}_\vartheta, \\ &\Pi_0 = |\,\mathbf{\Pi}_0\,|. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в формулы (22) и (23), пользуясь выражением дифференциального оператора $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ в сферической системе координат

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{i}_r + \\ + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\boldsymbol{i}_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial\vartheta}\right]\boldsymbol{i}_\varphi$$

и учитывая, что $\Pi_0 = \Pi_0(r, t)$, получим:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{2\cos\vartheta}{r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}, \\ E_\vartheta &= \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}\right), \quad E_\varphi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} H_r &= 0, \quad H_\vartheta = 0, \\ H_\varphi &= -\sin\vartheta\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r\,\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Из уравнений (26) и (27) следует, что электрическое и магнитное поля осциллятора взаимно перпендикулярны.

5. Рассмотрим частный случай, когда момент диполя периодически зависит от времени

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0 e^{-i\omega t}.$$

В этом случае формулы (26) и (27) дают:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= 2\cos\vartheta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\Pi_0, \\ E_\vartheta &= \sin\vartheta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2\right)\Pi_0 \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right), \\ H_\varphi &= ik\sin\vartheta\left(ik - \frac{1}{r}\right)\Pi_0, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где

$$\Pi_0 = p_0\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t}. \tag{29}$$

Исходя из формул (28), легко установить особенности строения поля осциллятора. На расстояниях, малых по сравнению с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ($kr \ll 1$), в формулах (28) можно ограничиться одним членом. Получающиеся при этом формулы для напряженности электрического поля соответствуют полю статического диполя, электрический момент которого p равен мгновенному значению момента осциллятора $p(t)$. Для напряженности магнитного поля получается выражение, соответствующее закону Био и Савара. На больших расстояниях от диполя $R \gg \lambda$ ($kr \gg 1$) в формуле (28) можно пренебречь всеми членами более высокого порядка, чем $\frac{1}{r}$. При этом получим:

$$E_r = 0, \qquad E_\vartheta = H_\varphi = -k^2\sin\vartheta\,\Pi_0, \tag{30}$$

т. е. поле становится поперечным относительно направления распространения. Такие удаленные области поля, где поле излучения становится поперечным, называются *волновой зоной осциллятора*. Чтобы подсчитать *поток энергии* через поверхность сферы радиуса R

с центром в осцилляторе, надо вычислить вектор Умова — Пойнтинга

$$S = \frac{c}{4\pi} |[\boldsymbol{EH}]| = \frac{c}{4\pi} EH$$

и проинтегрировать это выражение по сфере.

Из формул (29) и (30) следует, что в волновой зоне вещественная часть векторов H_φ и E_ϑ определяется выражением

$$H_\varphi = E_\vartheta = -\frac{\omega^2 \sin\vartheta}{c^2 r} p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

откуда

$$S = \frac{p_0^2\omega^4}{4\pi} \frac{\sin^2\vartheta}{R^2c^3} \cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Поток энергии через сферу радиуса R за время одного полного периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ будет определяться выражением

$$\Sigma = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^\pi \int_0^{2\pi} SR^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4p_0^2\omega^4}{3c^3} \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) dt$$

или

$$\Sigma = \frac{2p_0^2\omega^4}{3c^3}.$$

Энергия, излучаемая гармоническим осциллятором, пропорциональна четвертой степени частоты

$$\Sigma \sim \omega^4$$

или

$$\Sigma \sim \frac{1}{\lambda^4},$$

где λ — длина волны.

ГЛАВА VI

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Распространение тепла в неограниченном пространстве

1. Функция температурного влияния. В главе III было показано, что процесс распространения тепла в однородном изотропном пространстве определяется уравнением теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \qquad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right), \tag{1}$$

где $u(M, t)$ — температура точки $M(x, y, z)$ в момент t, ρ — плотность, c — коэффициент удельной теплоемкости, $k = \text{const}$ и $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности. Уравнение (1) допускает также диффузионное истолкование. В этом случае u — концентрация диффундирующего вещества, $a^2 = D$ — коэффициент диффузии.

Рассмотрим в неограниченном пространстве следующую задачу: найти решение неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + \frac{f}{c\rho} \tag{2}$$

(f — плотность тепловых источников) при начальном условии

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \tag{3}$$

Решение этой задачи может быть представлено в виде суммы

$$u = u_1 + u_2,$$

где u_1 — решение однородного уравнения (1) с неоднородными начальными условиями, u_2 — решение неоднородного уравнения (2) с нулевыми начальными условиями. При изучении соответствующих одномерных задач мы видели, что для их решения достаточно определить функцию источника.

Построим функцию источника для уравнения теплопроводности в неограниченном пространстве,

Предварительно докажем следующую лемму, которая будет нами использована в дальнейшем.

Если решение уравнения $\Delta u - \frac{1}{a^2} u_t = 0$ зависит только от r и t, то функция $v = ru$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{4}$$

В самом деле, записывая оператор Лапласа в сферической системе координат, видим, что функция $u = u(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0;$$

полагая затем $ru = v$, получаем для v уравнение (4) [1]).

Пусть в начале координат помещен непрерывно действующий тепловой источник постоянной мощности q, а в остальном пространстве начальная температура равна нулю

$$u(r, 0) = 0 \text{ при } r \neq 0.$$

Очевидно, что в этом случае температура u является функцией только r и t.

Наличие теплового источника при $r = 0$ означает, что тепловой поток в единицу времени через сферу S_ε (с центром в $r = 0$ и радиусом ε) при $\varepsilon \to 0$ равен q, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[- \int_{S_\varepsilon} \int k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \right] = q.$$

Так как нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$ в силу симметрии постоянна на поверхности S_ε, то

$$- k \frac{\partial u}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \Big|_{r=\varepsilon} \to q \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

что означает наличие у производной $\frac{\partial u}{\partial r}$ при $r = 0$ особенности вида $-\frac{q}{4\pi k r^2}$. Следовательно, сама функция при $r = 0$ должна иметь особенность вида

$$u \sim \frac{q}{4\pi k r},$$

так что произведение $ru = v$ остается ограниченным при $r = 0$.

---

[1]) Сравни с п. 1 § 1 главы V.

Функция v, определяемая условиями

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$v(0, t) = \frac{q}{4\pi k} = v_0, \tag{5}$$

$$v(r, 0) = 0,$$

выражается формулой

$$v(r, t) = v_0\left[1 - \Phi\left(\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right] = q\,\frac{1}{4\pi k}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

(см. формулу (35), гл. III, § 3). Следовательно, решение задачи о распространении температуры при непрерывно действующем источнике мощности q, помещенном в начале координат ($r = 0$), имеет вид

$$u(r, t) = q\,U(r, t) = q\,\frac{1}{4\pi k}\,\frac{1}{r}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha, \tag{6}$$

где $U(r, t)$ — температура, соответствующая единичному источнику ($q = 1$).

Чтобы перейти к случаю мгновенного источника, рассмотрим источник мощности q, помещенный в точку (ξ, η, ζ) и непрерывно действующий в течение промежутка времени τ.

Такой источник эквивалентен двум источникам мощности $+q$ и $-q$, первый из них включается при $t = 0$, второй — при $t = \tau$. Распределение температур при этом выражается формулой

$$u_\tau(r, t) = q\,[U(r, t) - U(r, t - \tau)].$$

За промежуток времени τ выделяется количество тепла $Q = q\tau$, поэтому

$$u_\tau(r, t) = \frac{Q}{\tau}\,[U(r, t) - U(r, t-\tau)].$$

Переходя к пределу при $\tau \to 0$ и считая Q постоянным, находим:

$$u_0(r, t) = \lim_{\tau\to 0} u_\tau(r, t) = Q\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi k r}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}\,\frac{r}{4a^2\sqrt{a^2 t^3}}\,a^2$$

или

$$u_0(r, t) = \frac{Q}{c\rho}\,G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta),$$

где

$$G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}. \tag{7}$$

Функция $G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)$ есть *функция температурного влияния* мгновенного источника тепла. Она представляет собой температуру в точке x, y, z в момент времени t, вызываемую точечным источником мощности $Q = c\rho$, помещенным в момент $t = 0$ в точку (ξ, η, ζ).

Нетрудно убедиться в том, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1. \tag{8}$$

В самом деле, тройной интеграл (8) можно представить в виде произведения трех интегралов, каждый из которых равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = 1 \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

Из формулы (7) видно, что функция влияния G обладает *свойством симметрии*

$$G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta, t; x, y, z),$$

являющимся выражением принципа взаимности: действие в точке (x, y, z) источника, находящегося в точке (ξ, η, ζ), равно действию в точке (ξ, η, ζ) такого же источника, помещенного в точку (x, y, z). Однако относительно переменной t такая симметрия не имеет места, что является выражением необратимости тепловых процессов во времени.

Определим вид функции влияния G в случае двух измерений. Пусть на прямой, параллельной оси z и проходящей через точку (ξ, η), расположен бесконечный линейный источник; обозначим через $\bar{Q} = \text{const}$ мощность источника, отнесенную к единице длины. Функция влияния G_2 такого источника не будет зависеть от z и вполне характеризуется своими значениями в плоскости (x, y). Вычислим функцию G_2. Пусть на элементе $d\zeta$ выделяется количество тепла

$$dQ = \bar{Q}\, d\zeta;$$

тогда распределение температуры в пространстве дается интегралом

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}\, d\zeta}{c\rho}\, (x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta).$$

Вычисляя интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\, d\zeta = 2\sqrt{a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = 2\sqrt{\pi a^2 t} \left(\alpha = \frac{\zeta - z}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

получаем:

$$\bar{u} = \frac{\bar{Q}}{c\rho} G_2,$$

где

$$G_2(x, y, t; \xi, \eta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}. \qquad (8')$$

Сопоставляя эту функцию с формулой (7), видим их сходство по структуре.

Аналогичным способом можно получить выражение для функции источника в одномерном случае. Рассматривая бесконечный плоский источник с постоянной плотностью $\bar{\bar{Q}}$, получаем:

$$\bar{\bar{u}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}\, d\eta\, d\zeta}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) =$$

$$= \frac{\bar{\bar{Q}}}{c\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = \frac{\bar{\bar{Q}}}{c\rho} G_1(x, t, \xi),$$

где

$$G_1(x, t; \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

— функция источника для одного измерения.

В главе III были даны графики, характеризующие поведение функции влияния $G(x, t; \xi)$. Качественная характеристика функции источника, данная в главе III, имеет место и для пространственного случая.

2. Распространение тепла в неограниченном пространстве. Используем теперь функцию источника, полученную в предыдущем пункте, для решения задачи о распространении начальной температуры в неограниченном пространстве.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u, \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \qquad (3)$$

Начальное температурное состояние, очевидно, можно представить как результат суперпозиции действия мгновенных источников, создающих начальную температуру. Рассмотрим элемент объема $d\xi\, d\eta\, d\zeta$, содержащий точку ξ, η, ζ. Для создания начальной температуры $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, необходимо в объеме $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ поместить количество тепла $dQ = c\rho\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

Это сосредоточенное количество тепла создаст в точке (x, y, z) в момент t температуру

$$\frac{dQ}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (9)$$

В силу принципа суперпозиции решение нашей задачи может быть получено интегрированием (9) по всему пространству

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int\int G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (10)$$

Формула (10) получена нами в результате наводящих рассуждений, не определяющих границы ее применимости и не имеющих доказательной силы.

Докажем, что

если функция φ кусочно-непрерывна и ограничена, $|\varphi| < A$, то функция u, определяемая выражением

$$u(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int\int e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad (10')$$

1) ограничена во всем пространстве: $|u| < A$;

2) является решением уравнения теплопроводности при $t > 0$;

3) при $t = 0$ непрерывна в точках непрерывности функции φ, удовлетворяет условию $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$.

Для доказательства того, что (10′) удовлетворяет уравнению (1), воспользуемся известной леммой (см. § 3 главы III).

Если $U(x, y, z, t; \xi)$ при любом значении параметра ξ является решением уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, где $\mathscr{L}(u)$ — линейный дифференциальный оператор, то функция

$$u(x, y, z, t) = \int U(x, y, z, t; \xi)\varphi(\xi)\, d\xi$$

также будет решением уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, если производные функции u, входящие в оператор $\mathscr{L}(u)$, можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла.

В нашем случае $U = G$ удовлетворяет уравнению теплопроводности при любых ξ, η, ζ. Как известно, дифференцирование по параметру под знаком несобственного интеграла возможно, если: 1) производная по параметру от подинтегральной функции непрерывна и 2) интеграл, полученный после формального дифференцирования, равномерно сходится.

Произведя формальное дифференцирование интеграла (10′) по x, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\left(-\frac{x-\xi}{2a^2t}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \qquad (11)$$

Подинтегральная функция непрерывна при $\bar{t}>t>0$, а наличие множителя $e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$ обеспечивает равномерную сходимость, если φ ограничено: $|\varphi|<A$. Аналогичные результаты мы получим при повторном дифференцировании по x и при дифференцировании по t; то же относится и к дифференцированию по y и z. Таким образом, функция G удовлетворяет всем условиям леммы при $t>0$. Следовательно, функция u при $t>0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Ограниченность функции u, определяемой формулой (10′), которую мы перепишем в виде

$$u(M,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\int G(M,M',t)\,\varphi(M')\,d\tau_{M'}$$
$$(M=M(x,\ y,\ z),\qquad M'=M'(\xi,\ \eta,\ \zeta)),$$

устанавливается непосредственно, если принять во внимание равенство (8):

$$|u|<A\int_{-\infty}^{\infty}\int\int G\,d\tau=A. \qquad (12)$$

Перейдем к доказательству непрерывности $u(x, y, z, t)$ при $t=0$.

Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, являющуюся точкой непрерывности функции φ, и докажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$|u(M,t)-\varphi(M_0)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |\overline{MM_0}|<\delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad t<\delta(\varepsilon). \qquad (13)$$

Построим вспомогательную область T_1, содержащую точку M_0; ее размеры будут определены ниже; остальную часть пространства обозначим через T_2. Принимая во внимание равенства

$$u(M,\ t)=\int_{T_1}\int\int G(M,M',t)\,\varphi(M')\,d\tau_{M'}+$$
$$+\int_{T_2}\int\int G(M,M',t)\,\varphi(M')\,d\tau_{M'},$$

$$\varphi(M_0)=\int_{T_1}\int\int G(M,M',t)\,\varphi(M_0)\,d\tau_{M'}+$$
$$+\varphi(M_0)\int_{T_2}\int\int G(M,M',t)\,d\tau_{M'},$$

а также положительность функции $G(M, M', t)$, будем иметь:

$$|U(M, t) - \varphi(M_0)| \leqslant J_1 + J_2, \tag{14}$$

где

$$J_1 = \int\int_{T_1}\int G(M, M', t)\,|\varphi(M') - \varphi(M_0)|\,d\tau_{M'}, \tag{15}$$

$$J_2 = 2A \int\int_{T_2}\int G(M, M', t)\,d\tau_{M'}. \tag{16}$$

Из непрерывности функции φ в фиксированной точке M_0 следует: каково бы ни было $\eta > 0$, найдется такое $\delta'(\eta) > 0$, что

$$|\varphi(M') - \varphi(M_0)| < \eta, \quad \text{если} \quad |\overline{M'M_0}| < \delta'(\eta).$$

Следовательно, если диаметр области T_1 не превосходит $\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, то

$$J_1 < \frac{\varepsilon}{3}\int\int_{T_1}\int G\,d\tau_{M'} < \frac{\varepsilon}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int\int G\,d\tau = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{17}$$

Остановимся теперь подробно на выборе области T_1. В качестве T_1 мы можем выбрать сферу с центром в точке $M(x, y, z)$, что удобно для оценки интеграла J_2. Оценка (17) интеграла J_1 сохраняет силу, если радиус этой сферы выбрать равным

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\,\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \text{и если} \quad |\overline{MM_0}| < \rho_0.$$

Переходя к сферической системе координат с центром в точке M, получаем:

$$\int\int_{T_1}\int G\,d\tau = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \int_0^{\rho_0} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\, r^2\,dr =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\rho_0}{2\sqrt{a^2t}}} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\,d\alpha \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\,d\alpha = 1 \qquad \left(\alpha = \frac{r}{2\sqrt{a^2t}}\right),$$

так как

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\,d\alpha = -\frac{1}{2}\,\alpha e^{-\alpha^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Таким образом,

$$\int\int_{T_2}\int G\,d\tau = 1 - \int\int_{T_1}\int G\,d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta''(\varepsilon)$, что

$$\int\int\int_{T_2} G\, d\tau < \frac{\varepsilon}{3A},$$

и, следовательно,

$$J_2 < \frac{2\varepsilon}{3}, \tag{18}$$

если только $t < \delta''(\varepsilon)$.

Выбирая из чисел $\frac{1}{2}\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ и $\delta''(\varepsilon)$ наименьшее и обозначая его через $\delta(\varepsilon)$, будем иметь неравенство

$$|u(M, t) - \varphi(M_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\overline{MM_0}| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad t < \delta(\varepsilon), \tag{13}$$

которое и доказывает непрерывность $u(M, t)$ при $t = 0$ во всякой точке M_0 непрерывности функции $\varphi(M)$.

Перейдем теперь к решению неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u + \frac{f}{c\rho}$$

при нулевом начальном условии

$$u(x, y, z, 0) = 0.$$

Рассмотрим точку (ξ, η, ζ) в момент времени $\tau < t$. Количество тепла, выделяющегося в элементе $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ за время $d\tau$ и равное

$$dQ = f\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau,$$

вызывает в точке (x, y, z) в момент времени t температуру

$$\frac{1}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Пользуясь принципом суперпозиции, мы можем написать решение поставленной задачи в виде

$$u(x, y, z, t) =$$

$$= \int_0^t \int\int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{1}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau. \tag{19}$$

На доказательстве справедливости этой формулы и выяснении условий ее применимости мы не останавливаемся.

Задачи для полупространства с однородными граничными условиями первого и второго рода решаются методом отражения.

§ 2. Распространение тепла в ограниченных телах

1. Схема метода разделения переменных. Ранее мы рассматривали распространение тепла в неограниченном пространстве. При изучении распространения тепла в ограниченном теле необходимо к уравнению и начальному условию добавить условия на границе тела, которые в простейших случаях являются граничными условиями первого, второго или третьего рода.

Рассмотрим простейшую задачу с однородным граничным условием первого рода:

$$\left.\begin{array}{l} \text{найти решение уравнения теплопроводности} \\ \quad u_t = a^2 \Delta u \qquad \text{внутри } T \\ \text{с начальным условием} \\ \quad u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \\ \text{и граничным условием} \\ \quad u|_\Sigma = 0, \\ \text{где } \Sigma \text{ — граница области } T. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Решение этой задачи может быть получено обычным методом разделения переменных, изложенным применительно к уравнению $u_{tt} = a^2 \Delta u$ в главе V, § 2; применение этого метода к нашей задаче проходит совершенно аналогично.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\left.\begin{array}{l} \text{найти нетривиальное решение уравнения} \\ \quad u_t - a^2 \Delta u = 0, \\ \text{удовлетворяющее однородному граничному условию} \\ \quad u|_\Sigma = 0 \\ \text{и представимое в виде произведения} \\ \quad u(M, t) = v(M) T(t). \end{array}\right\} \tag{2}$$

Разделяя переменные обычным способом, приходим к следующим условиям, определяющим функции $v(M)$ и $T(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta v + \lambda v = 0 \quad \text{в } T, \\ v = 0 \quad \text{на } \Sigma \end{array}\right\} \tag{3}$$

и

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \tag{4}$$

Для функции v получаем задачу на отыскание собственных значений,

с которой мы встречались при рассмотрении колебаний ограниченных объемов (см. гл. V, § 3, п. 1).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — собственные значения, а $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ — собственные функции задачи (3). Функции $\{v_n\}$ образуют ортогональную систему.

Соответствующие функции $T_n(t)$ имеют вид

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t},$$

и вспомогательная задача имеет нетривиальное решение

$$u_n(M, t) = C_n v_n(M)\, e^{-a^2\lambda_n t}. \tag{5}$$

Общее решение исходной задачи может быть представлено в виде

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(M). \tag{6}$$

Удовлетворяя начальному условию

$$u(M, 0) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M), \tag{7}$$

находим коэффициенты

$$C_n = \frac{\int\limits_T \varphi(M') v_n(M')\, d\tau_{M'}}{N_n},$$

где

$$N_n = \int\limits_T v_n^2(M')\, d\tau_{M'} \text{ — норма функции } v_n.$$

Функция (6) и представляет решение задачи.

Уравнение

$$u_t - a^2 \Delta u = f(M, t) \qquad \left(f = \frac{F}{c\rho}\right) \tag{8}$$

при однородном граничном и нулевом начальном условиях может быть также решено методом разделения переменных.

Полагая, как обычно,

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) v_n(M) \tag{9}$$

и разлагая функцию $f(M, t)$ по собственным функциям $v_n(M)$

$$f(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(M), \quad f_n(t) = \frac{1}{N_n} \int\limits_T f(M', t) v_n(M')\, d\tau_{M'}, \tag{10}$$

получаем для определения $T_n(t)$ уравнение

$$T_n' + a^2\lambda_n T_n = f_n(t) \tag{11}$$

с начальным условием $T_n(0) = 0$, если $u(M, 0) = 0$, решение которого имеет вид

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Отсюда получаем:

$$u(M, t) = \int_0^t \int_T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)} \frac{v_n(M)\, v_n(M')}{N_n} \right\} f(M', \tau)\, d\tau_{M'}\, d\tau. \tag{13}$$

Выражение в фигурных скобках, очевидно, соответствует функции влияния мгновенного источника мощности $Q = c\rho$, помещенного в точку M' в момент τ,

$$G(M, t, M', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)\, v_n(M')}{N_n} e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}. \tag{14}$$

Решение первой краевой задачи $\bar{u}$ для уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями $\bar{u}|_\Sigma = \mu$ легко приводится к решению u неоднородного уравнения с однородными граничными условиями $u|_\Sigma = 0$, если положить

$$\bar{u} = u + \Phi, \tag{15}$$

где Φ — произвольная (достаточно гладкая) функция, принимающая значения μ на Σ (см. главу III, § 2). Весьма часто встречающийся случай постоянных граничных значений, $\mu_0 = \text{const}$, приводится к задаче с однородными граничными условиями, если ввести функцию

$$\bar{u} = u + \mu_0 \qquad (\Phi = \text{const} = \mu_0),$$

представляющую отклонение от стационарного решения.

Таким образом, основная трудность при решении задач о распространении тепла в ограниченной области состоит в нахождении собственных функций и собственных значений для данной области.

Форма решения (6), полученная методом разделения переменных, удобна для исследования достаточно развитой стадии процесса при больших t. В самом деле, собственные значения λ_n для любой области быстро возрастают с номером n. Поэтому при $t > 0$ ряд быстро сходится и, начиная с некоторого момента, первый отличный от нуля член преобладает над суммой остальных членов

$$u(M, t) \approx C_1 v_1(M)\, e^{-a^2\lambda_1 t}. \tag{16}$$

Это соответствует тому физическому факту, что, независимо от начального распределения, начиная с некоторого момента, в теле

устанавливается «регулярный» температурный режим, при котором «профиль» температуры не меняется во времени и амплитуда убывает по экспоненте с возрастанием времени. Этот факт положен в основу нестационарных методов определения коэффициента температуропроводности. В самом деле, измеряя температуру тела в произвольной точке M_0, находим, что

$$\ln|u(M_0, t)| \approx -a^2\lambda_1 t + \ln|C_1 v_1(M)|. \tag{17}$$

График этой функции изображается, начиная с некоторого момента времени, прямой линией с угловым коэффициентом $-a^2\lambda_1$. Зная величину λ_1, зависящую от формы области, можно найти коэффициент температуропроводности.

2. Остывание круглого цилиндра. Рассмотрим задачу об остывании бесконечно длинного цилиндра радиуса r_0, имеющего некоторую начальную температуру, если на поверхности поддерживается температура, равная нулю. Предположим, что начальная температура не зависит от z (ось z направлена вдоль оси цилиндра). Тогда, очевидно, и в дальнейшем температура не будет зависеть от z и меняется только в поперечном сечении S цилиндра. Выбирая в этом сечении полярную систему координат с полюсом, находящимся в центре круга S, мы приходим к задаче об определении функции $u(r, \varphi, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{18}$$

начальному условию

$$u(r, \varphi, 0) = \Phi(r, \varphi) \tag{19}$$

и граничному условию

$$u(r_0, \varphi, t) = 0. \tag{20}$$

Как мы видели, решение задачи такого типа может быть представлено в виде

$$u = \sum Ce^{-a^2\lambda t} v(M), \tag{21}$$

где суммирование распространяется на все собственные функции задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \tag{22}$$

$$v(r_0, \varphi) = 0.$$

Эта задача на собственные значения была исследована нами при изучении колебаний круглой мембраны (см. главу V, § 3). Каждому собственному значению

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 \tag{23}$$

соответствуют две собственные функции

$$\overline{v}_{nm} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\varphi$$

и

$$\overline{\overline{v}}_{nm} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\sin n\varphi, \tag{24}$$

нормы которых равны

$$N_{nm} = \frac{\varepsilon_n r_0^2}{2}\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} 1; & n \neq 0; \\ 2; & n = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где $\mu_m^{(n)}$ — m-й корень уравнения

$$J_n(\mu) = 0. \tag{26}$$

Пользуясь выражениями для v и λ, получаем:

$$u(r, \varphi, t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\overline{C}_{mn}\cos n\varphi + \overline{\overline{C}}_{mn}\sin n\varphi\right) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) e^{-a^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{27}$$

где коэффициенты $\overline{C}_{nm}$ и $\overline{\overline{C}}_{nm}$ определяются начальной функцией

$$\left.\begin{aligned} \overline{C}_{nm} &= \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\varphi\, r\, d\varphi\, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2}, \\ \overline{\overline{C}}_{nm} &= \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\sin n\varphi\, r\, d\varphi\, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2}\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2}, \\ \varepsilon_n &= \begin{cases} 1; & n \neq 0; \\ 2; & n = 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Если начальная температура Ф зависит только от r, то двойной ряд (27) заменяется однократным рядом

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) e^{-a^2\left(\frac{\mu_m}{r_0}\right)^2 t}, \tag{29}$$

где

$$C_m = \frac{2\int_0^{r_0} \Phi(r)\, J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\, dr}{r_0^2 [J_1(\mu_m^{(0)})]^2} \qquad (J_1 = -J_0'), \tag{30}$$

а $\mu_m^{(0)}$ — m-й корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Остановимся подробнее на задаче об остывании равномерно нагретого цилиндра при нулевой температуре на поверхности. Если начальная температура

$$u(r,\ 0) = \Phi = u_0,$$

то

$$C_m = \frac{2u_0\int_0^{r_0} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\, dr}{r_0^2 [J_1(\mu_m^{(0)})]^2} = \frac{2u_0 \frac{r_0}{\mu_m^{(0)}} \left[r J_1\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)\right]_0^{r_0}}{r_0^2 [J_1(\mu_m^{(0)})]^2} = \frac{2u_0}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})}, \tag{30'}$$

так как $\alpha J_0(\alpha) = [\alpha J_1(\alpha)]'$. Таким образом мы получаем:

$$\frac{u(r,\ t)}{u_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_0(\mu_m^{(0)}\rho)}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} e^{-(\mu_m^{(0)})^2 \theta} \qquad \left(\rho = \frac{r}{r_0},\quad \theta = \frac{a^2 t}{r_0^2}\right). \tag{31}$$

В таблицах цилиндрических функций (см. стр. 679, таблицу 3) даются численные значения как для корней $\mu_m^{(0)}$, так и для $J_1(\mu_m^{(0)})$.

В частности,

$$\mu_1^{(0)} = 2{,}40, \quad J_1(\mu_1^{(0)}) = 0{,}52,$$
$$\mu_2^{(0)} = 5{,}52, \quad J_1(\mu_2^{(0)}) = -0{,}34.$$

Ряд (31) сходится быстро и при больших t можно ограничиться первым членом этого ряда. В частности, на оси цилиндра

$$\frac{u(r,\ t)}{u_0} = \frac{2}{2{,}40 \cdot 0{,}52} 1{,}60 e^{-(2{,}40)^2 \theta} = 1{,}60\, e^{-5{,}76\theta} \qquad \left(\theta = \frac{a^2 t}{r_0}\right). \tag{32}$$

3. Определение критических размеров. В главе III было показано, что процесс диффузии неустойчивого газа, скорость распада которого пропорциональна концентрации, приводит к уравнению

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad (\beta < 0). \tag{33'}$$

Большой интерес представляют процессы диффузии при наличии *цепных реакций*. Цепные реакции характеризуются тем, что частицы диффундирующего вещества, вступая в реакцию с окружающей средой, «размножаются». Так, например, при столкновении нейтронов с «активными» ядрами урана происходит реакция деления ядер, сопро-

вождающаяся появлением новых нейтронов, число которых больше единицы. Эти нейтроны в свою очередь вступают в реакцию с другими активными ядрами, вызывая их деление с выделением новых нейтронов и т. д. Таким образом происходит процесс размножения нейтронов, носящий характер цепной реакции.

Рассматривая описанный процесс в «диффузионном приближении», мы приходим к следующему уравнению:

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad (\beta > 0), \tag{33''}$$

так как цепная реакция эквивалентна наличию источников диффундирующего вещества (нейтронов), пропорциональных концентрации (плотности нейтронов).

Рассмотрим следующую задачу:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \text{ внутри } T, \tag{33}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(M, 0) = \varphi(M) \tag{34}$$

и граничному условию

$$u|_\Sigma = 0. \tag{35}$$

С помощью подстановки

$$u(M, t) = \bar{u}(M, t)\, e^{\beta t} \tag{36}$$

уравнение (33) переходит в уравнение (1); начальные и граничные условия при этом остаются неизменными. Таким образом, искомая функция u имеет вид

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{(\beta - a^2\lambda_n)t}\, v_n(M), \tag{37}$$

где C_n определяются начальной функцией по формуле (10). В случае $\beta < 0$ (диффузия с распадом) показатели ряда (37) больше соответствующих показателей ряда (6). Это означает, что при наличии распада убывание концентрации происходит быстрее по сравнению со случаем чистой диффузии ($\beta = 0$). В случае $\beta > 0$ (диффузия с размножением), если хотя бы один из показателей $\beta - a^2\lambda > 0$, т. е. $\beta > a^2\lambda_1$, то с течением времени будет происходить, вообще говоря ($C_1 \neq 0$), нарастание концентрации по экспоненциальному закону (цепная реакция). Величина β является характеристикой вещества (коэффициент размножения), а λ_1 существенно зависит от формы и размеров области. Будем говорить, что некоторая область $T_{\text{кр}}$ имеет при заданном β *критические размеры*, если $\lambda_1 = \frac{\beta}{a^2}$. Определим критические размеры для бесконечного слоя, цилиндра и сферы.

1. Слой $0 \leqslant x \leqslant l$. Считая задачу одномерной, имеем (см. главу II, § 2):

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Критическая толщина слоя $l_{\text{кр}}$, начиная с которой будет происходить процесс лавинного нарастания концентрации u, определяется из условия

$$l_{\text{кр}} = \frac{a\pi}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{3{,}14a}{\sqrt{\beta}} \quad (\beta > 0). \tag{38}$$

2. Бесконечный цилиндр. Считая задачу плоской, видим, что наименьшее значение λ соответствует собственной функции, обладающей радиальной симметрией, и равно

$$\lambda_1^{(0)} = \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_0}\right)^2 a \quad (\mu_2^{(0)} = 2{,}4048).$$

Отсюда для критического диаметра получаем формулу

$$d_{\text{кр}} = \frac{2\mu_1^{(0)} a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{4{,}80a}{\sqrt{\beta}}. \tag{39}$$

3. Сфера. Наименьшее значение λ соответствует собственной функции, обладающей сферической симметрией, и равно

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2,$$

откуда для критического диаметра $D_{\text{кр}}$ получаем формулу

$$D_{\text{кр}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{6{,}28a}{\sqrt{\beta}}. \tag{40}$$

§ 3. Краевые задачи для областей с подвижными границами

§ 1. Формула Грина для уравнения теплопроводности и функция источника. Для уравнения теплопроводности можно ставить краевые задачи для областей с границами, перемещающимися со временем.

Для простоты будем рассматривать эту задачу для уравнения с одной геометрической переменной

$$\mathscr{L}(u) = a^2 u_{xx} - u_t = 0, \tag{1}$$

хотя все изложенное ниже может быть перенесено на случай многих переменных.

Рассмотрим область $BAEF$, ограниченную характеристиками AB и EF ($t = \text{const}$) и кривыми, определяемыми уравнениями

$$x = \chi_1(t) \quad (\text{для } AE)$$

и

$$x = \chi_2(t) \quad (\text{для } BF) \text{ (рис. 81).}$$

Первая краевая задача для этой области состоит в определении решения уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющего начальному и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi(x) \text{ на } AB, \\ u|_{x=\chi_1(t)} &= \mu_1(t), \quad u|_{x=\chi_2(t)} = \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из принципа максимального значения непосредственно следует, что эта задача не может иметь более одного непрерывного решения. Аналогично могут быть поставлены и другие краевые задачи.

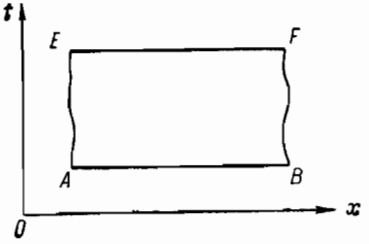


Рис. 81.

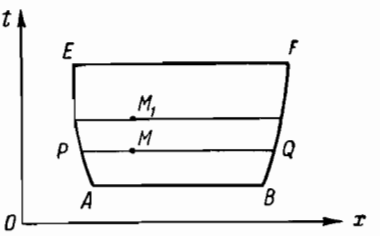


Рис. 82.

Установим формулу Грина для уравнения (1) и интегральное представление решений этой задачи.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{M}(v) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t}; \tag{3}$$

интегрируя выражение

$$\psi \mathcal{L}(\varphi) - \varphi \mathcal{M}(\psi)$$

по некоторой области $PABQ$ (рис. 82), где $\varphi(x, t)$ и $\psi(x, t)$ — произвольные, достаточное число раз дифференцируемые функции, получим после простого преобразования

$$\int\int [\psi \mathcal{L}(\varphi) - \varphi \mathcal{M}(\psi)]\, dx\, dt = \int \varphi\psi\, dx + a^2\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt,$$

где правый интеграл берется по замкнутому контуру $PABQ$. Если $\mathcal{L}(\varphi) = 0$ и $\mathcal{M}(\psi) = 0$, то, выписывая подробнее правую часть, получим:

$$\int_{PQ} \varphi\psi\, dx = \int_{AB} \varphi\psi\, dx + \int_{BQ} \left[\varphi\psi\, dx + a^2\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right] - \\ - \int_{AP} \left[\varphi\psi\, dx + a^2\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]. \tag{4}$$

Пусть $\varphi(x, t) = u(x, t)$ — какое-либо решение уравнения теплопроводности $L(u) = 0$, а $\psi = G_0(x, t, \xi, \tau)$ — функция источника для этого уравнения на неограниченной прямой

$$G_0(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, \tag{5}$$

часто называемая *фундаментальным решением уравнения теплопроводности*. Функция $G_0(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}(G_0) = 0$ по переменным x, t и сопряженному уравнению $\mathcal{M}(G_0) = 0$ по переменным ξ, τ.

Пусть $M(x, t)$ — некоторая фиксированная точка внутри области $EAFB$, в которой мы хотим определить значение функции $u(x, t)$, а M_1 — точка с координатами $x, t+h$, где $h>0$. Проводя через точку M характеристику PQ, заменяя в формуле (4) x на ξ, t на τ и применяя ее затем к области $ABQP$ (рис. 82) и функциям

$$\varphi = u(x, t) \text{ и } \psi = G_0(x, t+h, \xi, \tau), \tag{6}$$

будем иметь:

$$\int_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi, t)\, d\xi = \int_{PABQ} u(\xi, \tau)\, G_0(x, t+h, \xi, \tau)\, d\xi + a^2\left(G_0\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right) d\tau. \tag{7}$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ и учитывая непрерывность по h функции $G_0(x, t+h, \xi, \tau)$ и $\frac{\partial G_0}{\partial \xi}$ на $PABQ$, а также равенство

$$\lim_{h\to 0} \int_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi, t)\, d\xi = u(x, t)\ ^1), \tag{8}$$

если (x, t) лежит на отрезке PQ, получаем основную интегральную формулу

$$u(x, t) = \int_{PABQ} u(\xi, \tau)\, G_0(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + \int_{BQ+PA} a^2\left(G_0\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right) d\tau, \tag{9}$$

дающую представление произвольных решений уравнения теплопроводности. Перепишем ее еще раз более подробно

$$u(x, t) = \int_{PABQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} u(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \int_{BQ+PA} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\tau - a^2 \int_{BQ+PA} u(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}}\right) d\tau. \tag{9'}$$

Эта формула не дает решений краевых задач, так как для вычисления правой части надо знать значения не только u, но и $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ вдоль дуг AE и BF.

При помощи преобразования, подобного тому, которое было выполнено для уравнения Лапласа при введении функции источника, можно исключить из этой формулы $\frac{\partial u}{\partial \xi}$.

Пусть v — какое-либо решение сопряженного уравнения $\mathfrak{M}(v) = 0$, обращающееся в нуль на PQ, и u — решение уравнения теплопроводности

---

[1]) См. главу III, § 3.

$\mathscr{L}(u) = 0$. Применяя формулу (4) к функциям v и u для области $PABQ$, получим:

$$0 = \int\limits_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, v(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\tau \right]. \tag{10}$$

Вычитая из (9) равенство (10), будем иметь:

$$u(x, t) = \int\limits_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\tau \right], \tag{11}$$

где

$$G(x, t, \xi, \tau) = G_0(x, t, \xi, \tau) - v. \tag{12}$$

Если функцию v выбрать так, чтобы

$$G = 0 \text{ на } PA \text{ и } BQ,$$

то получим интегральное представление для $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \int\limits_{AB} u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \int\limits_{AP} u \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau - a^2 \int\limits_{BQ} u \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau. \tag{13}$$

Формула (13) дает решение краевой задачи, в условиях которой задаются значения функции u на AP и BQ.

Остановимся подробнее на рассмотрении функции G. Она определяется при помощи представления (12), где функция $v(\xi, \tau)$ характеризуется следующими условиями:

1° $v(\xi, \tau)$ определена в области $PABQ$ и для $\tau < t$ удовлетворяет сопряженному уравнению $\mathscr{M}(v) = 0$.

2° $v = 0$ на PQ, т. е. при $\tau = t$.

3° $v(\xi, \tau) = -G_0(x, t, \xi, \tau)$ на PA и QB.

В силу этих условий функция v зависит от параметров x, t, так что $v = v(x, t, \xi, \tau)$, и для ее определения надо решить краевую задачу для уравнения $\mathscr{M}(v) = 0$, которая эквивалентна решению краевой задачи типа (2) для уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, в чем легко убедиться изменением знака у τ. Таким образом, при представлении функции $u(x, t)$ с помощью формулы (11), дающей решение краевой задачи (2), основная трудность заключается в нахождении функции $v(x, t, \xi, \tau)$.

Рассмотрим функцию $\overline{v}(x, t, \xi, \tau)$, определяемую условиями:

1° $\overline{v}(x, t, \xi, \tau)$ определена в области $PABQ$ для $t > \tau$ и, как функция переменных x, t, удовлетворяет уравнению теплопроводности $\mathscr{L}(v) = 0$.

2° $\overline{v} = 0$ на AB, т. е. при $t = \tau$.

3° $\overline{v} = -G_0$ на AP и BQ.

Докажем, что $v(x, t, \xi, \tau) = \overline{v}(x, t, \xi, \tau)$.

Рассмотрим функцию $\overline{G}(x, t, \xi, \tau) = G_0 + \overline{v}$. Очевидно, что для любого решения $\overline{u}$ уравнения $\mathscr{M} = 0$ имеет место формула, аналогичная (9),

$$\overline{u}(\xi, \tau) = \int\limits_{BQPA} \overline{u} G_0\, dx + a^2 \left(\overline{u} \frac{\partial G_0}{\partial x} - G_0 \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \right) dt, \tag{9'}$$

а также формула, аналогичная (13),

$$\overline{u}(\xi, \tau) = \int\limits_{PQ} \overline{u}\, \overline{G}\, dx + a^2 \int\limits_{BQ} \overline{u} \frac{\partial \overline{G}}{\partial x}\, dt - a^2 \int\limits_{AP} \overline{u} \frac{\partial \overline{G}_0}{\partial x}\, dt. \tag{13'}$$

Эти формулы могут быть получены из формул (9) и (13) изменением знака у τ, так как при этом уравнение $\mathscr{M} = 0$ переходит в уравнение $\mathscr{L} = 0$.

Применяя формулу (13) к области $PQRS$ (рис. 83), где RS — отрезок прямой, соответствующий ординате θ, где $t > \theta > \tau$, и к непрерывному в этой области решению $u(x, t) = \overline{G}(x, t, \xi, \tau)$ уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, получим:

$$\overline{G}(x, t, \xi, \tau) = \int_{RS} \overline{G}(x', \theta, \xi, \tau)\, G(x, t, x', \theta)\, dx',$$

так как интегралы по RP и SQ в силу 3° равны нулю.

Применяя аналогично формулу (13′) к области $ARSB$ и непрерывному в этой области решению $u(\xi, \eta) = G(x, t, \xi, \eta)$ уравнения $\mathscr{M} = 0$, получим:

$$G(x, t, \xi, \eta) = \int_{RS} G(x, t, x', \theta)\, \overline{G}(x', \theta, \xi, \tau)\, dx',$$

так как интегралы по $BS = AR$ равны нулю. Сравнение этих формул дает, что

$$G(x, t, \xi, \tau) \equiv \overline{G}(x, t, \xi, \tau).$$

Это равенство доказывает, что функция G, рассматриваемая как функция x, t имеет при $t = \tau$ и $x = \xi$ особенность, характерную для функции источника равна нулю при $t = \tau$ и $x \neq \xi$, удовлетворяет уравнению $\mathscr{L} = 0$ внутри $APQB$ и обращается в нуль на AP и BQ. Такую функцию естественно назвать *функцией влияния точечного источника* для уравнения теплопроводности области $APQB$.

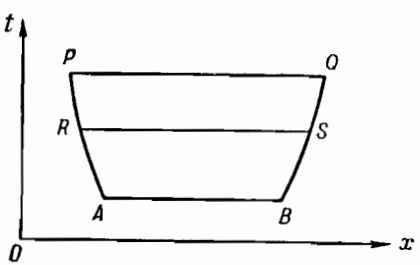


Рис. 83.

Итак, любое решение уравнения теплопроводности может быть представлено формулой (13) при помощи функции источника.

Если задано неоднородное уравнение $\mathscr{L}(u) = f(x, t)$, то в формуле (13) к правой части следует прибавить слагаемое

$$\int_S \int G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

2. Решение краевой задачи. Полученная выше формула (13) дает решение краевой задачи для ограниченного отрезка с подвижными концами. Если же концы отрезка AB неподвижны, то дуги AE и BF заменяются отрезками прямых, параллельных оси t. Область S в этом случае имеет вид прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. Из общей формулы (11) можно предельным переходом получить формулу Пуассона, дающую решение уравнения теплопроводности с заданным начальным условием на бесконечной прямой.

Предположим, что в части полосы, ограниченной двумя характеристиками $t = 0$ и $t = \theta$, проходящими через точки A и E, функции u и u_x удовлетворяют неравенствам

$$u(x, t)\, e^{-Kx^2} < N \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x}\, e^{-Kx^2} < N, \tag{A}$$

где $K > 0$ и $N > 0$ — некоторые числа. Заменим дугу BQ (рис. 84) отрезком прямой $x = l$, где l — положительное число, которое в дальнейшем будем

неограниченно увеличивать. При этом мы будем исходить из формулы (9), которую перепишем в виде

$$u(x,t)=\int\limits_{PABQ}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\left[u(\xi,\tau)\,d\xi+a^2\frac{\partial u}{d\xi}\,d\tau-u(\xi,\tau)\frac{x-\xi}{2(t-\tau)}\,d\tau\right].$$

Рассмотрим интеграл по отрезку BQ

$$\int\limits_{BQ}\frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\left[a^2\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=l}-u(l,\tau)\frac{x-l}{2(t-\tau)}\right]d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t a^2\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=l}\frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\,d\tau-\int\limits_0^t u(l,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}(x-l)\,d\tau}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}\,(t-\tau)}=I_1+I_2$$

и покажем, что он стремится к нулю при $l\to\infty$.

Оценим интеграл I_1 при больших значениях l

$$|I_1|\leqslant\frac{Na^2}{2\sqrt{\pi a^2}}e^{Kl^2-\frac{l^2}{16a^2\delta}}\int\limits_0^t\frac{dt}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$\left(\text{если } x<\frac{l}{2}\text{ и }(t-\tau)<\delta\right).$$

Очевидно, что $|I_1|\to 0$ при $l\to\infty$, так как M — фиксированное число, а δ может быть выбрано как угодно малым числом, например так, что

$$K<\frac{1}{16a^2\delta}.$$

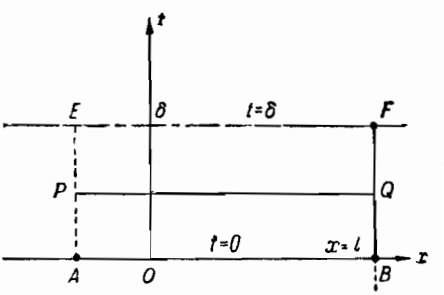


Рис. 84.

Аналогично доказывается, что $|I_2|\to 0$ при $l\to\infty$.

Если для функции $u(x,t)$ и ее производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ неравенства (A) выполняются также при отрицательных x, то можно принять за кривую AE отрезок прямой $x=-l$ и, повторяя изложенные выше рассуждения, убедиться в том, что при предельном переходе интеграл по PA в формуле (9) стремится к нулю. В результате мы приходим к известной нам из главы III, § 3 формуле Пуассона [1])

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{t}}\,u(\xi,0)\,d\xi.$$

[1]) Приведенные рассуждения нельзя рассматривать как вывод этой формулы, так как мы основывались на ней при выводе формулы (9).

Рассматривая полубесконечную область и предполагая, что для функции источника $G(x, t, \xi, \tau)$ выполнены неравенства (А), с помощью аналогичных рассуждений найдем:

$$u(x, t) = -\int_{PA} a^2 \mu(\tau) \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi = x_A} d\tau + \int_{x_A}^{\infty} \varphi(\xi)\, G(x, t, \xi, 0)\, d\xi, \tag{14}$$

где

$$\mu(t) = u(x_A, t) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = u(x, 0).$$

Как нетрудно убедиться, функция источника для полубесконечной прямой $x \geqslant 0$ может быть получена методом отражения и равна

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right],$$

так как она представима в виде (12), удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным x, t и обращается в нуль при $x = 0$:

$$G(0, t, \xi, \tau) = 0.$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\,[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

и, подставляя ее значение в (14), получим формулу

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a^2 x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau, \tag{15}$$

которая определяет функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < \infty, \quad t > 0)$$

и дополнительным условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= \mu(t) \end{aligned} \qquad (0 < x < \infty).$$

3. Функция источника для отрезка. Решение уравнения теплопроводности на ограниченном отрезке $0 < x < l$ дается формулой (11), которая после замены дуг PA и BQ отрезками прямых и сдвига начала координат в точку A принимает вид

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} \mu_1(\tau)\, d\tau -$$

$$- a^2 \int_0^t \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=l} \mu_2(\tau)\, d\tau + \int_0^l G(x, t, \xi, 0)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

где

$$\mu_1(t) = u(0, t), \quad \mu_2(t) = u(l, t), \quad \varphi(x) = u(x, 0).$$

Функция источника $G(x, t, \xi, \tau)$ для отрезка может быть построена методом отражения. Помещая положительные источники в точках $2nl + \xi$ и отрицательные источники в точках $2nl - \xi$, представим функцию источника с помощью ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G_0(x, t, 2nl + \xi, \tau) - G_0(x, t, 2nl - \xi, \tau)], \tag{16}$$

где

$$G_0(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

— функция источника для неограниченной прямой.

Сходимость ряда, а также выполнение граничных условий

$$G|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad G|_{x=l} = 0$$

устанавливаются без труда.

В § 2 главы III была получена иная форма представления функции источника

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi n}{l} \xi. \tag{17}$$

Докажем эквивалентность обоих представлений.

Формулу (17) можно рассматривать как разложение функции $G(x, t, \xi, \tau)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $(0, l)$

$$G(x, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x, t, \tau) \sin\frac{\pi n}{l} \xi. \tag{18}$$

Вычислим коэффициенты Фурье G_n функции G, определяемой рядом (16),

$$G_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t, \xi, \tau) \sin\frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^l G_0(x, t, 2nl + \xi_1, \tau) \sin\frac{\pi n}{l} \xi_1 \, d\xi_1 - \right.$$

$$\left. - \int_0^l G_0(x, t, 2nl - \xi_2, \tau) \sin\frac{\pi n}{l} \xi_2 \, d\xi_2 \right\}.$$

Вводя новые переменные интеграции

$$\xi' = 2nl + \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi'' = 2nl - \xi_2,$$

получим:

$$G_n = \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{2nl}^{(2n+1)l} G_0(x, t, \xi', \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi' \, d\xi' + \right.$$

$$\left. + \int_{(2n-1)l}^{2nl} G_0(x, t, \xi'', \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi'' \, d\xi'' \right.,$$

откуда следует, что

$$G_n = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, t, \xi, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Введем переменную

$$\lambda = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 (t-\tau)}}.$$

Тогда

$$d\lambda = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 (t-\tau)}}; \quad \sin \frac{\pi n}{l} \xi = \sin \frac{\pi n}{l} (x + 2\sqrt{a^2 (t-\tau)}\lambda) =$$

$$= \sin \frac{\pi n}{l} x \cos \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\lambda + \cos \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\lambda;$$

$$G_n = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n}{l} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \cos \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\lambda \, d\lambda +$$

$$+ \frac{2}{l} \cos \frac{\pi n}{l} x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \sin \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\lambda \, d\lambda.$$

Второй интеграл равен нулю, так как под интегралом стоит нечетная относительно начала координат функция.

Первый интеграл является частным случаем интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos \beta\lambda \, d\lambda,$$

вычисленного в § 3 главы III и равного

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

В нашем случае

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)},$$

так что

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)}$$

и

$$G_n = \frac{2}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Подставляя найденное выражение для коэффициентов Фурье A_n в формулу (18), сразу же получаем второе представление (17) для функции источника G. Тем самым эквивалентность двух разных представлений (16) и (17) доказана.

§ 4. Тепловые потенциалы

1. Свойства тепловых потенциалов простого и двойного слоя. Как мы видели, всякое решение уравнения теплопроводности может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \int_{AB} G_0 u \, d\xi - \int_{AP} G_0 u \, d\xi + \int_{BQ} G_0 u \, d\xi + a^2 \int_{BQ+PA} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \right) d\tau.$$

Займемся изучением отдельных слагаемых этой суммы и докажем в первую очередь, что каждое из них в отдельности удовлетворяет уравнению теплопроводности. Действительно, первое слагаемое является интегралом Пуассона, для которого это уже было доказано.

Докажем, что для внутренних точек области $PABQ$ уравнению удовлетворяют интегралы

$$V = a^2 \int_{AP} G_0 \nu \, d\tau = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau) \, d\tau$$

$$(\xi = \chi_1(\tau)),$$

$$W = 2a^2 \int_{AP} \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \mu \, d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) \, d\tau.$$

Производные этих функций вычисляются при помощи дифференцирования под знаком интеграла, так как подстановка, входящая при дифференцировании по t, равна нулю. Например,

$$G_0(x, t, \chi_1(\tau), \tau) \mu(\tau) \Big|_{\tau=t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0$$

в силу того, что $x \neq \chi_1(t)$. Таким образом, дифференцирование по параметрам x, t будет относиться к функции G_0, которая является решением уравнения теплопроводности. Изучение остальных слагаемых проходит аналогично.

Рассмотрим теперь поведение функций V, W на кривой $AP(x = \chi_1(t))$. Очевидно, что интеграл V непрерывен при переходе точки (x, t) через

кривую AP, так как этот интеграл сходится равномерно (см. главу IV, § 5). Докажем, что W претерпевает разрыв при переходе через кривую AP, причем

$$W|_{x=\chi_1(t)+0} = W|_{x=\chi_1(t)} + \mu(t),$$
$$W|_{x=\chi_1(t)-0} = W|_{x=\chi_1(t)} - \mu(t).$$

Это доказательство будет проведено в предположении дифференцируемости $\chi_1(t)$ и функции $\mu(t)$.

Рассмотрим сперва W при постоянной плотности $\mu(t) = \mu_0$

$$W^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_0 \, d\tau$$

и вспомогательный интеграл

$$\tilde{V}^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_0 \, d\tau,$$

являющийся, в силу сделанного выше замечания, непрерывной функцией в точках дуги AP.

Разность $W^0 - \tilde{V}^0$ вычисляется непосредственно

$$W^0(x, t) - \tilde{V}^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[\frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \right] \mu_0 \, d\tau =$$

$$= \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-\chi_1(t_0)}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\alpha_0} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad \left(\alpha = \frac{x - \chi_1(\tau)}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}} \right),$$

где

$$\alpha_0 = +\infty, \text{ если } x > \chi_1(t),$$
$$\alpha_0 = 0, \quad \text{если } x = \chi_1(t) = x_0,$$
$$\alpha_0 = -\infty, \text{ если } x < \chi_1(t).$$

При $x \to x_0 \pm 0$ мы получаем:

$$[W^0(x_0 \pm 0, t) - W^0(x_0, t)] - [\tilde{V}(x_0 \pm 0, t) - \tilde{V}(x_0, t)] =$$
$$= \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pm\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \pm \mu_0.$$

В силу непрерывности $\tilde{V}$ имеем:

$$\tilde{V}(x_0 \pm 0, t) - \tilde{V}(x_0, t) = 0.$$

Таким образом,

$$W^0(x_0 \pm 0, t) = W^0(x_0, t) \pm \mu_0.$$

Если $\mu(t)$ не постоянна, то

$$W(x, t) = W^0(x, t) - \psi(x, t),$$

где

$$\psi(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} [\mu(t) - \mu(\tau)]\, d\tau.$$

В силу сделанных предположений о дифференцируемости функции $\mu(t)$ этот интеграл имеет такую же особенность при $\tau = t$, как и V, сходится равномерно и является непрерывной функцией на кривой AP. Таким образом, предел $W(x, t)$ при $x = x_0 \pm 0$ равен

$$W(x_0 \pm 0, t) = W^0(x_0, t) \pm \mu,$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно убедиться, что производная $\frac{\partial V}{\partial x}(x, t)$, подобно $W(x, t)$, разрывна при $x = x_0$. Эта производная равна

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

и равна $-W(x, t)$ с плотностью

$$\mu(t) = \frac{\nu(t)}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 \pm 0, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) \pm \frac{\nu(t)}{2},$$

где интеграл

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x_0 - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x_0-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

равен полусумме производных V в точке x_0 справа и слева

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 + 0, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x_0 - 0, t)\right].$$

Отметим, что функция $V(x, t)$ в самой точке x_0 не имеет производной.

На этом мы заканчиваем исследование потенциалов вдоль AP. Свойства потенциалов вдоль кривой BQ совершенно аналогичны.

2. Решение краевых задач. Тепловые потенциалы являются удобным аналитическим аппаратом для решения краевых задач.

Рассмотрим сперва первую краевую задачу для полуограниченной области $x \geqslant \chi(t)$:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} \text{ при } x \geqslant \chi_1(t),\ t \geqslant t_0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \qquad x \geqslant \chi_1(t_0);$$
$$u[\chi_1(t); t] = \mu(t), \qquad t \geqslant t_0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(x) = 0$, так как, беря разность между $u(x, t)$ и произвольным решением уравнения теплопроводности $v(x, t)$, удовлетворяющим тому же начальному условию, получим новую функцию, для которой $\varphi(x) = 0$, а граничное значение попрежнему будет известно.

Предполагая, что приведение к нулевому начальному условию уже сделано, представим решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2} W(x, t) = \int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\, \bar{\mu}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - \chi_1(t)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}(\tau)\, d\tau;$$

эта функция удовлетворяет уравнению при $x > \chi_1(t)$, ограничена в бесконечности и имеет нулевое начальное значение при любом выборе $\bar{\mu}(t)$. При $x = \chi_1(t)$ она разрывна и ее предельное значение при $x = \chi_1(t) + 0$ должно быть равно $\mu(t)$

$$\frac{\bar{\mu}(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_1(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}(\tau)\, d\tau = \mu(t).$$

Это соотношение является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода для нахождения функции $\bar{\mu}(\tau)$, определяющей искомое решение $u(x, t)$. Существование решения всегда имеет место в силу общей теории, если кривая $x = \chi_1(t)$ определяется дифференцируемой функцией.

Это уравнение особенно просто, если граница нашей области неподвижна: $\chi_1(t) = x_0$. В этом случае интеграл обращается в нуль и

$$\bar{\mu}(t) = 2a^2 \mu(t),$$

так что искомое решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau.$$

С этой формулой мы уже встречались дважды (см. главу III, § 3 и главу VI, § 3, п. 3), однако только здесь дано доказательство того, что эта функция удовлетворяет уравнению и дополнительным условиям.

Вторая и третья краевые задачи решаются аналогично при помощи потенциала. Рассмотрим краевую задачу для ограниченной области, беря дополнительные условия в виде

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad \chi_1(0) < x < \chi_2(0),$$

$$u[\chi_1(t); t] = \mu_1(t), \qquad u[\chi_2(t); t] = \mu_2(t) \quad (t > 0).$$

Считая, что начальное значение приведено к нулю: $\varphi(x) = 0$, представим решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2}(W_1 + W_2) =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\, \bar{\mu}_1(t)\, d\tau + \int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_2(\tau), \tau)\, \bar{\mu}_2(\tau)\, d\tau.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению и нулевому начальному условию при любом выборе функции $\bar{\mu}_1(t)$ и $\bar{\mu}_2(t)$. Она разрывна при $x = \chi_1(t)$ и $x = \chi_2(t)$ и ее предельные значения при $x = \chi_1(t) + 0$ и $x = \chi_2(t) - 0$ должны быть равны $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, что дает систему уравнений

$$\frac{\bar{\mu}_1(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_1(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_1(t) - \chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_2(\tau)\, d\tau = \mu_1(t);$$

$$-\frac{\bar{\mu}_2(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_2(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_2(t) - \chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_2(\tau)\, d\tau = \mu_2(t).$$

Эта система является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, всегда имеющей решение.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VI

1. Сфера радиуса R_0 в начальный момент заполнена газом концентрации u_0; вне сферы концентрация равна нулю. Найти функцию u, характеризующую процесс диффузии газа в неограниченном пространстве. Решить ту же задачу для полупространства при наличии газонепроницаемой границы $z = 0$.

2. Решить задачу о нагревании сферы радиуса R_0, если начальная температура равна нулю, а на границе поддерживается постоянная температура.

3. Найти температуру шара, на поверхности которого происходит теплообмен со средой нулевой температуры, если начальная температура постоянна и равна u_0.

4. Однородное твердое тело ограничено двумя концентрическими сферами с радиусами a и $2a$. Внутренняя поверхность тела

теплоизолирована, а на внешней поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры. Найти распределение температуры в теле в момент t, если начальная температура тела равна u_0.

5. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся с постоянной скоростью. Написать выражение для функции точечного источника в неограниченном пространстве.

6. Рассмотреть стационарную задачу диффузии в подвижной среде, считая скорость движения постоянной и пренебрегая диффузией вдоль направления движения среды (задача о газовой атаке). Написать функцию источника для полупространства, считая, что плоскость $z=0$ газонепроницаема.

7. Построить функцию теплового источника для слоя, ограниченного плоскостями $z=0$ и $z=l$, а также для клина с раствором $\frac{\pi}{n}$ (n — целое число) при нулевых граничных условиях. Решение исследовать.

8. Найти функцию влияния мгновенного источника тепла мощности Q, равномерно распределенного на поверхности сферы радиуса a.

9. Решить задачу о нагревании бесконечного цилиндра, начальная температура которого равна нулю, а на поверхности поддерживается постоянная температура. Пользуясь таблицами функций Бесселя, найти профиль температуры (взяв на радиусе десять точек) и среднюю температуру по сечению для больших моментов времени. Построить соответствующие графики.

10. Рассмотреть задачу о намагничивании бесконечного цилиндра постоянным магнитным полем, параллельным оси цилиндра. Пользуясь таблицами бесселевых функций, подсчитать величину потока индукции через поперечное сечение цилиндра.

11. Построить функцию мгновенного точечного источника тепла для бесконечной цилиндрической области произвольного сечения при граничных условиях первого рода. Рассмотреть частный случай поперечного сечения круглой формы.

Указание. Представить решение в виде

$$u(M,\ z,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z,\ t)\psi_n(M),$$

где $\psi_n(M)$ — собственная функция поперечного сечения цилиндра.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

I. Диффузия облака

Рассмотрим процесс диффузии газового облака, образующегося при разрыве снаряда.

При разрыве снаряда выделяется некоторое количество дыма Q, который распространяется во все стороны, образуя облако. Облако сначала растет, затем оно светлеет по краям, его темная непрозрачная часть уменьшается, все облако светлеет, начинает «таять» и, наконец, исчезает. Эта картина особенно отчетливо видна в ясный день на фоне голубого неба.

Процесс распространения дымового облака можно трактовать как процесс диффузии дыма от мгновенного точечного источника мощности Q в неограниченном пространстве. Такой процесс диффузии носит не молекулярный, а турбулентный характер; ему соответствует некоторый эффективный коэффициент турбулентной диффузии D. Мы не учитываем здесь начальный разброс дыма, а также практически совершенно не существенное влияние земли. В этих предположениях концентрация дыма дается формулой

$$u(x,\ y,\ z,\ t) = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \quad (D = a^2),$$

если начало координат поместить в точку разрыва снаряда.

Остановимся на вопросе о видимости облака. Время, за которое облако полностью «растает», зависит от поглощения света в атмосфере и от порога чувствительности измерительного прибора (глаз, фотопленка и т. д.).

Как известно, интенсивность света, проходящего через однородные слои газа, приближенно равна

$$I = I_0 e^{-\alpha l},$$

где I_0 — первоначальная интенсивность света, $\alpha = \alpha_0 u$ — коэффициент поглощения, пропорциональный концентрации поглощающего газа ($\alpha_0 = \text{const}$), u — концентрация газа в слое, l — толщина слоя.

Если имеется два слоя толщины l_1 и l_2 с разными концентрациями газа u_1 и u_2, то

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 u_1 l_1} e^{-\alpha_0 u_2 l_2} = I_0 e^{-\alpha_0 (u_1 l_1 + u_2 l_2)}.$$

Отсюда ясно, что интенсивность света, проходящего через облако с непрерывно меняющейся концентрацией дыма, будет определяться формулой

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 \int u\, dl}.$$

Видимость облака определяется отношением $\frac{I}{I_0}$, зависящим от величины $\int u\, dl$.

Пусть δ — порог чувствительности инструмента наблюдения; тогда при

$$\frac{I_0 - I}{I_0} < \delta \qquad \text{или} \qquad \frac{I}{I_0} > 1 - \delta$$

облако становится невидимым; при

$$\frac{I_0 - I}{I_0} > 1 - \delta \qquad \text{или} \qquad \frac{I}{I_0} < \delta$$

облако кажется совершенно непрозрачным. Если

$$\delta < \frac{I}{I_0} < 1 - \delta,$$

то облако кажется наблюдателю частично прозрачным. Степень прозрачности зависит от величины отношения

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha_0 \int u\, dl},$$

т. е. от величины интеграла $\int u\, dl$.

Направим теперь ось z по лучу зрения и будем считать, что наблюдатель находится в бесконечности. При этом облако проектируется на плоскость xy. Для оценки видимости различных участков облака, соответствующих точкам (x, y), вычислим интеграл

$$\int u\, dl = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, z, t)\, dz = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}\, dz =$$

$$= Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}.$$

Если количество дыма по лучу зрения мало́

$$\int u\, dl < \frac{\delta}{\alpha_0}, \qquad \text{то} \qquad \frac{I}{I_0} > 1 - \delta,$$

и соответствующий участок полностью прозрачен. Если количество дыма по лучу зрения велико

$$\int u\,dl > \frac{\Delta}{\alpha_0}, \quad \text{то} \quad \frac{I}{I_0} < e^{-\Delta} = \delta,$$

т. е. при надлежащем выборе $\Delta = \ln\frac{1}{\delta}$ соответствующий участок облака совершенно непрозрачен. При

$$\frac{\delta}{\alpha_0} \leqslant \int u\,dl < \frac{\Delta}{\alpha_0}$$

условие

$$\alpha_0 \int u\,dl = \delta \quad \text{или} \quad \alpha_0 Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^2 e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}} = \delta \quad (\rho^2 = x^2 + y^2)$$

определяет границу облака, за пределами которой оно становится невидимым. Радиус облака, очевидно, равен

$$\rho = 2\sqrt{-Dt \ln \frac{\delta 4\pi Dt}{Q\alpha_0}} \quad \text{(рис. 85).}$$

При малых значениях t радиус облака (ρ) мал и растет вместе с t; при

$$t = t_0 = \frac{\alpha_0 Q}{4\pi e \delta D}$$

ρ достигает максимума

$$\rho_{\max} = 2\sqrt{Dt_0} = \sqrt{\frac{\alpha_0 Q}{\pi e \delta}},$$

при $t > t_0$ радиус облака ρ уменьшается и при

$$t_1 = \frac{Q\alpha_0}{\delta 4\pi D}$$

обращается в нуль (облако исчезает).

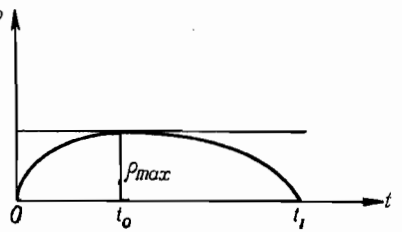


Рис. 85.

Наблюдая процесс расплывания облака, можно определить коэффициент турбулентной диффузии в свободной атмосфере D (например, из формулы для t_1 или для t_0).

II. О размагничивании цилиндра с обмоткой

Рассмотрим задачу о размагничивании цилиндра с обмоткой. Такая задача возникает в связи с теорией баллистического гальванометра [1]).

При включении или выключении магнитного поля в обмотке возникает индукционный ток. При точной постановке задачи нужно учитывать обратное воздействие этого тока на поле внутри цилиндра.

[1]) Б. А. Введенский, Журнал Русского физико-химического общества, т. 55, 1, 1923.

Однако это тормозящее действие обмотки обычно не учитывается и решают задачу с упрощенными граничными условиями.

Познакомимся, прежде всего, с такой упрощенной постановкой задачи. Рассмотрим бесконечный цилиндр радиуса R, на поверхности которого намотана проводящая обмотка. Цилиндр находится в однородном магнитном поле H_0, параллельном оси цилиндра Oz. В момент $t=0$ поле выключается.

Внутри цилиндра, очевидно, будет удовлетворяться уравнение

$$\Delta H = \frac{1}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (H = H_z), \tag{1}$$

где

$$a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

В силу осевой симметрии поля

$$H_z = H(r,\ t)$$

и уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1'}$$

Если пренебречь влиянием индукционного тока в обмотке на процесс размагничивания цилиндра, граничное условие на его поверхности будет иметь вид

$$H(R,\ t) = 0 \qquad (t > 0). \tag{2}$$

Решение уравнения (1′) при граничном условии (2) без труда получается методом разделения переменных

$$H(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2H_0}{\mu_k^{(0)} J_1(\mu_k^{(0)})}\, e^{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2 a^2 t}\, J_0\left(\mu_k^{(0)}\frac{r}{R}\right). \tag{3}$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка, $\mu_k^{(0)}$ — k-й корень уравнения

$$J_0(\mu) = 0. \tag{4}$$

Так как a^2 весьма велико, то для достаточно больших t можно ограничиться в формуле (3) первым членом (регулярный режим)

$$H(r,\ t) \cong 1{,}60 \cdot H_0 e^{-5{,}77\frac{a^2}{R^2}t}\, J_0\left(2{,}4\,\frac{r}{R}\right). \tag{5}$$

Отсюда для потока индукции получаем:

$$\Phi(t) = 2\pi\int_0^R \mu H(r,\ t)\, r\, dr = \frac{4}{\mu_1^2}\Phi_0 e^{-\mu_1^2\frac{a^2}{R^2}t}, \tag{6}$$

где Φ_0 — начальный поток (при $t=0$).

Формулой (6) пользуются для практических расчетов при измерениях с помощью баллистического гальванометра.

Чтобы определить область применимости этой формулы, следует решить указанную выше задачу, учитывая тормозящее действие обмотки [1]).

Электродвижущая сила индукции в обмотке, как известно, равна

$$\mathcal{E}_1^{\text{инд}} = \oint_L E_l \, dl.$$

Преобразуем контурный интеграл, используя для этой цели второе уравнение Максвелла и уравнение (1)

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = \int_S \int \operatorname{rot}_z \boldsymbol{E} \, dS = -\frac{\mu}{c} \int_S \int \frac{\partial H}{\partial t} \, dS =$$

$$= -\frac{c}{4\pi\sigma} \int_S \int \Delta H \, dS = -\frac{c}{4\pi\sigma} \oint_L \frac{\partial H}{\partial \nu} \, dl$$

или

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = -\frac{cR}{2\sigma} \frac{dH}{d\nu}(R). \tag{7}$$

Здесь S — поперечное сечение цилиндра, L — контур, ограничивающий S, ν — нормаль к контуру L.

Граничные условия на поверхности цилиндра запишутся в виде

$$H_{z_1} - H_{z_2} = \frac{4\pi}{c} nJ,$$

где J — индукционный ток в обмотке, n — число витков на единицу длины цилиндра. Отсюда, учитывая, что $H_{z_2} = 0$,

$$J = \frac{\mathcal{E}^{\text{инд}}}{\rho l},$$

где ρ — линейное сопротивление обмотки, l — длина одного витка, получаем:

$$H_{z_1} = H(R, t) = \frac{4\pi}{c} n \frac{\mathcal{E}^{\text{инд}}}{\rho l}. \tag{8}$$

Сопоставляя соотношения (7) и (8), окончательно приходим к граничному условию

$$H(R, t) + \frac{n}{\rho\sigma} H_r(R, t) = 0.$$

Таким образом, мы должны решить уравнение

$$H_{rr} + \frac{1}{r} H_r = \frac{1}{a^2} H_t \tag{9}$$

---

[1]) Эта задача была решена В. Н. Никитиной. (ЖТФ, в печати.)

при дополнительных условиях

$$H(r,\ 0) = H_0,$$
$$H(R,\ t) + \alpha H_r(R,\ t) = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{n}{\rho\sigma}\right).$$

Решение будем искать методом разделения переменных, полагая

$$H(r,\ t) = X(r)\,T(t).$$

Для функции $X(r)$ и $T(t)$ получим условия

$$X'' + \frac{1}{r}X' + \lambda^2 X = 0;$$
$$X(R) + \alpha X'(R) = 0 \quad (X(0) < \infty), \tag{10}$$
$$T' + \lambda^2 a^2 T = 0, \tag{11}$$

где λ^2 — параметр разделения.

Из второго уравнения сразу же находим:

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Частными решениями уравнения (10) являются функции $J_0(\lambda r)$ и $N_0(\lambda r)$ (см. Дополнение, ч. I), однако условию ограниченности при $r = 0$ удовлетворяет лишь $J_0(\lambda r)$. Поэтому

$$X(r) = AJ_0(\lambda r).$$

Граничное условие при $r = R$ дает уравнение для определения собственных значений

$$J_0(\lambda R) + \alpha \frac{dJ_0(\lambda R)}{dR} = 0$$

или

$$J_0(y) - \beta y J_1(y) = 0,$$

где

$$\beta = \frac{\alpha}{R},\ y = \lambda R. \tag{12}$$

Корни этого уравнения могут быть найдены либо графически, либо разложением функций Бесселя в ряд по степеням $y = \lambda R$.

Обозначим y_k корни уравнения (12), так что

$$\lambda_k = \frac{y_k}{R}.$$

Общее решение нашей задачи будет иметь вид

$$H(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(y_k \frac{r}{R}\right) e^{-\left(\frac{y_k}{R}\right)^2 a^2 t}. \tag{13}$$

Коэффициенты A_k находим из начального условия

$$A_k = \frac{\int_0^R H_0 J_0\left(r\frac{y_k}{R}\right) r\,dr}{\int_0^R J_0^2\left(r\frac{y_k}{R}\right) r\,dr} = \frac{2H_0 J_1(y_k)}{y_k\left[J_0^2(y_k)+J_1^2(y_k)\right]}. \tag{14}$$

Члены ряда (13) быстро убывают, так как $a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$ велико ($\sim 10^{13} - 10^{14}$). Поэтому с достаточной степенью точности можно ограничиться первым членом

$$H(r,\ t) \cong \frac{2H_0 J_1(y_1)\, J_0\left(y_1\frac{r}{R}\right)}{y_1\left[J_0^2(y_1)+J_1^2(y_1)\right]} e^{-y_1^2\frac{a^2}{R^2}t}, \tag{15}$$

что приводит к следующему выражению для потока:

$$\Phi(t) \cong \Phi_0 \frac{4J_1^2(y_1)}{y_1^2\left[J_0^2(y_1)+J_1^2(y_1)\right]} e^{-y_1^2\frac{a^2}{R^2}t}, \tag{16}$$

где

$$\Phi_0 = NH_0\pi R^2 \quad (N \text{ — полное число витков в обмотке}).$$

Расчеты приводят к следующим формулам потока для различных значений параметра β:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0{,}804\,\Phi_0 e^{-4{,}75\,\theta} & \text{при } \beta = 0{,}1, \\ 0{,}872\,\Phi_0 e^{-3{,}96\,\theta} & \text{»} \quad \beta = 0{,}2, \\ 0{,}912\,\Phi_0 e^{-3{,}35\,\theta} & \text{»} \quad \beta = 0{,}3, \end{cases} \qquad \theta = \frac{a^2}{R^2}t,$$

позволяющим проследить за тормозящим действием тока на спадание поля в цилиндре. С увеличением β, т. е. с увеличением тока в обмотке, скорость убывания потока уменьшается. При $\beta = 0$ естественно приходим к выражению (6) для потока, являющемуся, таким образом, нулевым приближением.

В теории баллистического гальванометра важно знать время τ спадания потока от Φ_0 до значений, определяемых чувствительностью гальванометра, которое характеризует инерционность прибора. Пусть γ — относительная чувствительность гальванометра, т. е. гальванометр может регистрировать лишь значения $\Phi \geqslant \gamma\Phi_0$. Величину τ, очевидно, можно найти, полагая в формуле

$$\Phi(t) = a\Phi_0 e^{-bt},$$

$$\Phi = \gamma\Phi_0 \text{ в момент } t = \tau.$$

Из сравнения полного решения (16) с грубым решением (6) видно, что коэффициент в формуле (6) завышен. Это означает завышенное значение чувствительности прибора при одном и том же значении τ.

Приводимая ниже таблица содержит значения τ для различных β, в том числе и для $\beta = 0$, при $\gamma = 10^{-3}$.

	R	$\frac{a^2}{R^2}$	$\tau\,(\beta = 0)$	$\tau\,(\beta = 0{,}1)$	$\tau\,(\beta = 0{,}2)$	$\tau\,(\beta = 0{,}3)$
Железо $\mu = 500$ $\sigma = 10^5 \frac{1}{\Omega см}$	1 *см*	1,59	0,71	0,888	1,15	1,28
Альсифер $\mu = 2000$ $\sigma = 1{,}3 \cdot 10^4$	1 *см*	5,12	0,217	0,272	0,330	0,405

Значения τ, полученные указанным методом, позволяют более рационально подбирать данные искательных катушек баллистического гальванометра.

III. Метод конечных разностей для уравнения теплопроводности

Для нахождения приближенных решений уравнения теплопроводности часто пользуются методом конечных разностей.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l,\ 0 < t < T), \tag{1}$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t) &= \mu_1(t), \\ u(l,\ t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Разбивая отрезок $(0,\ l)$ на n равных частей точками $x_0 = 0$, $x_i = ih, \ldots, x_n = l\left(h = \frac{l}{n}\right)$ и заменяя производную по x вторым разностным отношением, получаем дифференциально-разностную систему для функций $u_i(t)$:

$$\frac{du_i}{dt} = a^2 \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2}, \tag{1'}$$

$$u_i(0) = \varphi(x_i), \tag{2'}$$

$$\left.\begin{aligned} u_0(t) &= \mu_1(t), \\ u_n(t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

представляющую собой систему $(n-1)$-го обыкновенного дифференциального уравнения для $(n-1)$-й неизвестной функции. Начальные условия однозначно определяют решение этой системы.

Решая систему (1′—3′) каким-либо численным методом, мы получим систему функций $u_i(t)$, которую будем рассматривать как приближенные значения функции $u(x, t)$ решения уравнения теплопроводности в точках x_i. Приближенные значения функции $u(x, t)$ в точках x, отличных от x_i, а также приближенные значения производных можно получить при помощи интерполяции.

Для обоснования изложенного метода надо доказать, что при достаточно малом h функции $u_i(t)$ дают значения функции $u(x, t)$ с любой степенью точности.

Теорема. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности при непрерывных начальных и граничных условиях $(\varphi(0)=\mu_1(0),\ \varphi(l)=\mu_2(0))$ с любой степенью точности может быть аппроксимировано решением системы (1′), т. е., что каково бы ни было $\varepsilon>0$, найдется такое $h(\varepsilon)$, что

$$|u(x, t)-u_i(t)|<\varepsilon$$

для всех i одновременно, если в системе (1′) $h<h(\varepsilon)$.

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. Если функция $u(x, t)$ есть решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, непрерывное вместе со своими вторыми производными по x в замкнутой области $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant T$, то функции $\bar{u}_i(t)=u(x_i, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt}-a^2\frac{\bar{u}_{i+1}+\bar{u}_{i-1}-2\bar{u}_i}{h^2}=Q_i(t), \tag{4}$$

где $Q_i(t)$ равномерно ограничены числом $Q_0(h)$, причем $Q_0(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Подставим функцию $u(x, t)$ в систему (1′). Пользуясь очевидными равенствами

$$\bar{u}_{i+1}(t)=u(x_i+h, t)=u(x_i, t)+hu_x(x_i, t)+\frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i+\theta_1 h, t)$$
$$(0\leqslant\theta_1\leqslant 1),$$

$$\bar{u}_{i-1}(t)=u(x_i-h, t)=u(x_i, t)-hu_x(x_i, t)+\frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i-\theta_2 h, t)$$
$$(0\leqslant\theta_2\leqslant 1)$$

и уравнением (1), получим:

$$Q_i(t)=\frac{a^2}{2}[u_{xx}(x_i+\theta_1 h, t)+u_{xx}(x_i-\theta_2 h, t)-2u_{xx}(x_i, t)]. \tag{5}$$

В силу замкнутости рассматриваемой области $(0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant T)$ из предположенной непрерывности функции $u_{xx}(x, t)$

следует ее равномерная непрерывность в этой области, т. е. для любого $\eta > 0$ можно указать такое $h(\eta)$, что

$$|u_{xx}(x+\theta h,\ t) - u_{xx}(x,\ t)| < \eta$$

для любых x и t. Отсюда следует, что

$$|Q_i(t)| \leqslant Q_0 = a^2\eta \qquad (\text{если } h < h(\eta)),$$

что и доказывает лемму.

Замечание. Если функция $u(x,\ t)$ имеет непрерывные четвертые производные, то

$$Q_0 \leqslant \frac{a^2h^2}{12} U^{(\mathrm{IV})}, \tag{6}$$

где $U^{(\mathrm{IV})}$ — максимальное значение $u^{(\mathrm{IV})}(x,\ t)$ в области $(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$. Это непосредственно следует из равенств

$$u(x_i+h,\ t) = u(x_i,\ t) + hu_x(x_i,\ t) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i,\ t) + \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(x_i,\ t) + \frac{h^4}{4!} u_x^{(\mathrm{IV})}(x_i+\theta_1 h,\ t),$$

$$u(x_i-h,\ t) = u(x_i,\ t) - hu_x(x_i,\ t) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i,\ t) - \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(x_i,\ t) + \frac{h^4}{4!} u^{(\mathrm{IV})}(x_i-\theta_2 h,\ t).$$

Лемма 2. Минимальное значение решения системы уравнений

$$\frac{dw_i}{dt} - a^2 \frac{w_{i+1} + w_{i-1} - 2w_i}{h^2} = Q_i(t), \tag{7}$$

где

$$Q_i(t) \geqslant 0,$$

не может быть меньше минимума начальных значений или минимума функций $w_0(t)$ или $w_n(t)$.

В самом деле, пусть система функций $w_i(t)$ имеет минимальное значение для $i = i_0$, $t = t_0\,(t_0 > 0)$, $w_i(t) \geqslant w_{i_0}(t_0)$.

Рассмотрим уравнение для w_{i_0} при $t = t_0$. Очевидно, что

$$\left.\frac{dw_{i_0}}{dt}\right|_{t=t_0} \leqslant 0$$

(знак $<$ может иметь место только при $t_0 = T$) и

$$a^2 \frac{w_{i_0+1} + w_{i_0-1} - 2w_{i_0}}{h^2} \geqslant 0,$$

что сразу же приводит к противоречию, если $Q_{i_0}(t_0) > 0$. Если же $Q_{i_0}(t_0) = 0$, то $w_{i_0+1}(t_0) = w_{i_0-1}(t_0) = w_{i_0}(t_0)$.

Повторяя эти рассуждения для $i_0 + 1$ и т. д., придем к противоречию, если хотя бы одно из $Q_{i_0+k}(t_0) > 0$. Если же все

$$Q_{i_0+k}(t_0) = 0,$$

то

$$w_{i_0}(t_0) = w_{i_0+1}(t_0) = \ \ldots \ = w_{i_0+k}(t_0) = \ \ldots \ = w_n(t_0),$$

откуда следует, что минимальное значение системы функций $w_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ не может быть меньше минимума функции $w_n(t)$. Аналогичная лемма имеет место для максимальных значений решения системы (7), если

$$Q_i(t) \leqslant 0.$$

Следствие 1. Если система функций $\{\bar{v}_i(t)\}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} - a^2 \frac{\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_{i-1} - 2\bar{v}_i}{h^2} = \bar{Q}_i(t),$$

а система функций $\{\bar{\bar{v}}_i(t)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\bar{\bar{v}}_i}{dt} - a^2 \frac{\bar{\bar{v}}_{i+1} + \bar{\bar{v}}_{i-1} - 2\bar{\bar{v}}_i}{h^2} = \bar{\bar{Q}}_i(t),$$

причем

$$\bar{Q}_i(t) \leqslant \bar{\bar{Q}}_i(t); \quad \bar{v}_0(t) \leqslant \bar{\bar{v}}_0(t); \quad \bar{v}_n(t) \leqslant \bar{\bar{v}}_n(t); \quad \bar{v}_i(0) \leqslant \bar{\bar{v}}_i(0),$$

то

$$\bar{v}_i(t) \leqslant \bar{\bar{v}}_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 2 в применении к функции $w_i(t) = \bar{\bar{v}}_i(t) - \bar{v}_i(t)$.

Следствие 2. Решение однородной системы (7) удовлетворяет условию

$$|w_i(t)| < \varepsilon,$$

если

$$|w_i(0)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |w_0(t)| < \varepsilon, \quad |w_n(t)| < \varepsilon.$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 2.

Лемма 3. Если функция $u(x, t)$ есть решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, непрерывное вместе со своими вторыми производными по x в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то при достаточно малом h она сколь угодно точно может быть аппроксимирована решением конечно-разностной системы (1′).

Рассмотрим разность функций $\bar{u}_i(t) = u(x_i, t)$ и $u_i(t)$

$$\bar{v}_i(t) = \bar{u}_i(t) - u_i(t).$$

Эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} - a^2 \frac{\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_{i-1} - 2\bar{v}_i}{h^2} = Q_i(t),$$

$$\bar{v}_i(0) = 0, \quad \bar{v}_0(t) = 0, \quad \bar{v}_n(t) = 0,$$

причем

$$|Q_i(t)| \leqslant Q_0(h) \qquad (Q_0(h) \underset{h \to 0}{\to} 0).$$

Докажем, что

$$|\bar{v}_i(t)| \leqslant Q_0 t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Рассмотрим вспомогательную систему функций

$$\bar{\bar{v}}_i(t) = Q_0 \cdot t \quad \text{для всех} \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Эта система функций удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d\bar{\bar{v}}_i}{dt} - a^2 \frac{\bar{\bar{v}}_{i+1} + \bar{\bar{v}}_{i-1} - 2\bar{\bar{v}}_i}{h^2} = Q_0$$

с дополнительными условиями

$$\bar{\bar{v}}_i(0) = 0, \quad \bar{\bar{v}}_0(t) = Q_0 t; \quad \bar{\bar{v}}_n(t) = Q_0 t.$$

В силу следствия 1 леммы 2 имеет место соотношение

$$\bar{v}_i(t) \leqslant \bar{\bar{v}}_i(t) = Q_0 t.$$

Аналогично, рассматривая систему функций $-\bar{\bar{v}}_i(t)$, получим, что

$$\bar{v}_i(t) \geqslant -\bar{\bar{v}}_i(t) = -Q_0 t.$$

Отсюда и следует, что

$$|\bar{v}_i(t)| \leqslant Q_0 t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{8}$$

а также и утверждение леммы 3, так как

$$Q_0(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Установим некоторые свойства решения уравнения теплопроводности, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 4. Если функция $u(x, t)$ является решением первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, причем начальная функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, а граничные значения $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ непрерывны вместе с производными первого порядка и выполнены условия сопряжения

$$\left(\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0), \quad \varphi''(0) = \mu_1'(0), \quad \varphi''(l) = \mu_2'(l)\right),$$

то функция $u(x, t)$ обладает вторыми непрерывными производными по x в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим функцию $z_1(x, t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности и дополнительным условиям

$$z_1(x, 0) = a^2\varphi''(x),$$
$$z_1(0, t) = \mu_1'(t),$$
$$z_1(l, t) = \mu_2'(t).$$

Построим функцию

$$z(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t z_1(x, \tau)\, d\tau.$$

Граничные и начальные значения этой функции соответственно равны

$$z(x, 0) = \varphi(x),$$
$$z(0, t) = \mu_1(0) + \int_0^t \mu_1'(\tau)\, d\tau = \mu_1(t) \quad (\varphi(0) = \mu_1(0)),$$
$$z(l, t) = \mu_2(t).$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial z}{\partial t} = z_1(x, t),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi''(x) + \int_0^t \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(x, \tau)\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{a^2} z_1(x, 0) + \frac{1}{a^2} \int_0^t \frac{\partial z_1}{\partial \tau}(x, \tau)\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{a^2} z_1(x, t),$$

видим, что при $t > 0$ функция $z(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности. Таким образом,

$$z(x, t) \equiv u(x, t),$$

что и доказывает непрерывность функции $u(x, t)$ вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Следствие. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности при достаточно малом h аппроксимируется решением дифференциально-разностной системы с любой степенью точности, если начальная функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своими вторыми производными, а граничные значения непрерывны вместе с первыми производными и выполнены условия сопряжения.

Обратимся теперь к доказательству основной теоремы. Для этого достаточно показать, что дополнительные условия дифференцируемости в отношении функций $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ в предшествующем следствии леммы 4 являются излишними. Рассмотрим функцию $u(x, t)$, являющуюся решением первой краевой задачи с непрерывными начальными и граничными условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$
$$(\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0)).$$

Возьмем какие-либо функции: $\hat{\varphi}(x)$ — непрерывную вместе со своими вторыми производными и $\hat{\mu}_1(t)$ и $\hat{\mu}_2(t)$ — непрерывные вместе с первыми производными, удовлетворяющие условиям сопряжения

$$\hat{\varphi}(0) = \hat{\mu}_1(0); \quad \hat{\varphi}(l) = \hat{\mu}_2(0),$$
$$\hat{\varphi}''(0) = \hat{\mu}_1'(0); \quad \hat{\varphi}''(l) = \hat{\mu}_2'(0)$$

и аппроксимирующие начальные и граничные значения нашей функции с точностью до $\frac{\varepsilon}{3}$ [1])

$$|\hat{\varphi}(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$|\hat{\mu}_1(t) - \mu_1(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$|\hat{\mu}_2(t) - \mu_2(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Рассмотрим функцию $\hat{u}(x, t)$, являющуюся решением соответствующей краевой задачи. В силу принципа максимума

$$|\hat{u}(x, t) - u(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично в силу принципа максимума для дифференциально-разностной системы (следствие 2, леммы 2) имеет место неравенство

$$|\hat{u}_i(t) - u_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

где функции $\hat{u}_i(t)$ и $u_i(t)$ являются решениями соответствующих дифференциально-разностных систем с дополнительными условиями

$$\hat{u}_i(0) = \hat{\varphi}(x_i); \quad \hat{u}_0(t) = \hat{\mu}_1(t); \quad \hat{u}_n(t) = \hat{\mu}_2(t);$$
$$u_i(0) = \varphi(x_i); \quad u_0(t) = \mu_1(t); \quad u_n(t) = \mu_2(t).$$

---

[1]) Такие функции можно построить весьма многими способами. Их можно получить, например, заменяя функции φ и μ ломаными линиями и сглаживая эти ломаные в угловых точках так, чтобы выполнялись условия дифференцируемости и сопряжения.

В силу следствия леммы 4 имеет место соотношение

$$|\hat{u}(x, t) - \hat{u}_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

если h выбрано достаточно малым (см. формулу (8)), так что

$$Q_0 < \frac{\varepsilon}{3T}.$$

Сопоставляя полученные неравенства, получаем

$$|u(x, t) - u_i(t)| \leqslant |u(x, t) - \hat{u}(x, t)| + |\hat{u}(x, t) - \hat{u}_i(t)| + |\hat{u}_i(t) - u_i(t)| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Заменяя в системе уравнений (1′) производные по t разностями

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k},$$

где $k = \Delta t$ — шаг по t, $u_i^j = u(x_i, t_j)$, получим систему конечно-разностных уравнений

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \gamma a^2 (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j) \quad \left(\gamma = \frac{k}{h^2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ j = 0, 1, \ldots, N-1, \ N = \dfrac{T}{k} \end{pmatrix}$$

или

$$u_i^{j+1} = (1 - 2a^2\gamma) u_i^j + a^2\gamma (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) \qquad (1'')$$

с дополнительными условиями

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \qquad u_0^j = \mu_1(t_j), \qquad u_n^j = \mu_2(t_j). \qquad (2'')$$

Если $\gamma < \frac{1}{2a^2}$, то все коэффициенты в уравнении (1″) положительны и для конечно-разностной системы имеет место принцип максимального значения.

В самом деле, предполагая, что $u_{i_0}^{j_0+1}$ — максимальное значение решения задачи ($0 < i_0 < n$, $j_0 > 0$), и замечая, что все коэффициенты уравнения (1″) положительны и их сумма всегда равна единице, заключаем, что уравнение может выполняться только при условии равенства

$$u_{i_0}^{j_0+1} = u_{i_0}^{j_0} = u_{i_0-1}^{j_0} = u_{i_0+1}^{j_0+1}.$$

Продолжая эти рассуждения далее, приходим к выводу, что максимальные значения должны достигаться либо при $i = 0$, либо при $i = n$, либо при $j = 0$.

Повторяя все рассуждения, проведенные выше для дифференциально-разностной системы, мы легко убедимся, что решение конечно-разностной системы (1″) с любой степенью точности аппроксимирует решение краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Конечно-разностная система (1″) получается при численном интегрировании методом Эйлера дифференциально-разностной системы (1′). Пользуясь другими методами численного интегрирования, можно получить другие типы конечно-разностных систем, соответствующих уравнению теплопроводности.

Приближенные решения уравнения теплопроводности можно получать также, заменяя конечными разностями только производные по t и сводя нахождение приближенного решения к последовательному решению краевых задач

$$\frac{u^{j+1}(x) - u^j(x)}{k} = a^2 \frac{d^2u^{j+1}(x)}{dx^2}$$

или

$$a^2 \frac{d^2u^{j+1}}{dx^2} - \frac{1}{k} u^{j+1}(x) = -\frac{1}{k} u^j(x)$$

с дополнительными условиями

$$u^0(x) = \varphi(x); \qquad u^j(0) = \mu_1(t_j); \qquad u^j(l) = \mu_2(t_j).$$

Подробнее о решении уравнений теплопроводности по этой схеме см. Смирнов «Курс высшей математики», т. IV.

Выше было рассмотрено решение однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Совершенно аналогично проводится изучение неоднородного уравнения, а также линейного уравнения параболического типа с переменными коэффициентами[1]), в предположении непрерывности коэффициентов и дифференцируемости их по t. Дифференцируемость по t нужна для установления аналога леммы 4. В том случае, когда коэффициенты уравнения зависят только от x, доказательство остается без изменения.

---

[1]) При этом предполагается, что соответствующая краевая задача разрешима для непрерывных начальных и граничных условий.

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА (продолжение)

§ 1. Основные задачи, приводящие к уравнению $\Delta v + cv = 0$

1. Установившиеся колебания. Весьма широкий класс вопросов, связанных с *установившимися колебаниями* (механическими, акустическими, электромагнитными и т. д.) приводит к так называемому *волновому уравнению*

$$\Delta v + k^2 v = 0 \qquad (k^2 = c > 0). \tag{1}$$

Рассмотрим в качестве примера мембрану S, закрепленную по границе C и колеблющуюся под действием периодических во времени сил. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\Delta_2 \overline{u} = \frac{1}{a^2} \overline{u_{tt}} - F_0(x, y) \cos \omega t. \tag{2}$$

При изучении периодических процессов удобно пользоваться комплексными функциями, заменяя (2) уравнением

$$\Delta_2 u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - F_0(x, y) e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Функция $\overline{u}$, очевидно, является вещественной частью функции u из (3).

Будем искать установившиеся колебания, имеющие вид

$$u = ve^{i\omega t}. \tag{4}$$

Для амплитуды установившихся колебаний v получаем следующее уравнение:

$$\Delta_2 v + k^2 v = -F_0(x, y) \qquad \left(k = \frac{\omega}{c}\right), \tag{5}$$

к которому надо добавить граничное условие

$$v|_C = 0. \tag{6}$$

Если контур мембраны C не закреплен, а совершает периодические колебания с той же частотой ω

$$u|_C = f_0 e^{i\omega t}, \tag{6'}$$

то для функции v на контуре C имеет место неоднородное граничное условие

$$v|_C = f_0. \tag{6''}$$

Как было уже отмечено выше, задачи об установившихся колебаниях характерны также для акустики и теории электромагнитного поля. Кроме того, часто встречаются задачи об установившихся колебаниях в неоднородной среде, в частности, в кусочно-однородной среде (когда, например, в пространстве имеются отдельные области, нарушающие однородность). К этому кругу вопросов относятся задачи теории диффракции, на которых мы остановимся ниже.

2. Диффузия газа при наличии распада и при цепных реакциях. При диффузии некоторых газов (например, эманации радия) происходит реакция распада молекул диффундирующего газа. Скорость реакции распада обычно принимают пропорциональной концентрации газа. При написании уравнения диффузии это эквивалентно наличию отрицательных источников газа. В случае стационарного процесса диффузии мы приходим к уравнению

$$D\Delta v + cv = 0 \qquad (c < 0), \tag{7}$$

где D — коэффициент диффузии. Как было указано в главе VI, § 3, п. 3, большой интерес представляет случай $c > 0$, соответствующий диффузии при наличии цепных реакций, ведущих к размножению диффундирующих частиц. В стационарном случае мы получаем при этом уравнение

$$\Delta v + cv = 0 \qquad (c > 0),$$

так как цепная реакция эквивалентна наличию источников диффундирующего вещества, пропорциональных концентрации $v(x, y, z)$.

3. Диффузия в движущейся среде. В главе IV была рассмотрена задача о диффузии газа в неподвижной среде. Рассмотрим задачу о диффузии газа в заданном стационарном потоке, скорость которого в точке $M(x, y, z)$ имеет компоненты $\vartheta_1(x, y, z)$ $\vartheta_2(x, y, z)$ $\vartheta_3(x, y, z)$. Количество газа, протекающего через элементарную площадку $d\sigma$ в точке $M(x, y, z)$, равно

$$dQ = -D\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}\,u\,d\sigma + u\,\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{n}\,d\sigma,$$

где $u(x, y, z)$ — концентрация газа в единице объема, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, нормальный к площадке $d\sigma$, D — коэффициент диффузии в точке x, y, z, $\boldsymbol{\vartheta}(x, y, z)$ — вектор скорости потока.

Составляя уравнение сохранения вещества для некоторого объема T с границей Σ, получаем:

$$\int_{\Sigma} [-D\boldsymbol{n}\operatorname{grad} u + u\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{n}]\, d\sigma = 0.$$

Преобразуем поверхностный интеграл в объемный, пользуясь формулой Остроградского

$$\int_{T} [\operatorname{div}(D\operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\boldsymbol{\vartheta})]\, d\tau = 0.$$

Отсюда в силу произвольности объема T вытекает уравнение диффузии в заданном потоке

$$\operatorname{div}(D\operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\boldsymbol{\vartheta}) = 0 \tag{8}$$

или в скалярной форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x}(u\vartheta_1) - \frac{\partial}{\partial y}(u\vartheta_2) - \frac{\partial}{\partial z}(u\vartheta_3) = 0. \tag{8'}$$

К такому же уравнению приводит задача о распространении тепла в движущейся среде.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в полупространстве $z \geqslant 0$ имеется воздушный поток с постоянной скоростью u_0, направленной по оси x. Считая коэффициент диффузии постоянным, получаем из (8) уравнение

$$D\,\Delta u - u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

являющееся простейшим вариантом уравнения *газовой атаки*.

Полагая

$$u = ve^{\mu x}$$

и выбирая затем

$$\mu = \frac{u_0}{2D},$$

получим для функции $v(x, y, z)$ уравнение

$$\Delta v + cv = 0,$$

где

$$c = -\frac{u_0^2}{4D} < 0.$$

4. Постановка внутренних краевых задач для уравнения $\Delta v + cv = 0$. Как было показано в главе I в связи с изучением канонических форм уравнений с постоянными коэффициентами, всякое

уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\Delta v + cv = 0. \tag{1}$$

Свойства решения уравнения (1) существенно зависят от знака коэффициента c, что физически очевидно, если иметь в виду диффузионную интерпретацию этого уравнения.

Остановимся на вопросе единственности решения первой краевой задачи уравнения (1). Для уравнения $\Delta v + cv = 0$ при $c < 0$ имеет место принцип максимального значения в следующей форме.

Решение $v(M)$ уравнения $\Delta v + cv = 0$ $(c < 0)$, определенное внутри некоторой области T с границей Σ, не может достигать во внутренних точках области T положительных максимальных (и отрицательных минимальных) значений.

В самом деле, допустим, что в некоторой точке M_0, лежащей внутри T, функция $v(M)$ достигает положительного максимального значения $[v(M_0) > 0]$. Тогда в точке M_0

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0$$

и, следовательно, $\Delta v \leqslant 0$, что находится в противоречии с отрицательностью коэффициента c и положительностью $v(M_0)$ [1]).

Из принципа максимального значения автоматически следует единственность решения первой краевой задачи для уравнения (1).

Может существовать только одно решение уравнения $\Delta v + cv = 0$ $(c < 0)$, определенное и непрерывное в замкнутой области $T + \Sigma$, принимающее на границе Σ заданные значения

$$v|_{\Sigma} = f.$$

Действительно, допуская существование двух различных решений v_1 и v_2, рассматривая их разность $v_1 - v_2$ и проводя рассуждения способом, изложенным выше (см. главы III и IV), мы проходим к противоречию с принципом максимального значения.

Если $c = 0$, то мы получаем первую краевую задачу для уравнения Лапласа, единственность решения которой была доказана.

Если $c > 0$, то единственность может не иметь места. Рассматривая в главе V задачу о собственных значениях краевой задачи

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v|_{\Sigma} = 0,$$

мы убедились на примерах в существовании нетривиальных решений

---

[1]) Сравнить с доказательством принципа максимального значения для уравнения теплопроводности.

(собственных функций) при $\lambda > 0$. Очевидно, что вопрос о множественности или единственности решения первой краевой задачи эквивалентен вопросу о том, совпадает ли c с одним из собственных значений λ_n рассматриваемой области T.

§ 2. Функции влияния точечных источников

1. Функции влияния точечных источников. Теория потенциалов, развитая в главе IV для уравнения Лапласа, может быть распространена и на уравнение $\Delta v + cv = 0$. Для построения функций влияния точечного источника рассмотрим решение v_0, зависящее только от r. Оператор Лапласа для функции $v_0(r)$ в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv_0}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2(rv_0)}{dr^2},$$

что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dr^2} + cw = 0 \qquad (w = v_0 r).$$

Вводя обозначение $c = k^2$ для $c > 0$ и $c = -\varkappa^2$ для $c < 0$, получаем:

$$\frac{d^2w}{dr^2} + k^2w = 0 \qquad (c > 0), \tag{1}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} - \varkappa^2 w = 0 \qquad (c < 0). \tag{1'}$$

Из уравнения (1) находим:

$$w = C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr} \tag{2}$$

и, соответственно,

$$v_0 = C_1\frac{e^{ikr}}{r} + C_2\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{3}$$

В случае вещественного k получаем два линейно-независимых решения $\frac{e^{ikr}}{r}$ и $\frac{e^{-ikr}}{r}$, которым соответствуют вещественные линейно-независимые решения

$$\frac{\cos kr}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\sin kr}{r}.$$

При $c < 0$ $(c = -\varkappa^2)$, пользуясь уравнением (1'), получаем два действительных линейно-независимых решения

$$\frac{e^{-\varkappa r}}{r} \quad \text{и} \quad \frac{e^{\varkappa r}}{r} \qquad (\varkappa > 0). \tag{4}$$

Функции

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r}\ (c > 0) \quad \text{и} \quad \frac{e^{\pm \varkappa r}}{r} \qquad (c < 0)$$

при $r=0$ терпят разрыв непрерывности, обращаясь в бесконечность как $\frac{1}{r}$. Такой же характер особенности имела функция источника для уравнения Лапласа ($c=0$), пропорциональная $\frac{1}{r}$.

Рассмотрим поведение этих функций на бесконечности. Случай $c<0$ соответствует процессу, сопровождающемуся поглощением (ср. уравнение диффузии (6) § 1). Одно из решений $\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$ экспоненциально стремится к нулю на бесконечности, что в терминах задачи дуффузии означает убывание концентрации, вызываемое поглощением. Это убывание происходит тем сильнее, чем больше коэффициент $|c|=\varkappa^2$, характеризующий интенсивность поглощения. Второе решение экспоненциально возрастает на бесконечности и физического смысла для задачи в неограниченной области не имеет (его можно было бы интерпретировать как наличие источника в бесконечности).

Случай $c=k^2>0$ соответствует установившимся волновым процессам (см. § 1, п. 1). Функция v представляет амплитуду функции

$$u(M, t)=v(M)\,e^{i\omega t},$$

удовлетворяющей уравнению колебаний (§ 1).

Одно из главных решений уравнения (1)

$$v_0(r)=\frac{e^{-ikr}}{r}$$

соответствует процессу колебаний

$$u_0(r, t)=\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r},$$

который имеет характер сферической волны, *расходящейся* от источника в точке $r=0$. Второе решение

$$v_0(r)=\frac{e^{ikr}}{r}$$

соответствует процессу колебаний

$$u_0(r, t)=\frac{e^{i(\omega t+kr)}}{r},$$

имеющему характер сферической волны, приходящей из бесконечности в точку $r=0$ (*сходящиеся* волны). Очевидно, что это решение при изучении процессов, возбуждаемых точечным источником в неограниченном пространстве, прямого физического смысла не имеет.

Отметим, что функцию $v(M)$ можно рассматривать как амплитуду колебаний типа $e^{i\omega t}$ или $e^{-i\omega t}$. Мы брали временной фактор первого типа. Во втором случае расходящаяся волна имеет вид

$$u_0(r, t)=\frac{e^{-i(\omega t-kr)}}{r},$$

т. е. ей соответствует второе решение

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Первое же решение

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

при этом физического смысла не имеет.

2. Интегральное представление решения. Для уравнения (1), § 1 при $c \neq 0$ можно написать формулы, аналогичные формулам Грина, которые были установлены для уравнения Лапласа. Вводя обозначение

$$\mathscr{L}(u) = \Delta u + cu, \tag{5}$$

сразу же получаем формулу

$$\int_T (u\mathscr{L}(v) - v\mathscr{L}(u))\, d\tau = \int_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma, \tag{6}$$

являющуюся аналогом и прямым следствием второй формулы Грина (см. главу IV, § 2). Подставляя сюда вместо v одну из «функций точечного источника», например $\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$, и повторяя дословно все рассуждения главы IV, § 2, приходим к анологу основной формулы Грина

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[u\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right) - \frac{e^{-\varkappa r}}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] d\sigma_M + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_T f(M)\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\, d\tau_M \qquad (r = r_{MM_0}), \tag{7}$$

где $u(M)$ — решение неоднородного уравнения $\mathscr{L}(u) = -f(M)$.

Для случая $c = k^2$ имеет место аналитическая формула

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[u\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] d\sigma + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_T f(M)\frac{e^{-ikr}}{r}\, d\tau_M, \tag{7'}$$

которая была получена в главе V как следствие формулы Кирхгоффа.

Введем понятие функции источника уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$ для заданной области T с границей Σ. Пусть $v(M)$ — решение уравнения $\mathscr{L}(v) = 0$, регулярное всюду в T. Формула (6) дает

$$0 = -\int_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma + \int_T fv\, d\tau. \tag{8}$$

Складывая (8) с равенством (7), получим:

$$u(M_0) = -\int_\Sigma \left[u\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}+v\right)-\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}+v\right)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]d\sigma_M + \\ + \int_T \left(\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}+v\right)f(M)\,d\tau_M \quad (r = r_{MM_0}). \tag{9}$$

Эта формула справедлива для произвольного решения $v(M)$ уравнения $\Delta v - \varkappa^2 v = 0$, регулярного в области T. Пользуясь произволом выбора функции v, получаем:

$$u(M_0) = -\int_\Sigma u(M)\frac{\partial G(M_0M)}{\partial \nu}\,d\sigma_M + \int_T G(M_0, M)f(M)\,d\tau_M, \tag{10}$$

где

$$G(M_0, M) = \frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r} + v \tag{11}$$

— функция источника, обладающая следующими свойствами:

1) $G(M, M_0)$ обращается в бесконечность при $M = M_0$ как $\frac{1}{4\pi r}$, что следует из формулы (11);

2) $G(M, M_0)$ удовлетворяет уравнению $L(u) = 0$ всюду в T, кроме точки M_0;

3) $G(P, M_0) = 0$ в точках P, лежащих на границе Σ.

Вопрос о существовании функции источника связан с вопросом о существовании функции v, удовлетворяющей уравнению

$$\mathscr{L}(v) = 0 \text{ в } T$$

и граничному условию

$$u = -\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r} \text{ на } \Sigma.$$

Очевидно, что функция $G(M, M_0)$ однозначно определена для любой области, допускающей единственное решение первой краевой задачи. В частности, при $c = -\varkappa^2 < 0$ эта функция определена для любой области. В простейших случаях функцию источника можно найти в явной форме, пользуясь методом, анологичным методу электростатических изображений [1]).

Так, например, для полупространства $z > 0$ функция источника имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r} - \frac{e^{-\varkappa r_1}}{4\pi r_1}, \tag{12}$$

$$r = r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

$$r_1 = r_{MM_1} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2},$$

[1]) Для сферы метод электростатических изображений неприменим при $c \neq 0$.

где $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ — изображение в плоскости $z=0$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Мы не останавливаемся здесь на вопросе о применимости предыдущих формул для неограниченной области, что, впрочем, без труда может быть установлено в случае $c<0$. Задачи для неограниченного пространства при $c>0$ связаны с «принципом излучения» и будут рассмотрены в следующем параграфе.

Для функции источника $G(M, M_0)$, определенной для произвольной области T, имеет место *«принцип взаимности»*, выражаемый равенством

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Доказательство этого свойства является буквальным повторением соответствующего доказательства для случая уравнения Лапласа (глава IV, § 2).

В случае двух независимых переменных уравнение для функции $v_0(r)$ имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_0}{dr}\right)+k^2v_0=0 \text{ или } \frac{d^2v_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr}+k^2v_0=0,$$

т. е. является *уравнением Бесселя нулевого порядка*, общее решение которого может быть записано следующим образом (см. Дополнение I):

$$v_0(r)=C_1H_0^{(1)}(kr)+C_2H_0^{(2)}(kr),$$

где $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ — *функции Ханкеля нулевого порядка первого и второго рода.*

Функции $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ при $r=0$ имеют логарифмическую особенность:

$$H_0^{(1)}(\rho)=\frac{-2i}{\pi}\ln\frac{1}{\rho}+\ldots,$$

$$H_0^{(2)}(\rho)=\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{\rho}+\ldots \qquad (\rho=kr),$$

где точками обозначены слагаемые, остающиеся конечными при $\rho=0$. На бесконечности (при $\rho\to\infty$) поведение функций Ханкеля определяется асимптотическими формулами

$$H_0^{(1)}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}e^{i\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)}+\ldots,$$

$$H_0^{(2)}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}e^{-i\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)}+\ldots,$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости относительно $\frac{1}{\rho}$.

Таким образом, уравнение $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ имеет два фундаментальных решения

$$v_0(r) = \begin{cases} H_0^{(1)}(kr), \\ H_0^{(2)}(kr), \end{cases}$$

имеющих логарифмическую особенность и соответствующих функциям $\frac{e^{ikr}}{r}$ и $\frac{e^{-ikr}}{r}$ для пространства.

Выбор той или иной фундаментальной функции зависит от вида условий излучения на бесконечности (см. § 3, п. 4). Если временная зависимость берется в виде $e^{i\omega t}$, то функция $H_0^{(2)}(kr)$ определяет расходящуюся цилиндрическую волну. При временной зависимости $e^{-i\omega t}$ расходящуюся волну определяет функция $H_0^{(1)}(kr)$.

Если $c = -\varkappa^2 < 0$, то линейно-независимыми решениями уравнения

$$\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} - \varkappa^2 v_0 = 0$$

являются цилиндрические функции мнимого аргумента

$$I_0(\varkappa r) \quad \text{и} \quad K_0(\varkappa r).$$

Первая из этих функций $I_0(\varkappa r)$ ограничена при $r = 0$ и экспоненциально возрастает при $r \to \infty$; функция $K_0(\varkappa r)$ имеет в точке $r = 0$ логарифмическую особенность

$$K_0(\rho) = \ln \frac{1}{\rho} + \ldots$$

и тем самым является искомым фундаментальным решением. На бесконечности она убывает по закону

$$K_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, e^{-\rho} + \ldots$$

Мы не останавливаемся подробно на формулах Грина и понятии функции источника G в случае двух независимых переменных, так как изложение этого было бы повторением предыдущего.

3. Потенциалы. В главе IV были рассмотрены потенциалы для уравнения $\Delta u = 0$. Такого же типа потенциалы могут быть построены и для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.

Будем называть *объемным потенциалом* (для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$) интеграл

$$V(M) = \int_T \rho(P)\, \frac{e^{-\varkappa r}}{r}\, d\tau_P,$$

$$r = r_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad d\tau_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad (13)$$

где $\rho(P)$ — плотность потенциала.

Сформулируем кратко основные свойства объемного потенциала, доказательство которых проводится по аналогии с главой IV.

1. Вне области T функция $V(M)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta V - \varkappa^2 V = 0.$$

2. Внутри области T интеграл (13) сходится, сходятся также интегралы, получающиеся при помощи формального дифференцирования $V(M)$ под знаком интеграла

$$\int_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \text{ и т. д.}$$

3. Функция $V(x, y, z)$ дифференцируема, и ее первые производные можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \text{ и т. д.}$$

Дифференцируемость функции $V(x, y, z)$ доказывается в предположении только ограниченности функции ρ. Отсюда, в частности, следует дифференцируемость V и в точках поверхности Σ, ограничивающей область T, где, как правило, имеет место разрыв плотности $\rho(M)$.

4. Во внутренних точках области T, в окрестности которых плотность ρ дифференцируема, вторые производные объемного потенциала V существуют, и потенциал V удовлетворяет уравнению

$$\Delta V - \varkappa^2 V = -4\pi\rho(M).$$

5. Первые производные объемного потенциала представляются равномерно сходящимся интегралами в предположении равномерной ограниченности ρ. Поэтому первые производные являются непрерывными функциями во всем пространстве, включая точки поверхности Σ.

Объемные потенциалы позволяют представить решение краевой задачи для неоднородного уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$ в виде суммы

$$u(M) = V(M) + u_1(M),$$

где $V(M)$ — объемный потенциал с плотностью $\rho = \frac{f}{4\pi}$, $u_1(M)$ — решение краевой задачи для однородного уравнения $\Delta u_1 - \varkappa^2 u_1 = 0$.

Перейдем к обзору свойств потенциалов простого и двойного слоя. Назовем *потенциалом двойного слоя* интеграл

$$W(M) = \int_\Sigma \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P}\left[\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right] d\sigma_P \qquad (r = r_{MP}), \tag{14}$$

где $\mu(P)$ — поверхностная плотность потенциала W.

Перечислим основные свойства потенциала двойного слоя, отсылая за их доказательством к главе IV § 5.

1. Вне поверхности Σ потенциал двойного слоя всюду удовлетворяет однородному уравнению $\Delta W - \varkappa^2 W = 0$.

2. Потенциал двойного слоя сходится в точках границы, если Σ принадлежит к классу поверхностей Ляпунова.

3. Функция W разрывна в точках поверхности Σ и имеют место соотношения

$$W_в(M_0) = W(M_0) + 2\pi\mu(M_0),$$

$$W_н(M_0) = W(M_0) - 2\pi\mu(M_0).$$

Здесь $W_в(M_0)$ — предельное значение функции $W(M)$ при стремлении M к M_0 изнутри области T, $W_н(M_0)$ — предельное значение $W(M)$ при стремлении M к M_0 снаружи T. *Потенциал простого слоя*, определяемый поверхностным интегралом

$$V(M) = \int_\Sigma \rho(P)\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\,d\sigma_P \qquad (r = r_{MP}), \tag{15}$$

обладает следующими свойствами:

1. Вне поверхности Σ потенциал простого слоя всюду удовлетворяет однородному уравнению $\Delta V - \varkappa^2 V = 0$.

2. Интеграл равномерно сходится на Σ и определяет функцию $V(M)$, непрерывную во всем пространстве.

3. Нормальные производные потенциала простого слоя для поверхностей класса Ляпунова удевлетворяют соотношениям (ср. (48), § 5 главы IV)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_в = U_0 + 2\pi\rho(M_0),$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_н = U_0 - 2\pi\rho(M_0),$$

где

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_в \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_н$$

— предельные значения для нормальной производной изнутри и, соответственно, извне Σ в точке M_0 на поверхности Σ (ν — внешняя нормаль)

$$U_0(M_0) = \int_\Sigma \rho(P)\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right]d\sigma_P \qquad (r = r_{M_0P}).$$

Поверхностные потенциалы позволяют для весьма широкого класса поверхностей (например, поверхностей класса Ляпунова) сводить краевые задачи к интегральным уравнениям.

Рассмотрим первую внутреннюю краевую задачу для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ при граничном значении $u|_\Sigma = f$. Предположим, что

искомую функцию можно представить в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = W(M) = \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right] d\sigma_P, \tag{14}$$

который, как было отмечено выше, удовлетворяет внутри T однородному уравнению $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$. Требуя выполнения граничного условия $u|_{\Sigma} = f$, приходим к следующему интегральному уравнению для определения функции μ:

$$2\pi\mu(M) + \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right] d\sigma_P = f(M),$$

которое является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. На вопросах существования и единственности решения этого интегрального уравнения мы здесь не останавливаемся.

Для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$, так же как и для уравнения Лапласа, применим метод конечных разностей.

§ 3. Задачи для неограниченной области. Принцип излучения

1. Уравнение $\Delta v + cv = -f$ в неограниченном пространстве. Рассмотрим решение неоднородного уравнения

$$\Delta v + cv = -f \tag{1}$$

в неограниченном пространстве. Для простоты изложения будем считать, что f отлична от нуля внутри некоторой ограниченной области (локальная функция). Характер решения этого уравнения существенно зависит от знака коэффициента c.

Остановимся сперва на случае $c = -\varkappa^2 < 0$. Решение уравнения $\Delta v - \varkappa^2 v = -f$ можно представить в форме объемных потенциалов

$$v_1(M) = \int_{T} f(P) \frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r} d\tau_P \quad \text{и} \quad v_2(M) = \int_{T} f(P) \frac{e^{\varkappa r}}{4\pi r} d\tau_P.$$

Таким образом, решение уравнения (1) без дополнительных условий в бесконечности определено неоднозначно. Будем искать, по аналогии с внешней задачей для уравнения Лапласа, решение уравнения (1), обращающееся в нуль на бесконечности. Этому условию удовлетворяет функция $v_1(M)$ и не удовлетворяет функция $v_2(M)$.

Докажем следующую теорему единственности:

уравнение

$$\Delta v - \varkappa^2 v = -f$$

не может иметь более одного решения, обращающегося в нуль на бесконечности[1]).

Допустим, что существуют два различных решения поставленной задачи $\overline{v}(M)$ и $\overline{\overline{v}}(M)$ и рассмотрим их разность $w = \overline{v} - \overline{\overline{v}}$. По предположению, найдется такая точка M_0, что $w(M_0) = A \neq 0$. Для определенности будем считать $A > 0$. В силу того, что $w(M) \to 0$ в бесконечности, можно указать такое R_0, что при $r > R_0$ функция $w < \frac{A}{2}$. Отсюда следует, что точка M_0 лежит внутри T_{R_0} — сферы радиуса R_0 — и что функция $w(M)$ достигает своего максимального значения внутри T_{R_0}. Таким образом, мы приходим к противоречию с принципом максимального значения, имеющим место для нашего уравнения (см. § 2, п. 1). Теорема единственности доказана.

Рассмотрим теперь случай $c = k^2 > 0$.

Функции

$$v_1(M) = \int\limits_T f(P)\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\,d\tau_P \quad \text{и} \quad v_2(M) = \int\limits_T f(P)\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\,d\tau_P$$

попрежнему являются решениями уравнения (1). Однако в этом случае обе функции убывают на бесконечности. Отсюда вытекает необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решение уравнения (1). Эти условия будут разобраны в пп. 2, 3 и 4 настоящего параграфа.

2. Принцип предельного поглощения. Задача о вынужденных колебаниях с затуханием приводит к уравнению

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}u_{tt} + \beta u_t - F(M, t) \qquad (\beta > 0). \tag{2}$$

Будем считать, что функция $F(M, t)$ является периодической по времени, т. е. $F(M, t) = f(M)e^{i\omega t}$. В этом случае уравнение (2) имеет периодические решения вида

$$u(M, t) = v(M)e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Функция $v(M)$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta v + cv = -f(M), \tag{4}$$

где $c = k^2 - i\beta\omega$ является комплексной величиной.

Будем называть уравнение (9) с комплексным значением коэффициента *с уравнением с комплексным поглощением* 1-*го* ($\operatorname{Im} c < 0$) *или* 2-*го типа* ($\operatorname{Im} c > 0$), в зависимости от знака мнимой части c,

[1]) Под термином «функция, обращающаяся в нуль на бесконечности» мы понимаем следующее: каково бы ни было ε, найдется такое $r(\varepsilon)$, что для любой точки $M(r, \vartheta, \varphi)$, для которой $r > r(\varepsilon)$, $|u(M)| < \varepsilon$, т. е. мы предполагаем равномерное стремление к нулю при $r \to \infty$.

что соответствует временной зависимости $e^{i\omega t}$ (1-го типа) или $e^{-i\omega t}$ (2-го типа).

Фундаментальные решения этого уравнения, зависящие только от r, имеют вид

$$\overline{v}_0(r) = \frac{e^{-iqr}}{r} \quad \text{и} \quad \overline{\overline{v}}_0(r) = \frac{e^{+iqr}}{r},$$

где

$$q = \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - i\beta\omega} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{k^4 + \beta^2\omega^2} + k^2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{k^4 + \beta^2\omega^2} - k^2}{2}} = q_0 - iq_1. \qquad (5)$$

Знаки корней выберем так, чтобы $q_1 > 0$. Следовательно,

$$\overline{v}_0(r) = \frac{e^{-iq_0 r}}{r} e^{-q_1 r}, \qquad \overline{\overline{v}}_0(r) = \frac{e^{iq_0 r}}{r} e^{q_1 r}.$$

Условию ограниченности на бесконечности удовлетворяет только функция $\overline{v}_0(r)$; функция $\overline{\overline{v}}_0(r)$ неограниченно возрастает при $r \to \infty$ и потому не имеет прямого физического смысла.

Объемный потенциал

$$\overline{v}(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-iq_0 r}}{4\pi r} e^{-q_1 r}\, d\tau_P \qquad (r = r_{MP}) \qquad (6)$$

представляет единственное решение уравнения (9), обращающееся в нуль на бесконечности. Предел $\overline{v}(M)$ при $\beta \to 0$ равен

$$v(M) = \lim_{\beta=0} \overline{v}(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\, d\tau_P \qquad (r = r_{MP}),$$

так как при $\beta \to 0$ имеем: $q_0 \to k$ и $q_1 \to 0$. При выбранной нами временной зависимости $e^{i\omega t}$ величина $q_0 > 0$, так как знак q_0 связан со знаком q_1 соотношением $2q_0 q_1 = \beta\omega$ (так как $q^2 = c$).

Если зависимость от времени взята в виде $e^{-i\omega t}$ ($\operatorname{Im} c > 0$), то положительному значению q_1 будет соответствовать $q_0 < 0$ и предел q_0 при $\beta \to 0$ равен $-k$.

Таким образом, дополнительным условием, позволяющим выделить решение волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -f,$$

соответствующее расходящимся волнам, является требование, чтобы функция $v(M)$ являлась пределом ограниченного решения волнового уравнения с комплексным поглощением первого рода при бесконечно малой мнимой части комплексного поглощения [1]).

[1]) См. А. Г. Свешников, Принцип излучения, ДАН **73**, 5, 1950.

3. Принцип предельной амплитуды. С волновым уравнением

$$\Delta v + k^2 v = -f \tag{7}$$

чаще всего приходится встречаться при изучении установившихся колебаний, возбуждаемых периодическими силами (см. § 1, п. 1).

Рассмотрим уравнение колебаний с периодической правой частью

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -F \quad (F = fe^{i\omega t}). \tag{8}$$

Для определенности решения к уравнению следует добавить некоторые начальные условия, например нулевые:

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= 0, \\ u_t(M, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Функция $u(M, t)$ в начальной стадии процесса не будет строго периодической. Однако с течением времени в системе будут устанавливаться периодические колебания с частотой вынуждающей силы, т. е. решение $u(M, t)$ примет вид

$$u(M, t) = v(M)\, e^{i\omega t}, \tag{10}$$

$v(M)$ представляет предельную амплитуду колебаний, т. е. $v(M) = \lim\limits_{t\to\infty} ue^{-i\omega t}$, и удовлетворяют уравнению

$$\Delta v + k^2 v = -f \qquad \left(k = \frac{\omega}{a}\right).$$

Требование, чтобы $v(M)$ было предельной амплитудой колебаний с нулевыми начальными данными, и представляет то дополнительное условие, которое надо присоединить к волновому уравнению для выделения единственного решения.

Таким образом, приходим к следующей задаче:

найти решение волнового уравнения $\Delta v + k^2 v = -f$, являющееся предельной амплитудой для решения уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f(M)\, e^{i\omega t} \tag{8*}$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= 0, \\ u_t(M, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Представим предельную амплитуду в явной форме. Для этого найдем решение уравнения колебаний (3*) с нулевыми начальными данными,

пользуясь формулой

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{T_{at}^M} \frac{f(P)\, e^{i\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)}}{r}\, d\tau_P \quad (r = r_{MP}),$$

полученной в главе V (§ 2, (6)). Здесь T_{at}^M — шар радиуса at с центром в точке M.

Пусть $f(P)$ — локальная функция, отличная от нуля только внутри некоторой ограниченной области T_0. Тогда для предельной амплитуды $f(M)$ получим выражение

$$v(M) = \lim_{t\to\infty} u(M, t)\, e^{-i\omega t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{T_{at}} \frac{e^{-ikr}}{r} f(P)\, d\tau_P =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{T_0} f(P) \frac{e^{-ikr}}{r}\, d\tau_P \quad (r = r_{MP}).$$

Таким образом, предельная амплитуда представляется объемным потенциалом, определяемым главным решением $\frac{e^{-ikr}}{r}$, которое соответствует расходящимся волнам $\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$.

Принцип предельной амплитуды приводит математически к тому же результату, что и принцип предельного поглощения. Это и естественно, так как оба эти принципа выделяют решение, соответствующее расходящимся волнам.

4. Условия излучения. В предшествующих пунктах были рассмотрены общие физические основания, позволяющие найти решение волнового уравнения, соответствующее расходящимся волнам. Однако такой путь требовал обращения к решениям вспомогательных задач. Установим теперь аналитическое условие, характеризующее расходящуюся волну и выраженное непосредственно в терминах изучаемого решения волнового уравнения.

Плоские волны, распространяющиеся вдоль оси x, имеют вид

$\bar{u} = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ — прямая волна (идущая в положительном направлении оси x);

$\bar{\bar{u}} = f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ — обратная волна (идущая в отрицательном направлении оси x).

Прямая волна характеризуется соотношением

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0,$$

обратная волна — соотношением [1])

$$\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial t} = 0.$$

Для установившегося режима

$$u = v(M)\, e^{i\omega t}$$

эти соотношения принимают вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + ik\bar{v} = 0 \qquad \left(k = \frac{\omega}{a}\right) \quad \text{для прямой волны,} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{v}}}{\partial x} - ik\bar{\bar{v}} = 0 \quad \text{для обратной волны.} \tag{12}$$

Перейдем теперь к случаю сферических волн. Если сферическая волна возбуждается источниками, расположенными в ограниченной части пространства, то на больших расстояниях от источников сферическая волна подобна плоской волне, амплитуда которой убывает как $\frac{1}{r}$. Отсюда естественно считать, что расходящаяся сферическая волна должна удовлетворять соотношению [2])

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = o\left(\frac{1}{r}\right); \tag{13}$$

аналогично для сходящейся сферической волны

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{14}$$

Для амплитуды установившихся колебаний эти условия принимают вид

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ для расходящихся сферических волн,} \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} - ikv = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ для сходящихся сферических волн.} \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) мы получили, предполагая, что на больших расстояниях всякая расходящаяся волна подобна плоской волне, амплитуда которой убывает как $\frac{1}{r}$. Убедимся в правильности этого утверждения.

---

[1]) Написанные соотношения представляют уравнения с частными производными 1-го порядка, решения которых имеют вид прямой и обратной волны.

[2]) В дальнейшем мы пользуемся двумя обозначениями: $O(\xi)$ — величина, убывающая как ξ при $\xi \to 0$, $o(\xi)$ — величина более высокого порядка малости, чем ξ при $\xi \to 0$.

1. В случае точечного источника, находящегося в начале координат, это утверждение совершенно очевидно, поскольку сама волна имеет вид

$$u(r,\ t)=\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}=v_0(r)\,e^{i\omega t},$$

так что

$$\frac{\partial v_0}{\partial r}+ikv_0=o\left(\frac{1}{r}\right).$$

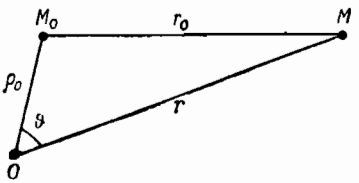


Рис. 86.

2. Пусть сферическая волна возбуждается точечным источником, находящимся в некоторой точке M_0. Амплитуда сферической волны равна

$$v_0(M)=\frac{e^{-ikr_0}}{r_0},$$

где r_0 — расстояние между точками M и M_0, равное (рис. 86)

$$r_0=\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\vartheta}.$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial r_0}{\partial r}=\frac{r-\rho_0\cos\vartheta}{r_0}\approx 1+O\left(\frac{1}{r}\right).$$

В силу пункта 1

$$\frac{\partial v_0}{\partial r_0}+ikv_0=o\left(\frac{1}{r_0}\right).$$

Проверим теперь справедливость формулы (15):

$$\mathscr{L}(v_0)=\frac{\partial v_0}{\partial r}+ikv_0=o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{15'}$$

В самом деле,

$$\frac{\partial v_0}{\partial r}=\frac{\partial v_0}{\partial r_0}\frac{\partial r_0}{\partial r}=\frac{\partial v_0}{\partial r_0}\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right)=\frac{\partial v_0}{\partial r_0}+o\left(\frac{1}{r}\right),$$

так как

$$\frac{\partial v_0}{\partial r_0}O\left(\frac{1}{r}\right)=o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда и из пункта 1 следует:

$$\mathscr{L}(v_0)=\frac{\partial v_0}{\partial r_0}+ikv_0+o\left(\frac{1}{r}\right)=o\left(\frac{1}{r}\right),$$

что и требовалось доказать.

3. Покажем, что объемный потенциал

$$v(M)=\int\limits_T f(P)\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\,d\tau_P \qquad (r=r_{MP}) \tag{16'}$$

удовлетворяет условию (15). Очевидно, что

$$\mathscr{L}(v) = \int\limits_T f(P)\mathscr{L}\left(\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\right)d\tau_P = \int\limits_T f(P)o\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_P = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Формула (10) представляет амплитуду расходящейся волны, возбуждаемой источниками, произвольно распределенными внутри ограниченной части пространства T. Мы видели, что функция $v(M)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta v + k^2 v = -f(M)$$

и стремится к нулю как $\frac{1}{r}$ на бесконечности; кроме того, как было показано, для нее на бесконечности выполняется соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

являющееся необходимым дополнительным условием.

Покажем, что

существует единственное решение волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -f(M),$$

где $f(M)$ — локальная функция, удовлетворяющая на бесконечности условиям

$$\left.\begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{r}\right) \\ \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial r} + ikv &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\}^{1)} \qquad (\alpha)$$

Допуская существование двух различных решений v_1 и v_2, получаем, что их разность

$$w = v_1 - v_2$$

удовлетворяет однородному уравнению и условию (α). Пусть Σ_R — сфера радиуса R, который мы в дальнейшем устремим в бесконечность. Пользуясь основной формулой Грина для функций $w(M)$ и $v_0(M) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$, будем иметь в точке M_0, лежащей внутри Σ,

$$w(M_0) = \int\limits_{\Sigma_R} \left(v_0 \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial v_0}{\partial r}\right) d\sigma.$$

---

[1]) И. Н. Векуа показано, что первое из приведенных здесь двух условий является следствием второго; см. И. Н. Векуа, Труды Тб. Матем. ин-та, т. XII, 1943.

Условие (α) для $v_0(r)$ и $w(M)$ дает:

$$v_0\frac{\partial w}{\partial r}-w\frac{\partial v_0}{\partial r}=v_0\left[-ikw+o\left(\frac{1}{r}\right)\right]-w\left[-ikv_0+o\left(\frac{1}{r}\right)\right]=$$
$$=v_0\,o\left(\frac{1}{r}\right)-wo\left(\frac{1}{r}\right)=o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Поэтому

$$w(M_0)=\int\limits_{\Sigma_R^*}o\left(\frac{1}{r^2}\right)d\sigma\to 0 \text{ при } R\to\infty,$$

откуда и следует, в силу произвольности точки M_0, единственность решения нашей задачи.

Условия

$$\left.\begin{aligned} v&=O\left(\frac{1}{r}\right),\\ \frac{\partial v}{\partial r}+ikv&=o\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

часто называют *условиями излучения* или условиями Зоммерфельда.

Следует отметить, что для неограниченных областей, не совпадающих со всем пространством, условия излучения могут иметь форму, отличную от условий Зоммерфельда.

Таким образом, соотношение (1) представляет аналитическую форму условий излучения для неограниченного пространства и не основано на физическом принципе, который позволил бы сформулировать эти условия для областей более сложной формы.

Условия излучения, получающиеся при введении в волновое уравнение бесконечно малого комплексного поглощения, впервые были использованы В. С. Игнатовским [1]). Принцип введения бесконечно малого комплексного поглощения легко применим для неограниченных областей различной формы и для более сложных задач.

Для задач на плоскости, связанных с уравнением

$$\Delta_2 v+k^2v=0,\qquad(17)$$

условия излучения на бесконечности принимают вид

$$\left.\begin{aligned} v&=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\\ \lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}+ikv\right)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Простейшими решениями этого уравнения являются функции Ханкеля нулевого порядка

$$H_0^{(1)}(kr) \text{ и } H_0^{(2)}(kr) \text{ (см. Дополнение, ч. I, § 3).}$$

---

[1]) В. С. Игнатовский, Ann, d. Phys. **18**, 1905.

Из асимптотических формул

$$H_\nu^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i\left(kr - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

и рекуррентных соотношений

$$\frac{dH_0^{(1)}}{dx} = -H_1^{(1)}(x), \qquad \frac{dH_0^{(2)}}{dx} = -H_1^{(2)}(x)$$

видно, что условию излучения удовлетворяет лишь функция $H_0^{(2)}(kr)$.

Таким образом, функция $H_0^{(2)}(kr)$ удовлетворяет уравнению (11), условиям излучения (12) и имеет логарифмическую особенность при $r = 0$. Поэтому функция $H_0^{(2)}(kr)$, как уже отмечалось в § 2, играет роль функции точечного источника для волнового уравнения (7) в случае двух независимых переменных. Решение неоднородного уравнения

$$\Delta_2 v + k^2 v = -f$$

выражается формулой

$$v(M) = -\frac{i}{4}\int\limits_S\int H_0^{(2)}(kr_{MP})\, f(P)\, d\sigma_P,$$

где S — область, в которой функция f отлична от нуля.

§ 4. Задачи математической теории дифракции

1. Постановка задачи. Распространение волновых процессов (электромагнитных, упругих, акустических и т. д.) сопровождается целым рядом типичных явлений (дифракция, преломление, отражение и т. д.). Решение задач, связанных с этими явлениями, проводится непосредственно или имеет много общего с решением волнового уравнения в неоднородной среде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \rho\omega^2 v = -\bar{f}\ (p > 0), \quad (1)$$

где p и ρ — параметры среды.

Наибольший интерес с точки зрения физических приложений представляет случай кусочно-постоянных параметров p и ρ. Соответствующая математическая задача состоит в следующем. В неограниченном пространстве имеется ряд ограниченных областей T_i с постоянными параметрами p_i и ρ_i; часть пространства T_0, внешняя по отношению к областям T_i, также однородна ($p_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$). Волновое уравнение внутри каждой области T_i принимает обычный вид

$$\Delta v_i + k_i^2 v_i = -f_i \text{ в } T_i \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n), \quad (2)$$

где u_i — значение искомой функции u внутри T_i,

$$k_i^2 = \frac{\rho_i \omega^2}{p_i}, \quad f_i = \frac{\overline{f}}{p_i}$$

в области T_i. На поверхностях Σ_i, ограничивающих области T_i [1]), дифференциальные уравнения заменяются условиями сопряжения

$$\left.\begin{aligned} v_i &= v_0 \text{ на } \Sigma_i, \\ p_i \frac{\partial v_i}{\partial n} &= p_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} \text{ на } \Sigma_i \ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

На бесконечности функция v_0, являющаяся решением волнового уравнения $\Delta v + k_0^2 v = -f_0$ в T_0, должна удовлетворять условиям излучения

$$\left.\begin{aligned} v_0(M) &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ниже будет показана достаточность условий сопряжения и условий излучения для однозначного определения функции v во всем пространстве. Поставленная выше задача является простейшей задачей *математической теории дифракции*.

2. Единственность решения задачи дифракции. Докажем, что задача математической теории дифракции, сформулированная в п. 1, имеет единственное решение. Для упрощения записи будем предполагать, что однородность среды нарушается только одним телом T_1, ограниченным замкнутой поверхностью Σ_1, вне которой расположена область T_0. При этом мы не делаем предположения об односвязности области T_1.

Докажем следующую теорему:

может существовать только одна функция, удовлетворяющая:

а) уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}_0(v_0) &= \Delta v_0 + k_0^2 v_0 = -f_0 \text{ в } T_0, \\ \mathscr{L}_1(v_1) &= \Delta v_1 + k_1^2 v_1 = -f_1 \text{ в } T_1; \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

б) условиям сопряжения на поверхности Σ

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_0, \\ p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \nu} &= p_0 \frac{\partial v_0}{\partial \nu}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

в) условиям излучения на бесконечности

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1]) При этом мы рассматриваем для простоты тот случай, когда неоднородности T_i имеют общую границу только с окружающей средой.

Допуская существование двух различных решений

$$\overline{v} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_0\} \quad \text{и} \quad \overline{\overline{v}} = \{\overline{\overline{v}}_1, \overline{\overline{v}}_0\},$$

получаем, что их разность

$$w = \{w_1, w_0\},$$

где

$$w_1 = \overline{v}_1 - \overline{\overline{v}}_1, \quad w_0 = \overline{v}_0 - \overline{\overline{v}}_0$$

удовлетворяет однородиым уравнениям и прежним дополнительным условиям

$$\mathscr{L}_0(w_0) = 0 \text{ в } T_0, \quad \mathscr{L}_1(w_1) = 0 \text{ в } T_1, \tag{2*}$$

$$w_1 = w_0, \quad p_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = p_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \text{ на } \Sigma_1, \tag{3*}$$

$$w_0 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty. \tag{4*}$$

Для функций w_0^*, w_1^*, комплексно-сопряженных к функциям w_0 и w_1, очевидно, будут удовлетворяться однородные уравнения (2*), условия (3*) и условия излучения

$$w_0^* = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0^*}{\partial r} - ikw_0^* = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{4**}$$

Пусть Σ_R — сфера достаточно большого радиуса R, охватывающая область T_1, и T_R — область, ограниченная поверхностями Σ_1 и Σ_R.

Применяя формулу Грина к функциям w_1, w_1^* в области T_1 и к w_0, w_0^* в области T_R, получаем:

$$\int_{T_1} (w_1 \mathscr{L}_1(w_1^*) - w_1^* \mathscr{L}_1(w_1))\, d\tau = \int_{\Sigma_1} \left(w_1 \frac{\partial w_1^*}{\partial \nu_1} - w_1^* \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1}\right) d\sigma,$$

$$\int_{T_R} [w_0 \mathscr{L}_0(w_0^*) - w_0^* \mathscr{L}_0(w_0)]\, d\tau =$$

$$= \int_{\Sigma_1} \left(w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial \nu_0} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial \nu_0}\right) d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial \nu} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial \nu}\right) d\sigma = 0,$$

где ν_0 — нормаль, внешняя к области T_R, ν_1 — нормаль, внешняя к области T_1. Очевидно, $\frac{\partial}{\partial \nu_0} = -\frac{\partial}{\partial \nu_1}$ на Σ_1.

Умножая первое равенство на p_1, второе на p_0, складывая их и пользуясь условиями сопряжения (3*), находим:

$$\int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial r} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial r}\right) d\sigma = 0.$$

Выражая из условий излучения производные

$$\frac{\partial w_0^*}{\partial r} = ikw_0^* + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial r} = -ikw_0 + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

приходим к следующему равенству:

$$2ik\int\limits_{\Sigma_R} w_0 w_0^* \, d\sigma + \int\limits_{\Sigma_R} \left[w_0 o\left(\frac{1}{R}\right) - w_0^* o\left(\frac{1}{R}\right)\right] d\sigma = 0.$$

Второй интеграл при $R \to \infty$ стремится к нулю, поэтому

$$\int\limits_{\Sigma_R} w_0 w_0^* \, d\sigma = \int\limits_{\Sigma_R} |Rw_0|^2 \, d\Omega \to 0, \quad R \to \infty \quad (d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi). \tag{5}$$

В Дополнении, ч. II, § 3 показано, что функция

$$V_m(r, \theta, \varphi) = \zeta_m^{(2)} Y_m(\theta, \varphi),$$

где

$$\zeta_m^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\rho) \quad (\rho = k_0 r),$$

и $Y_m(\theta, \varphi)$ — сферическая функция m-го порядка, удовлетворяет волновому уравнению

$$\mathscr{L}_0(V_m) = \Delta V_m + k_0^2 V_m = 0$$

и условию излучения

$$\frac{\partial V_m}{\partial r} + ik_0 V_m = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Применим формулу Грина в области T_R к функциям w_0 и V_m

$$0 = \int\limits_{T_R} [w_0 \mathscr{L}(V_m) - V_m \mathscr{L}(w_0)] d\tau =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_1} \left(w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \nu} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \nu}\right) d\sigma + \int\limits_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \nu} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \nu}\right) d\sigma = I_1 + I_R.$$

Второе слагаемое I_R в силу условий излучения стремится к нулю при $R \to \infty$ (см. теорему § 3, п. 4). Так как первый интеграл I_1 не зависит от R, то отсюда следует, что $I_1 = 0$ и, следовательно, $I_R = 0$ при любом R, т. е.

$$\left.\frac{d\zeta_m^{(2)}(k_0 r)}{dr}\right|_{r=R} \cdot \int\limits_{\Sigma_R} w_0 Y_m(\theta, \varphi) \, d\Omega - \zeta_m^{(2)}\Big|_{r=R} \cdot \int\limits_{\Sigma_R} \frac{\partial w_0}{\partial r} Y_m(\theta, \varphi) \, d\Omega = 0.$$

Если обозначить

$$\int\limits_{\Sigma_r} w_0 Y_m(\theta, \varphi) \, d\Omega = a_m(k_0 r),$$

то можно написать:

$$\zeta_m^{(2)\prime}(k_0 R) \, a_m(k_0 R) - a_m'(R) \, \zeta_m^{(2)}(k_0 R) = 0,$$

откуда находим

$$a_m(r) = a_m \zeta_m^{(2)}(k_0 r),$$

где a_m — постоянный множитель.

Условие полноты сферических функций

$$\int_{\Sigma_R} |Rw_0|^2 d\Omega = \sum_{m=0}^{\infty} R^2 \alpha_m^2 (k_0 R) \tag{6}$$

и формула (5) дают:

$$R\alpha_m(k_0R) \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Однако согласно асимптотической формуле

$$\zeta_m^{(2)}(\rho) \approx \frac{1}{\rho} e^{-i\left(\rho - \frac{m+1}{2}\pi\right)},$$

произведение $r\zeta_m^{(2)}(k_0 r)$ остается по модулю больше некоторого положительного числа при больших значениях r; следовательно, $a_m = 0$, т. е. $\alpha_m(r) \equiv 0$; отсюда в силу уравнения замкнутости (6) вытекает, что $w_0 = 0$ на сфере Σ_{r_0}. Таким образом, если сфера Σ_{r_0} некоторого радиуса r_0 охватывает область T_1, то вне этой сферы функция $w \equiv 0$. Отсюда в силу аналитичности [1]) решения уравнения $\mathscr{L} = 0$ заключаем, что функция $w_0 \equiv 0$ всюду в области T_1. Далее, из условий сопряжения следует, что на поверхности Σ_1

$$w_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = 0. \tag{7}$$

Основная формула Грина, примененная в области T_1 к функции w_1, показывает, что

$$w_1(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \left[\frac{e^{-ik_1 r}}{r} \frac{\partial w_1(P)}{\partial \nu_1} - w_1(P) \frac{\partial}{\partial \nu_1} \left(\frac{e^{-ik_1 r}}{r} \right) \right] d\sigma = 0, \tag{8}$$

где $r = r_{MP}$, в любой точке M области T_1.

Итак мы убедились, что $w(M) \equiv 0$ во всем пространстве; это и доказывает теорему единственности.

3. Дифракция на сфере. 1. Практически важным классом решений уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

являются плоские волны. Плоской волной, распространяющейся в какомнибудь заданном направлении, называется решение, зависящее от времени и от одной пространственной координаты, отсчитываемой в направлении распространения. Например, плоская волна, распространяющаяся вдоль оси x, удовлетворяет уравнению с двумя независимыми переменными

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

и имеет вид

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

---

[1]) Аналитичность функции w в области T_1 следует из формулы (7) § 2 для комплексного значения $\varkappa = ik$ и для поверхности Σ, целиком лежащей внутри T_1.

В случае установившегося режима, когда зависимость от времени определяется множителем $e^{i\omega t}$, плоская волна имеет вид

$$u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}, \tag{9}$$

где $k = \frac{\omega}{a}$ — волновое число, $|A|$ — амплитуда.

Плоская волна, распространяющаяся в направлении l, где $l(l_x, l_y, l_z)$ — единичный вектор, может быть записана следующим образом:

$$u(x, y, z, t) = Ae^{i[\omega t - k(xl_x + yl_y + zl_z)]} = Ae^{i[\omega t - klr]}. \tag{10}$$

Функции

$$v(x) = Ae^{-ikx}, \quad v(x, y, z) = Ae^{-iklr}, \tag{11}$$

являющиеся решениями волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = 0, \tag{12}$$

обычно также называются *плоскими волнами.*

В математической теории диффракции обычно изучаются возмущения поля в однородной среде, создаваемые наличием включений T_i, нарушающих однородность среды. Пусть $\bar{v}(M)$ — поле в однородной среде, создаваемое заданными источниками, которые мы считаем расположенными вне области T_i $(i = 1, \ldots, n)$; в частности, это могут быть достаточно удаленные источники, вызывающие появление плоских волн,

$$\bar{v}(x, y, z) = Ae^{-iklr}. \tag{13}$$

Действительное поле v_0, имеющее место в области T_0 при наличии неоднородностей, можно представить в виде суммы

$$v_0(M) = w_0(M) + \bar{v}_0(M),$$

где $\bar{v}_0(M)$ — «падающая волна», $w_0(M)$ — диффрагированная или отраженная волна, представляющая возмущение внешнего поля $\bar{v}$ неоднородностями T_i.

Будем искать в области T_0 диффрагированное поле $w_0(M)$, а внутри T_i — «преломленное поле» v_i. Установим условия, определяющие искомые функции w_0 и v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

а) функции w_0 и v_i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta w_0 + k_0^2 w_0 = 0 \quad \text{в} \quad T_0, \tag{14}$$

$$\Delta v_i + k_i^2 v_i = 0 \quad \text{в} \quad T_i \ (i = 1, 2, \ldots, n);$$

б) на границах раздела Σ_i областей T_i и T_0 выполняются следующие условия сопряжения:

$$v_i = w_0 + \bar{v}_0 \quad \text{на} \quad \Sigma_i, \tag{15}$$

где $\bar{v}_0$ — заданная функция,

$$p_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} = p_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu} + f_i \quad \text{на} \quad \Sigma_i, \tag{16}$$

где $f_i = p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \nu}$ — заданная функция;

в) отраженная волна $w_0(M)$ на бесконечности ведет себя, как расходящаяся сферическая волна, т. е. удовлетворяет условию излучения

$$w_0(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

2. Рассмотрим более подробно дифракцию плоской волны на сфере [1]). Пусть в направлении оси z из бесконечности падает плоская волна

$$\bar{v} = Ae^{-ikz} \tag{17}$$

на шар радиуса R с центром в начале координат. Ищем отраженное и преломленное поля в виде разложения по сферическим функциям; $\bar{v}_0$ и $f = p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}$, входящие в правые части условий сопряжения, разложим по сферическим функциям.

Положим $z = r\cos\theta$; тогда можно воспользоваться следующим разложением плоской волны по сферическим функциям:

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m \psi_m(kr) P_m(\cos\theta), \tag{18}$$

где

$$\psi_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{m+\frac{1}{2}}(kr),$$

а $J_{m+\frac{1}{2}}(kr)$ — функция Бесселя первого рода $\left(m+\frac{1}{2}\right)$-го порядка, $P_m(kr)$ — полином Лежандра m-го порядка. В самом деле, слева стоит решение волнового уравнения, зависящее только от z. Всякое решение волнового уравнения может быть представлено как сумма произведений сферических функций на $\psi_m(kr)$. Поскольку в нашем случае левая часть (18) обладает зональной симметрией, то

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(kr) P_m(\cos\theta), \tag{19}$$

где C_m — неопределенные пока коэффициенты. Пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра и их нормой (см. Дополнение, ч. II), получаем:

$$C_m \psi_m(\rho) = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\, d\xi \tag{20}$$

$$(\rho = kr, \quad \xi = \cos\theta).$$

Найдем первый член асимптотического представления для интеграла, стоящего в правой части; сравнение его с первым членом асимптотического разложения функции $\psi_m(\rho)$ позволит нам определить коэффициент C_m. Проинтегрируем m раз по частям, интегрируя каждый раз $e^{-i\rho\xi}$ и дифференци-

[1]) Аналогичные методы часто используются в квантовой механике в задачах о рассеянии частиц.

руя $P_m(\xi)$. В результате получим разложение интеграла по степеням $\frac{1}{\rho}$. Сохраняя только первый член разложения, будем иметь:

$$\int_{-1}^{+1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\, d\xi \cong \frac{1}{-i\rho}\left[e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\right]_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho} P_m(1) - e^{i\rho} P_m(-1)\right) = \frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho} - (-1)^m e^{i\rho}\right) =$$

$$= \frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho} - e^{-im\pi} e^{i\rho}\right) =$$

$$= \frac{e^{-im\frac{\pi}{2}}}{-i\rho}\left[e^{-i\left(\rho - m\frac{\pi}{2}\right)} - e^{i\left(\rho - m\frac{\pi}{2}\right)}\right] = 2(-i)^m \frac{\sin\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}.$$

С другой стороны, как известно (см. Дополнение, ч. II, § 3, п. 2),

$$\psi_m(\rho) \cong \frac{\sin\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}.$$

Сравнивая эти выражения, находим из (20):

$$C_m = (2m+1)(-i)^m, \tag{21}$$

что и доказывает формулу (18).

Из (17) следует:

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_0|_{r=R} &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\cos\theta); \\ a_m &= A(2m+1)(-i)^m \psi_m(k_0 R); \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}\Big|_{r=R} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m P_m(\cos\theta); \\ b_m &= A k_0 p_0 (2m+1)(-i)^m \psi_m'(k_0 R). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Отраженное и преломленное поля являются решениями волнового уравнения и, так же как и падающее поле, обладают зональной симметрией. Поэтому функции v_1 и w_0 мы ищем в виде

$$v_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \psi_m(k_1 r) P_m(\cos\theta), \tag{24}$$

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \zeta_m(k_0 r) P_m(\cos\theta), \tag{25}$$

$$\zeta_m(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\rho). \tag{26}$$

Перейдем теперь к определению коэффициентов разложения α_m и β_m. Пользуясь условием сопряжения и сравнивая коэффициенты при $P_m(\cos\theta)$, получаем:

$$\alpha_m\psi_m(k_1R) - \beta_m\zeta_m(k_0R) = a_m = A(2m+1)(-i)^m\psi_m(k_0R),$$

$$p_1k_1\alpha_m\psi_m'(k_1R) - p_0k_0\beta_m\zeta_m'(k_0R) = b_m = Ak_0p_0(2m+1)(-i)^m\psi_m'(k_0R),$$

откуда

$$\alpha_m = A(2m+1)(-i)^m\frac{p_0k_0[\psi_m(k_0R)\zeta_m'(k_0R) - \zeta_m(k_0R)\psi_m'(k_0R)]}{p_0k_0\psi_m(k_1R)\zeta_m'(k_0R) - p_1k_1\psi_m'(k_1R)\zeta_m(k_0R)}, \quad (27)$$

$$\beta_m = A(2m+1)(-i)^m\frac{p_1k_1\psi_m(k_0R)\psi_m'(k_1R) - p_0k_0\psi_m'(k_0R)\psi_m(k_1R)}{p_0k_0\psi_m(k_1R)\zeta_m'(k_0R) - p_1k_1\psi_m'(k_1R)\zeta_m(k_0R)}. \quad (28)$$

3. Рассмотрим в качестве примера задачу о рассеянии звука твердым сферическим препятствием. Пусть на абсолютно твердую и неподвижную сферу радиуса R с центром в начале координат падает плоская звуковая волна, распространяющаяся в направлении оси z. Звуковое давление $p(x, y, z, t)$, как было установлено в главе II, § 1, удовлетворяет уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2p}{\partial t^2} = a^2\Delta p, \qquad a^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0},$$

где a — скорость звука, γ — показатель адиабаты, p_0 и ρ_0 — давление и плотность среды в невозмущенном состоянии.

Давление в падающей плоской волне дается функцией

$$\overline{p_0} = Ae^{-i(\omega t - kz)} \qquad \left(k = \frac{\omega}{a}\right),$$

где A — постоянная.

Рассматривая установившийся процесс

$$p(x, y, z, t) = p(x, y, z)e^{-i\omega t},$$

получаем для $p(x, y, z)$ волновое уравнение

$$\Delta p + k^2p = 0.$$

На поверхности сферы S_R в силу ее абсолютной твердости должна равняться нулю нормальная составляющая скорости u. Проекция скорости на направление нормали n связана с давлением следующим уравнением:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n},$$

которое в стационарном случае дает

$$u_n = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial n}.$$

Отсюда получаем граничное условие

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{S_R} = 0.$$

Полагая $p = \bar{p}_0 + w$, где $w(x, y, z)$ — давление рассеянной волны, получаем для определения w следующие условия:

а) функция $w(x, y, z)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta w + k^2 w = 0;$$

б) на поверхности сферы S_R выполняется граничное условие

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{S_R} = -\left.\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial n}\right|_{S_R};$$

в) рассеянная волна w ведет себя на бесконечности, как расходящаяся сферическая волна, т. е. удовлетворяет условию излучения при $r \to \infty$,

$$w(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} + ikw = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Нетрудно видеть, что эта задача является частным случаем рассмотренной выше задачи дифракции и соответствует значению параметра $p_1 = 0$.

Полагая в формулах (25) и (28) $p_1 = 0$, получаем:

$$\beta_m = -A(2m+1)(-i)^m \frac{\psi_m'(k_0R)}{\zeta_m'(k_0R)} \tag{29}$$

и

$$w = -A\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)(-i)^m \frac{\psi_m'(k_0R)}{\zeta_m'(k_0R)}\zeta_m(k_0r)P_m(\cos\theta). \tag{30}$$

Если длина волны велика по сравнению с размерами шара, т. е. $k_0R \ll 1$, то в формуле (29) можно воспользоваться разложениями функций $\psi_m(kR)$ и $\zeta_m(kR)$ в ряды, которые следуют из разложений функций $J_{m+\frac{1}{2}}(kR)$ и $H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(kR)$ по степеням малого аргумента kR (см. Дополнение, ч. I, §§ 1 и 3):

$$\psi_0(kR) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\right), \qquad \psi_1(kR) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)},$$

$$\zeta_0(kR) \cong i\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \qquad \zeta_1(kR) \cong -i\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}.$$

Так как

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

то получаем:

$$\psi_0(kR) \cong 1 - \frac{(kR)^2}{6}, \quad \psi_1(kR) \cong \frac{kR}{3},$$

$$\zeta_0(kR) \cong \frac{i}{kR}, \qquad \zeta_1(kR) \cong \frac{i}{(kR)^2},$$

откуда следует:

$$\psi_0'(kR) \cong -\frac{kR}{3}, \qquad \psi_1'(kR) \cong \frac{1}{3},$$

$$\zeta_0'(kR) \cong -\frac{i}{(kR)^2}, \qquad \zeta_1'(kR) \cong -\frac{2i}{(kR)^3}.$$

Подставляя в формулу (29) найденные выражения для ψ_m' и ζ_m', находим:

$$\beta_0 = i\frac{A}{3}(kR)^3, \quad \beta_1 = -\frac{A}{2}(kR)^3.$$

Нетрудно видеть, что следующие коэффициенты пропорциональны $(kR)^5$ поэтому при рассеянии длинных волн ($kR \ll 1$) возмущение w приближенно представляется двумя первыми членами ряда (30)

$$\left.\begin{aligned} w &\cong \beta_0\zeta_0(kr) + \beta_1\zeta_1(kr)\cos\theta \\ [P_0(\cos\theta) &= 1, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta]. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

На больших расстояниях от возмущающей сферы ($kr \gg 1$) в так называемой «дальней» или «волновой» зоне для функций $\zeta_0(kr)$ и $\zeta_1(kr)$ имеем асимптотические представления

$$\zeta_0(kr) \cong \frac{i}{kr}e^{-ikr}, \quad \zeta_1(kr) \cong -\frac{1}{kr}e^{-ikr}, \tag{32}$$

которые вытекают из асимптотических представлений функций Ханкеля.

Подставляя в формулу (31) выражения (32) для $\zeta_0(kr)$ и $\zeta_1(kr)$ и заменяя β_0 и β_1 их приближенными значениями, получим:

$$w \cong -\frac{Ak^2R^3}{3r}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)e^{-ikr}. \tag{33}$$

Обратимся теперь к вычислению интенсивности рассеянной волны; эта величина определяется как среднее значение потока энергии (вектора Умова), равного произведению избыточного звукового давления w на скорость u, причем под w и u следует понимать действительные части соответствующих выражений. В нашем случае

$$\left.\begin{aligned} w &= w_0\cos(\omega t - kr), \\ u &= u_0\cos(\omega t - kr), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где w_0 и u_0 — соответствующие амплитуды.

Вычислим интенсивность звука I в волновой зоне, сохраняя при этом главные члены асимптотических разложений,

$$I = \frac{u_0w_0}{2T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kr)\,dt = \frac{u_0w_0}{2} \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega} — \text{период}\right).$$

Из уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial r}$$

и формулы (34) находим:

$$u_0 = \frac{w_0}{a\rho}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{w_0^2}{2a\rho} = \frac{A^2k^4R^6}{18a\rho r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2.$$

Обозначая мощность, рассеянную сферой в конус $d\theta$, через

$$2\pi r^2 \Sigma(\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

будем иметь:

$$\Sigma(\theta) = \frac{A^2k^4R^6}{18a\rho}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2.$$

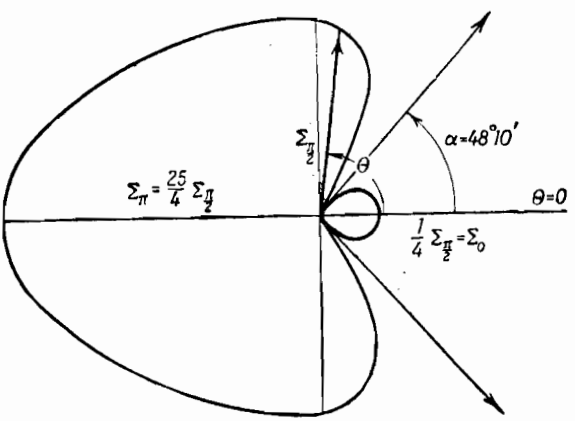


Рис. 87.

Полярная диаграмма интенсивности рассеянного шаром звука приведена на рис. 87 (масштабы не соблюдены). Если

$$\cos\theta = +\frac{2}{3}, \quad \theta = \alpha = 48°10',$$

то в направлении $\theta = \alpha$ рассеяние отсутствует.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VII

1. Найти функцию влияния стационарного точечного источника газа, предполагая, что газ распадается в процессе диффузии. Решить задачу для диффузии в пространстве и на плоскости.

2. Решить ту же задачу в полуплоскости $y > 0$, считая, что при $y = 0$ концентрация равна нулю.

3. а) Решить внутреннюю и внешнюю задачи для уравнения

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0,$$

если на сфере $r = r_0$ задано граничное условие $u|_{r=r_0} = A\cos\theta$.

В случае внешней задачи формулировать условия на бесконечности, обеспечивающие единственность решения.

Рассмотреть аналогичные задачи, предполагая, что

$$u|_{r=r_0} = F(\theta).$$

б) Решить аналогичные задачи для уравнения с двумя независимыми переменными, когда граничные условия заданы на окружности радиуса r_0 и имеют вид

$$u|_{r=r_0} = A\cos\varphi$$

и, соответственно,

$$u|_{r=r_0} = F(\varphi).$$

4. Решить задачи **3** а), б) для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

В случае внутренней задачи исследовать вопрос о том, при каких значениях v_0 существует единственное решение (k считать заданным).

Сформулировать условия, гарантирующие единственность решения как для двух, так и для трех независимых переменных.

5. На глубине h под поверхностью земли находится среда, в которой с постоянной плотностью распределено радиоактивное вещество. Найти концентрацию эманации, считая, что концентрация ее на поверхности равна нулю.

6. Найти собственные частоты мембраны, имеющей форму кольца, радиусы которого равны a и b ($a < b$), считая что $v|_{r=a} = 0$ и $v|_{r=b} = 0$. Показать, что предел первого собственного значения при $a \to 0$ равен первому собственному значению круглой мембраны радиуса b с закрепленной границей.

7. Найти собственные колебания и собственные частоты для эндовибратора цилиндрической формы, считая стенки эндовибратора идеально проводящими. Рассмотреть ту же задачу в акустической интерпретации.

Указание. В случае электромагнитных колебаний ввести поляризационный потенциал (см. приложение I к главе VII).

8. Определить электромагнитное поле точечного диполя в неограниченном пространстве, считая, что величины поля пропорциональны $e^{i\omega t}$. Исследовать асимптотическое поведение решения на больших расстояниях (в волновой зоне). Решить ту же задачу для диполя, находящегося над идеально проводящей поверхностью (вертикальный диполь).

Указание. Ввести поляризационный потенциал.

9. Поставить задачу о распространении электромагнитных волн внутри бесконечного цилиндрического радиоволновода произвольного сечения с идеально проводящими стенками. Рассмотреть волну электрического типа, распространяющуюся вдоль круглого цилиндрического волновода и имеющую наибольшую длину. Найти поле, вычислить поток энергии через сечение, перпендикулярное к основанию (см. приложение I к главе VII).

10. Решить неоднородное

$$\Delta u + k^2 u = -f$$

в неограниченной цилиндрической области круглого сечения, на поверхности которой имеют место однородные граничные условия первого рода или второго рода, и построить функцию источника (см. приложение II к главе VII).

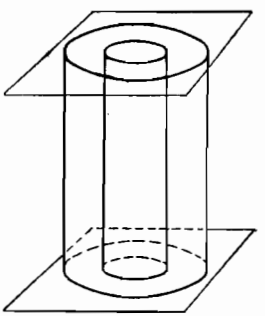


Рис. 88.

11. Построить функцию источника в случае первой краевой задачи для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

а) в полупространстве $z > 0$;
б) на полуплоскости $y > 0$;
в) внутри слоя $-l \leqslant z \leqslant l$.

12. Решить задачу о диффракции плоской электромагнитной волны на бесконечном идеально проводящем цилиндре. Решить эту же задачу в акустической интерпретации.

13. Найти собственные электромагнитные колебания сферического эндовибратора с идеально проводящими стенками. Рассмотреть случаи колебаний типа *TE* и *TM* (см. приложение II к главе VII).

14. Найти собственные электромагнитные колебания эндовибратора, представляющего собой область, заключенную между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндров (рис. 88).

Указание. Для поляризационного потенциала $\Pi_{n,m}$ воспользоваться формулой, аналогичной формуле (14) приложения II к главе VII.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

I. Волны в цилиндрических трубах

1. При конструировании различного рода радиоустановок приходится решать важную задачу о передаче электромагнитной энергии от передатчика к передающей антенне или, наоборот, от антенны к приемнику. Вопросы трансляции электромагнитной энергии встречаются также и в ряде других практических задач современной радиотехники.

До последнего времени эта задача удовлетворительно решалась с помощью двухпроводной линии, представляющей собой два металлических провода, между которыми распространяется электромагнитная волна. Но оказывается, что наряду с недостатками, свойственными вообще передающим линиям, такая двухпроводная линия излучает электромагнитную энергию, причем это излучение увеличивается с повышением частоты радиоволн. Поэтому такой вид передающей линии становится мало удобным в области ультракоротких радиоволн.

В последние годы в технике ультракоротких (сантиметровых и дециметровых) радиоволн для передачи энергии применяются совершенно другие передающие устройства — полые металлические трубы (*радиоволноводы*), внутри которых происходит распространение радиоволн. Такие передающие устройства, обладая малыми потерями, являются очень удобными линиями передач [1]).

Математическая теория распространения радиоволн по трубам была заложена еще Рэлеем, изучавшим распространение акустических волн в трубах. Интенсивное развитие теория радиоволноводов получила в последние годы, особенно в работах советских ученых. В настоящее время свойства круглого, прямоугольного и других типов волноводов изучены достаточно хорошо.

Рассмотрим сначала свойства радиоволноводов произвольного поперечного сечения, а затем проиллюстрируем их на ряде конкретных примеров. Итак, рассмотрим цилиндрическую трубу, неограниченно простирающуюся вдоль оси z. Будем предполагать стенки трубы идеально проводящими. Обозначим Σ — поверхность, S — поперечное

---

[1]) Б. А. Введенский и А. Г. Аренберг, Радиоволноводы, ч. I, Гостехиздат, 1946.

сечение трубы и C — контур, ограничивающий это сечение. Предположим, что: 1) характеристики среды, заполняющей такой волновод, ε и μ равны 1, $\sigma = 0$; 2) внутри волновода отсутствуют источники поля; 3) поля периодически меняются по закону $e^{-i\omega t}$.

Уравнения Максвелла в этом случае принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -ik\boldsymbol{E}, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{H}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right) \tag{1}$$

Поскольку стенки волновода являются идеально проводящими, тангенциальная компонента E_t на стенке волновода равна нулю

$$E_t|_\Sigma = 0. \tag{2}$$

Покажем, что внутри волновода могут распространяться бегущие электромагнитные волны. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} + k^2 \boldsymbol{\Pi}, \\ &\boldsymbol{H} = -ik \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\Pi}$ — поляризационный потенциал. Рассмотрим случай, когда вектор $\boldsymbol{\Pi}$ имеет лишь одну компоненту, направленную вдоль оси z. В этом случае уравнения (1) после подстановки в них выражений (3) дадут:

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0 \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{\Pi} = \Pi \boldsymbol{i}_z).$$

Условие (2) будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$\Pi|_\Sigma = 0. \tag{5}$$

Ищем решение в виде

$$\Pi(M, z) = \psi(M) f(z), \tag{6}$$

где M — точка, лежащая в поперечном сечении S. Подставляя (6) в (4), приходим к выводу, что $\psi(M)$ является собственной функцией задачи о колебаниях мембраны, закрепленной по контуру, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2 \psi + \lambda \psi = 0 \quad \text{внутри } S, \\ &\psi|_C = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа.

Обозначим через $\{\lambda_n\}$ и $\{\psi_n\}$ систему собственных значений и собственных функций этой задачи. Частное решение задачи (4) имеет вид

$$\Pi_n(M, z) = \psi_n(M) f_n(z),$$

где функция $f_n(z)$ определяется из уравнения

$$f_n'' + (k^2 - \lambda_n) f_n = 0. \tag{8}$$

Общее решение уравнения (8)

$$f_n(z) = A_n e^{i\gamma_n z} + B_n e^{-i\gamma_n z} \quad (\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}). \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что член $A_n e^{i\gamma_n z}$ соответствует волне, бегущей в положительном направлении оси z, второй же член в формуле (9) — волне, бегущей в обратном направлении.

Рассматривая лишь волну, бегущую в одном направлении, положим

$$f_n(z) = A_n e^{i\gamma_n z},$$

тогда получим решение в виде

$$\Pi_n(M, z) = A_n \psi_n(M) f_n(z), \tag{10}$$

где A_n — постоянная, определяемая из условий возбуждения полей.

Подставляя выражение (10) в формулы (3) и восстанавливая множитель $e^{-i\omega t}$, найдем составляющие поля в виде

$$\Pi_n(M, z) = F_n(M) e^{i(\gamma_n z - \omega t)}, \tag{11}$$

где F_n — функция, выражающаяся через собственную функцию мембраны $\psi_n(M)$ или ее производные.

Если $k^2 > \lambda_n$, то γ_n вещественно и выражение (11) представляет собой бегущую волну, распространяющуюся вдоль оси z с фазовой скоростью

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \lambda_n}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{k^2}}} > c.$$

Групповая скорость волны, очевидно, равна

$$u = \frac{c^2}{v} = c\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{k^2}} < c,$$

т. е. в пустом волноводе имеет место дисперсия.

Если $k^2 < \lambda_n$, то $\gamma_n = i\varkappa_n$ $(\varkappa_n > 0)$ и вместо выражения (11) получаем затухающую волну

$$F_n(M) e^{-i\omega t - \varkappa_n z}, \tag{12}$$

распространяющуюся вдоль оси z в положительном направлении.

Так как собственные частоты λ_n мембраны неограниченно возрастают с увеличением номера n, то какова бы ни была частота ω, начиная с некоторого номера $n = N$, будем иметь:

$$k^2 < \lambda_n.$$

Следовательно, в волноводе может распространяться лишь конечное число бегущих волн. Если $k^2 < \lambda_1$, то в волноводе не может существовать ни одной бегущей волны.

Для того чтобы в волноводе заданной формы и размеров могла распространяться хотя бы одна бегущая волна, должно, очевидно, выполняться условие

$$\lambda_1 < k^2 \quad \text{или} \quad \Delta < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

где Δ — длина волны, распространяющейся в трубе.

Для волновода прямоугольного сечения со сторонами a и b имеем:

$$\lambda_n = \lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \qquad \begin{pmatrix} m = 1,\ 2,\ \ldots \\ n = 1,\ 2,\ \ldots \end{pmatrix}, \tag{13}$$

и следовательно, бегущая волна может существовать лишь при условии

$$k > \pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad \text{или} \quad \Delta < \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}. \tag{14}$$

Решениями уравнений Максвелла могут быть также поля с равной нулю z-составляющей электрического поля

$$E_z = 0. \tag{15}$$

Вводя вектор $\hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\Pi} i_z$ и полагая

$$\hat{\boldsymbol{E}} = ik \operatorname{rot} \hat{\mathbf{\Pi}}; \qquad \hat{\boldsymbol{H}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\mathbf{\Pi}} + k^2 \hat{\mathbf{\Pi}} \tag{16}$$

$$(\hat{E}_z = 0),$$

убеждаемся, что функция $\Pi(M, z)$ должна определяться из уравнения

$$\Delta\hat{\Pi} + k^2\hat{\Pi} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2\hat{\Pi} + \frac{\partial^2\hat{\Pi}}{\partial z^2} + k^2\hat{\Pi} = 0 \tag{17}$$

и граничного условия

$$\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на } \Sigma. \tag{18}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, найдем решения этой задачи

$$\hat{\Pi}_n = \hat{A}_n\hat{\psi}_n(M)\, e^{i\hat{\gamma}_n z} \quad (\hat{\gamma}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n}), \tag{19}$$

которым соответствуют решения уравнения Максвелла вида

$$\hat{F}_n(M)\, e^{i(\hat{\gamma}_n z - \omega t)}.$$

Здесь $\hat{\psi}_n(M)$ и $\hat{\lambda}_n$ означают собственные функции и собственные частоты мембраны S со свободной границей

$$\Delta_2\hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n\hat{\psi}_n = 0 \quad \text{в } S,$$
$$\frac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial\nu} = 0 \qquad \text{на } C.$$

Таким образом, в волноводе могут существовать электромагнитные поля двух типов $\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\}$ и $\{\hat{\boldsymbol{E}}, \hat{\boldsymbol{H}}\}$, определяемые по формулам (3) и (16). Принята следующая терминология: говорят об электрических волнах (или волнах типа TM), если $H_z = 0$, или о магнитных волнах (типа TE), если $E_z = 0$. Мы убедились, что в волноводе могут существовать волны TE и TM. Можно показать [1]), что любое поле в волноводе представимо в виде суммы полей TE и TM. Отсюда следует, что произвольное поле в волноводе можно определить, если известны две скалярные функции $\Pi(M, z)$ и $\hat{\Pi}(M, z)$.

2. Найдем величину энергии, уносимой бегущей волной, например типа TM.

Для этого вычислим величину потока вектора Умова — Пойнтинга через сечение S:

$$W_z = \frac{c}{8\pi}\int_S\int [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}^*]_z\, dS, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{H}^*$ — вектор, комплексно-сопряженный вектору $\boldsymbol{H}$, S — перпендикулярное сечение волновода.

Введем прямоугольную систему координат x, y, z. Тогда

$$W_z = \frac{c}{8\pi}\int_S\int (E_x H_y^* - E_y H_x^*)\, dx\, dy. \tag{21}$$

Выразим составляющие поля через поляризационный потенциал Π по формулам

$$E_x = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial z}, \qquad E_y = \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial z},$$
$$H_x^* = ik\frac{\partial\Pi^*}{\partial y}, \qquad H_y^* = -ik\frac{\partial\Pi^*}{\partial x}$$

и подставим их значения в равенство (21)

$$W_z = -\frac{c}{8\pi}ik\int_s\int\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\Pi^*}{\partial x} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial\Pi^*}{\partial y}\right)dx\, dy. \tag{22}$$

Функция Π и сопряженная ей функция Π^* согласно (10) представимы в виде

$$\Pi(M, z) = A_n\psi_n(M)\, e^{i\gamma_n z},$$
$$\Pi^*(M, z) = A_n^*\psi_n(M)\, e^{-i\gamma_n z},$$

[1]) А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Вестник МГУ, вып. 7, 1948.

где ψ_n — собственная функция закрепленной мембраны $C(\psi_n|_c = 0)$. Отсюда следует, что вместо (22) можно написать

$$W_z = \frac{ck}{8\pi}\gamma_n |A_n|^2 \int\int_S \left[\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \\ = \frac{ck}{8\pi}\gamma_n |A_n|^2 \int_S (\nabla\psi_n)^2\, dS.$$

Применяя первую формулу Грина

$$\int\int_S (\nabla\psi_n)^2\, dS = -\int\int_S \psi_n \Delta_2 \psi_n\, dS + \int_C \psi_n \frac{\partial\psi_n}{\partial\nu}\, ds = \lambda_n \int\int_S \psi_n^2\, dS = \lambda_n,$$

получаем выражение для потока энергии бегущей волны номера n

$$W_z = \frac{ck}{8\pi} |A_n|^2 \gamma_n \lambda_n. \tag{23}$$

Если одновременно распространяется несколько волн, то W_z будет равно сумме слагаемых вида (23).

Перейдем теперь к задаче о возбуждении электромагнитных полей в волноводе заданными токами [1]).

3. Пусть в некотором объеме V_0 внутри волновода Σ заданы токи $\boldsymbol{j}(M, z)\, e^{-i\omega t}$, меняющиеся во времени по гармоническому закону. Найдем поля, возбуждаемые этими токами. В силу принципа суперпозиции полей достаточно, очевидно, решить задачу о возбуждении волновода элементарным диполем произвольной ориентации.

Чтобы дать представление о методе решения поставленной выше общей задачи, рассмотрим более простой случай возбуждения волновода линейным током $I = I_0(z)\, e^{-i\omega t}$, заданным на отрезке L, параллельном оси z.

Для определения электромагнитных полей, возбужденных в волноводе, надо использовать:

1. Уравнения Максвелла (1).

2. Граничные условия

$$E_{\text{tang}} = 0 \quad \text{на } \Sigma.$$

3. Условие излучения в виде требования отсутствия волн, приходящих из бесконечности.

4. Условие возбуждения, которое мы берем в виде [2])

$$\oint_{K_\varepsilon} H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} I_0 \quad \text{или} \quad H_s \approx \frac{2I_0}{c\rho}, \tag{24}$$

где K_ε — круг радиуса ε ($\varepsilon \to 0$), охватывающий линию L, $\rho = MM_0$, где M_0 — точка на токе, M — точка на окружности K_ε. Иными

[1]) А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ 27, вып. 11, 12, 1947.
[2]) См. главу V, приложение II, п. 3.

словами, электромагнитное поле на токе должно иметь особенность определенного типа.

Перейдем к потенциалу Π, воспользовавшись для этого формулами (3). Пусть (M_0, ξ) — произвольная точка на токе. Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z с центром в точке (M_0, ξ) и вычислим H_s, пользуясь уравнением (3),

$$H_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}.$$

Отсюда и из (24) следует, что в точке (M_0, ξ) функция Π должна иметь логарифмическую особенность

$$\Pi \approx \frac{2I_0}{c} \ln \frac{1}{\rho}. \tag{25}$$

Таким образом, функция $\Pi(M, z)$ должна удовлетворять волновому уравнению (4), граничному условию $\Pi = 0$ на Σ, условию излучения и условию возбуждения (25).

Будем искать решение этой задачи в виде

$$\Pi = K \int_L \Pi_0(M, M_0; z, \zeta) I_0(\zeta)\, d\zeta, \tag{26}$$

где $\Pi_0(M, M_0; z, \zeta)$ — функция источника, определяемая как решение уравнения

$$\Delta \Pi_0 + k^2 \Pi_0 = 0$$

по переменным (M, z) и (M_0, ζ), удовлетворяющее граничному условию

$$\Pi_0 = 0 \quad \text{на } \Sigma,$$

условию излучения и имеющее особенность типа $\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$ при совпадении аргументов, т. е. представимое в виде суммы

$$\Pi_0(M, M_0; z, \zeta) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + v(M, M_0; z, \zeta)$$

$$(r = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}, \quad \rho = MM_0),$$

где v — регулярная функция, определяемая из волнового уравнения и граничного условия

$$v = -\frac{e^{+ikr}}{4\pi r} \quad \text{на } \Sigma.$$

Нетрудно видеть, что функция $\Pi(M, z)$, определяемая по формуле (26), будет иметь логарифмическую особенность, и условие возбуждения выполнится, если положить нормирующий множитель

$$K = \frac{4\pi}{c}.$$

Отюда следует, что

$$\Pi(M, z) = \frac{4\pi}{c} \int_L \Pi_0(M, M_0; z, \zeta) I_0(\zeta) d\zeta.$$

В частности, для элемента тока длины l

$$\Pi(M, z) = \frac{4\pi}{c} I \cdot l \cdot \Pi_0.$$

Следовательно, Π_0 имеет физический смысл *поляризационного потенциала*, соответствующего возбуждению элементом тока, помещенным в точке (M_0, ζ) параллельно оси волновода.

Таким образом, задача определения поля в волноводе полностью сведена к построению функции источника Π_0 первой краевой задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ в неограниченной области.

Для построения функции источника может быть применен метод, изложенный в главе VI, § 2. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f(M, z), \tag{27}$$

где $f(M, z)$ — заданная функция с граничным условием

$$u|_\Sigma = 0.$$

Будем искать функцию $u(M, z)$ в виде ряда

$$u(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \psi_n(M), \tag{28}$$

где $\psi_n(M)$ — нормированные собственные функции мембраны S

$$\Delta_2 \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0, \quad \psi_n|_\sigma = 0. \tag{7}$$

Разлагая $f(M, z)$ в ряд

$$f(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \psi_n(M), \quad f_n(z) = \int\int_S f(M', z) \psi_n(M') d\sigma_{M'} \tag{29}$$

и подставляя выражения (28) и (29) в уравнение (27), получаем уравнение

$$u_n''(z) - p_n^2 u_n(z) = -f_n(z), \quad p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}. \tag{30}$$

Решение этого уравнения, как нетрудно заметить, представляется формулой

$$u_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2p_n} f_n(\zeta) d\zeta, \tag{31}$$

которая в силу формулы (29) может быть записана в виде

$$u_n(z) = \int_S \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2p_n} f(M', \zeta)\psi_n(M')\, d\sigma_{M'}\, d\zeta. \qquad (31')$$

Подставляя это выражение в формулу (28) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$u(M, z) = \int_T \int \int \Pi_0(M, M', z-\zeta) f(M', \zeta)\, d\sigma_{M'}\, d\zeta, \qquad (32)$$

где

$$\Pi_0(M, M', z-\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M')}{2p_n} e^{-p_n|z-\zeta|}. \qquad (33)$$

Ряд $\Pi_0(M, M', z-\zeta)$ при $z \neq \zeta$ равномерно и абсолютно сходится в силу оценок для собственных функций [1]) и присутствия экспоненциального множителя. Функция $\Pi(M, M', z-\zeta)$ в точке $(M = M', z = \zeta)$ имеет особенность типа $\frac{1}{r}$. На доказательстве последнего утверждения мы не останавливаемся [2]). Из сказанного выше следует, что

$$G(M, M', z-\zeta) = \Pi_0(M, M', z-\zeta),$$

т. е. функция источника Π_0 имеет вид

$$\Pi_0(M, M', z-\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M')}{2p_n} e^{-p_n|z-\zeta|}.$$

---

[1]) Для собственных функций $\psi_n(M)$ имеет место равномерная оценка $|\psi_n(M)| \leqslant A\lambda_n$, где A — постоянная, не зависящая ни от точки M, ни от индекса n. В самом деле, краевая задача (7) равносильна интегральному уравнению $\psi_n(M) = \lambda_n \int_S \int G(M, M')\psi_n(M')\, d\sigma_{M'}$, где $G(M, M')$ — функция источника для уравнения Лапласа $\Delta_2 u = 0$ при граничном условии $u|_C = 0$. Из этого интегрального уравнения вытекает в силу неравенства Буняковского

$$|\psi_n| \leqslant |\lambda_n| \sqrt{\int_S \int G^2(M, M')\, d\sigma_{M'} \int_S \int \psi_n^2(M')\, d\sigma_{M'}} \leqslant A|\lambda_n|,$$

так как

$$\int_S \int \psi_n^2(M')\, d\sigma_{M'} = 1; \quad \int_S \int G^2(M, M')\, d\sigma_{M'} \leqslant A^2.$$

Аналогичным методом получаются оценки для производных

$$\left|\frac{\partial \psi_n}{\partial x}\right| \leqslant B\lambda_n^2, \quad \left|\frac{\partial \psi_n}{\partial y}\right| \leqslant B\lambda_n^2.$$

[2]) См. А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ **27**, вып. 11, 1947.

Из формулы (33) следует, что поле в этом случае представится в виде суперпозиции волн вида (11) и (12). Из замечания на стр. 522 следует, что ряд (33) будет состоять из конечного числа слагаемых вида

$$B_n\psi_n(M)\,e^{i\gamma_n|z-\zeta|} \quad \text{(бегущие волны)}$$
$$(\gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n},\quad p_n=-i\gamma_n)$$

и из бесконечного числа слагаемых вида

$$B'_n\psi_n(M)\,e^{-p_n|z-\zeta|} \quad \text{(затухающие волны)},$$

где

$$B'_n=\frac{\psi_n(M')}{2p_n},\qquad p_n=\sqrt{\lambda_n-k^2},\qquad \lambda_n>k^2.$$

Для определения полей надо воспользоваться формулами (26) и (3).

Задача о возбуждении волновода элементом магнитного тока, параллельным оси z (бесконечно малая петля с электрическим током в плоскости $S_{z=\zeta}$), приводит нас ко второй функции источника

$$\hat{\Pi}_0(M,\ M';\ z-\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(M')}{2\hat{p}_n}\,e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|},$$

$$p_n=\sqrt{\lambda_n-k^2},$$

удовлетворяющей граничному условию $\frac{\partial\hat{\Pi}_0}{\partial\nu}=0$ на Σ. При этом $H_z=0$; $\hat{\Pi}=\frac{4\pi}{c}kl\hat{\Pi}_0$ (kl — момент элемента магнитного тока).

Аналогичным методом можно решить задачу о возбуждении произвольно ориентированным диполем (элементом тока), найдя особенности полей в этом случае. Соответствующие функции Π будут определяться по формуле, аналогичной формуле (33). В случае поверхностных и объемных токов функции Π даются поверхностными и объемными интегралами (по аналогии с (26)). Дальнейшее вычисление полей производится по формулам (16).

Тем самым задача о возбуждении любого цилиндрического волновода произвольными заданными токами решается полностью. Чтобы использовать общие формулы для волновода определенного сечения, достаточно найти собственные колебания мембраны, имеющей форму перпендикулярного сечения волновода.

Приведем выражения для ортонормированных собственных функций прямоугольной мембраны со сторонами a и b:

$$\psi_n(M)=\psi_{nm}(x,\ y)=\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi n}{b}y;$$

$$\hat{\psi}_n(M)=\hat{\psi}_{nm}(x,\ y)=\sqrt{\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}}\cos\frac{\pi m}{a}x\cos\frac{\pi n}{b}y\ (\varepsilon_j=2,\ j\neq 0;\ \varepsilon_0=1);$$

$$\lambda_{mn}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right).$$

Для круглой мембраны радиуса a имеем:

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{J_n\left(\mu_{mn}\frac{r}{a}\right)}{J_n'(\mu_{mn})} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\varphi,$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{\hat{\mu}_{mn}}{\sqrt{\hat{\mu}_{mn}^2 - n^2}} \frac{J_n\left(\frac{\hat{\mu}_{mn}}{a} r\right)}{J_n(\hat{\mu}_{mn})} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\varphi,$$

где μ_{mn} — корень уравнения $J_n(\mu) = 0$; $\lambda_{mn} = \frac{\mu_{mn}^2}{a^2}$, $\hat{\mu}_{mn}$ — корень уравнения $J_n'(\mu) = 0$; $\hat{\lambda}_{mn} = \frac{\hat{\mu}_{mn}^2}{a^2}$.

II. Электромагнитные колебания в полых резонаторах

В последние годы в радиотехнике получили широкое распространение *объемные резонаторы* или *эндовибраторы*, представляющие собой металлические полости, заполненные диэлектриком (в частности, воздухом). В эндовибраторах могут существовать стационарные электромагнитные поля (стоячие волны), называемые собственными электромагнитными колебаниями.

В радиотехнике ультракоротких волн применяются эндовибраторы весьма сложной формы. Общая проблема определения собственных колебаний эндовибраторов произвольной формы чрезвычайно сложна, однако для эндовибраторов простейшей формы решение получается в явном виде. Так как стенки изготовляются из хорошо проводящего металла, то при расчете собственных колебаний обычно предполагают стенки идеально проводящими. Поправки на конечную проводимость можно получить, используя граничные условия Леонтовича. В дальнейшем мы будем предполагать, что стенки эндовибратора являются идеально проводящими и все величины поля меняются во времени по закону $e^{-i\omega t}$.

Не ставя своей целью дать исчерпывающее изложение теории эндовибраторов, остановимся на некоторых общих вопросах теории этих колебательных систем.

1. Собственные колебания цилиндрического эндовибратора. Проблема определения собственных электромагнитных колебаний состоит в нахождении нетривиальных решений уравнений Максвелла [1]), точнее в определении собственных частот ω, при которых система однородных уравнений Максвелла имеет нетривиальные решения, а также самих нетривиальных решений.

---

[1]) Множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опускаем.

Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -ik\boldsymbol{E}, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{H}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \end{aligned} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right) \right\} \tag{1}$$

внутри полости T, на поверхности которой Σ выполняются условия

$$E_t = 0 \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial H_\nu}{\partial \nu} = 0; \tag{3}$$

оба эти условия, как нетрудно показать, эквивалентны.

Приведем расчет собственных колебаний для эндовибратора, представляющего «отрезок» цилиндрического волновода произвольного сечения, ограниченный двумя боковыми стенками $z = \pm l$ (ось z параллельна образующей цилиндра).

Так же как и в цилиндрическом волноводе, в рассматриваемом эндовибраторе возможны колебания и электрического типа ($H_z = 0$) и магнитного типа ($E_z = 0$).

Для волн электрического типа положим

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} + k^2 \boldsymbol{\Pi}, \\ &\boldsymbol{H} = -ik \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi}, \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\Pi} = \Pi \boldsymbol{i}_z$ ($\boldsymbol{i}_z$ — единичный вектор, направленный по оси z)—поляризационный вектор-потенциал, у которого отлична от нуля лишь составляющая по оси z. Из формулы (4) сразу видно, что в этом случае $H_z = 0$.

Функция Π, как обычно, удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0. \tag{5}$$

Выберем на поверхности Σ локальную прямоугольную систему координат ($\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{i}_z$), где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности, $\boldsymbol{s}$ — по касательной к контуру C, ограничивающему перпендикулярное сечение S цилиндрического эндовибратора.

В силу граничных условий (2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &E_s|_\Sigma = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial s\, \partial z}\right|_\Sigma = 0, \\ &E_z|_\Sigma = \left.\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi\right)\right|_\Sigma = 0. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Оба эти равенства будут удовлетворены, если потребовать, чтобы

$$\Pi|_\Sigma = 0. \tag{7}$$

При $z = \pm l$ из (2) получаем условия

$$E_s|_{z=\pm l} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial s\, \partial z}\Big|_{z=\pm l} = 0,$$

$$E_\nu|_{z=\pm l} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu\, \partial z}\Big|_{z=\pm l} = 0,$$

для выполнения которых достаточно положить

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}\Big|_{z=\pm l} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, мы приходим к следующей краевой задаче:

найти нетривиальные решения волнового уравнения

$$\Delta_2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0 \tag{6'}$$

с однородными граничными условиями

$$\Pi|_\Sigma = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}\Big|_{z=\pm l} = 0. \tag{8}$$

Как и в случае цилиндрического волновода (см. стр. 539), решение ищем в виде

$$\Pi(M, z) = \psi(M) f(z). \tag{9}$$

Подставляя это выражение в уравнение (6') и используя условие (7), получаем для функции $\psi(M)$ задачу о собственных колебаниях закрепленной мембраны, имеющей форму перпендикулярного сечения S,

$$\Delta_2 \psi + \lambda \psi = 0 \text{ в } S, \tag{10}$$

$$\psi = 0 \text{ на } C. \tag{11}$$

Для определения функции $f(z)$ после разделения переменных получаем уравнение

$$f'' + (k^2 - \lambda) f = 0 \tag{12}$$

с граничным условием

$$f'(\pm l) = 0, \tag{13}$$

вытекающим из условия (8).

Следует иметь в виду, что здесь, в отличие от задачи для волноводов, k^2 не является заданной величиной, а входит в уравнение в качестве параметра. Мы должны найти те значения k^2, при которых задача (6) — (8) допускает нетривиальное решение.

Решая уравнение (12) с условиями (13), находим собственные функции

$$f_m(z) = A_m \cos \frac{\pi m}{2l}(l - z),$$

соответствующие собственным значениям

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 \quad (m = 0,\ 1,\ \ldots),$$

где

$$\mu_m = k_m^2 - \lambda.$$

Краевая задача (10)—(11) дает спектр собственных значений $\{\lambda_n\}$ с соответствующей системой нормированных собственных функций $\{\psi_n(M)\}$. Отсюда вытекает, что в эндовибраторе могут существовать только такие колебания, собственные или резонансные частоты которых равны

$$\omega_{mn} = c\sqrt{\lambda_n + \mu_m}.$$

Этим частотам соответствует система собственных функций

$$\Pi_{n,m}(M,\ z) = \bar{A}_{n,\ m}\psi_n(M)\cos\frac{\pi m}{2l}(l - z) \tag{14}$$

или

$$\Pi_{n,\ m}(M,\ z) = A_{n,\ m}\psi_n(M) f_m(z), \tag{14'}$$

где

$$f_m(z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2l}}\cos\frac{\pi m}{2l}(l - z), \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2; & m \neq 0; \\ 1; & m = 0, \end{cases}$$

— нормированные к единице функции. Решение определено с точностью до амплитудного множителя $A_{n,\ m}$, который находится из условий возбуждения колебания данного типа.

Если собственные функции мембраны $\psi_n(M)$ известны, то по формулам (4) и (5) можно вычислить компоненты поля.

Если поперечное сечение S эндовибратора представляет собой прямоугольник со сторонами a и b, то будем иметь:

$$\psi_n(M) = \psi_{p,\ q}(x,\ y) = \sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi p}{a}x\sin\frac{\pi q}{b}y$$

$$(p,\ q = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$\lambda_n = \lambda_{p,\ q} = \pi^2\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right),$$

$$\Pi_{n,\ m} = A_{m,\ p,\ q}\sqrt{\frac{2\varepsilon_m}{abl}}\sin\frac{\pi p}{a}x\sin\frac{\pi q}{b}y\cos\frac{\pi m}{2l}(l - z).$$

В этом случае наименьшей собственной частоте

$$\omega_{0,\ 1,\ 1} = c\sqrt{\lambda_{1,\ 1}} = c\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

соответствует максимальная допустимая длина волны

$$\Lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}.$$

В частности, при $b = a$ наибольшая длина волны

$$\Lambda_0 = a\sqrt{2}$$

равна диагонали квадрата, получающегося в перпендикулярном сечении. Следовательно, в таком эндовибраторе возможны лишь собственные колебания с частотой

$$\omega \geqslant \omega_{0,\,1,\,1}$$

или длиной волны

$$\Lambda \leqslant \Lambda_0.$$

Совершенно аналогично находятся собственные колебания магнитного типа ($E_z = 0$). В этом случае полагаем

$$\boldsymbol{E} = ik\,\mathrm{rot}\,\hat{\boldsymbol{\Pi}},$$

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\boldsymbol{\Pi}} + k^2\hat{\boldsymbol{\Pi}},$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}} = \hat{\Pi}\boldsymbol{l}_z.$$

Для определения $\hat{\Pi}(M,\ z)$ получаем уравнение (6) с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\nu}\right|_{\Sigma} = 0, \tag{7'}$$

$$\hat{\Pi}|_{z=\pm l} = 0, \tag{8'}$$

решая которые находим:

$$\hat{\Pi}_{n,m} = \hat{A}_{n,m}\hat{\psi}_m(M)\sin\frac{\pi m}{l}(l - z). \tag{15}$$

В этом случае под $\hat{\psi}_n(M)$ следует понимать собственные функции мембраны S при граничном условии $\dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial\nu} = 0$ на C.

2. Электромагнитная энергия собственных колебаний. Вычислим энергию электрического и магнитного полей в стоячей волне в цилиндрическом эндовибраторе.

Для простоты ограничимся случаем волны электрического типа. Учитывая в формулах (4) и (5) зависимость $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ от времени по закону $e^{-i\omega t}$ и беря только действительную часть, получаем:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial x}\cos\omega t,\\ E_y &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial y}\cos\omega t,\\ E_z &= \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi\right)\cos\omega t, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -k\frac{\partial\Pi}{\partial y}\sin\omega t,\\ H_y &= k\frac{\partial\Pi}{\partial x}\sin\omega t,\\ H_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Для вычисления энергии электрического и магнитного полей воспользуемся известными формулами

$$\mathscr{E}_{\text{эл}}(t) = \frac{c}{8\pi} \iiint\limits_T E^2 \, d\tau, \tag{18}$$

$$\mathscr{E}_{\text{м}}(t) = \frac{c}{8\pi} \iiint\limits_T H^2 \, d\tau, \tag{19}$$

где интегрирование производится по объему T эндовибратора.

Подставляя в формулу (18) выражения (16) и пользуясь формулой (14′), будем иметь [1]):

$$\mathscr{E}_{\text{эл}}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi} \cos^2 \omega t \left\{ \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \right] d\sigma \int\limits_{-l}^{l} |f'(z)|^2 \, dz + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_S \psi^2 \, d\sigma \int\limits_{-l}^{l} (f'' + k^2 f)^2 \, dz \right\}.$$

Производя несложные вычисления, получим:

$$\int\limits_{-l}^{l} [f'(z)]^2 \, dz = ff' \Big|_{-l}^{l} - \int\limits_{-l}^{l} ff'' \, dz = (k^2 - \lambda) \int\limits_{-l}^{l} f^2 \, dz = k^2 - \lambda, \tag{19′}$$

$$\int\limits_{-l}^{l} (f'' + k^2 f)^2 \, dz = \lambda^2 \int\limits_{-l}^{l} f^2 \, dz = \lambda^2, \tag{20}$$

так как в силу нормировки функций f

$$\int\limits_{-l}^{l} f^2 \, dz = 1. \tag{21}$$

Для вычисления интегралов по S воспользуемся первой формулой Грина, уравнением для функции ψ_n, граничными условиями и условием нормировки

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \right] dx \, dy = \iint\limits_S (\nabla_2 \psi)^2 \, d\sigma =$$
$$= - \iint\limits_S \psi \Delta_2 \psi \, d\sigma + \int\limits_C \psi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \, ds = \lambda \iint\limits_S \psi^2 \, d\sigma = \lambda, \tag{22}$$

где ∇_2 — оператор «набла» в плоскости S, Δ_2 — двумерный оператор Лапласа. В результате получаем выражение для энергии электриче-

[1]) Значки m, n мы временно опускаем.

ского поля

$$\mathcal{E}_{эл}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi} k^2 \lambda \cos^2 \omega t. \tag{23}$$

Для энергии магнитного поля в силу формул (17), (19) и (14′) имеем:

$$\mathcal{E}_{м}(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \int_S \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy \int_{-l}^{l} f^2\, dz \sin^2 \omega t,$$

откуда, учитывая равенства (21) и (22), находим:

$$\mathcal{E}_{м}(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda \sin^2 \omega t. \tag{24}$$

Полная энергия электромагнитного поля, очевидно, не меняется во времени:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{эл}(t) + \mathcal{E}_{м}(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda. \tag{25}$$

Из формул (23) и (24) видно, что в стоячей волне происходит взаимное превращение электрической энергии в магнитную и обратно, причем средняя за период энергия электрического поля

$$\bar{\mathcal{E}}_{эл} = \frac{1}{2} \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathcal{E} \tag{26}$$

равна средней энергии магнитного поля

$$\bar{\mathcal{E}}_{м} = \frac{1}{2} \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathcal{E}. \tag{27}$$

3. Возбуждение колебаний в эндовибраторе. Для возбуждения поля в эндовибраторе внешним источником надо ввести через щель в его оболочке элемент связи. Таким элементом связи может быть либо виток, либо стержень, действующий как маленькая антенна. Для того чтобы элемент связи не возмущал поля в эндовибраторе, необходимо, чтобы его размеры были много меньше длины волны. Возможны и другие способы возбуждения эндовибратора, например пучком электронов, пронизывающим полость эндовибратора (через отверстия в его стенках).

Решение задачи о возбуждении эндовибратора антенной, помещенной внутрь, или в предельном случае элементарным диполем, требует учета конечной проводимости стенок. В противном случае установившийся процесс невозможен. Учет конечной проводимости стенок может быть произведен с помощью *условий Леонтовича*.

Мы рассмотрим здесь задачу о возбуждении сферического эндовибратора диполем, допускающую простое аналитическое решение [1]).

[1]) См. С. М. Рытов, ДАН **51**, вып. 2, 1946.

Пусть в центре сферы радиуса r_0 помещен диполь, колеблющийся с частотой ω и амплитудой 1 и направленный вдоль оси z. Требуется найти поле внутри сферы, учитывая конечную проводимость стенок.

В этом случае поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно выразить через функцию U:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{l}{\rho \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right), \\ E_\theta &= -\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\theta}\right), \\ H_\varphi &= \frac{\partial U}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Остальные компоненты E_φ, H_r, H_θ равны нулю.

Так как диполь направлен по оси z ($\theta = 0$), то поля, очевидно, не должны зависеть от угла φ.

Функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+U=0, \tag{29}$$

где $\rho = kr$, причем U имеет при $\rho \to 0$ особенность вида

$$\frac{ie^{ikr}}{r^2} = \frac{ik^2e^{i\rho}}{\rho^2}. \tag{30}$$

На поверхности сферы ($\rho = \rho_0$) должно выполняться условие Леонтовича

$$E_\theta = aH_\varphi, \tag{31}$$

где

$$a = \mu kd\sqrt{\frac{i}{2}} \qquad \left(d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}\right) \tag{32}$$

— эффективная глубина скин-слоя.

Из соотношений (31) и (28) вытекает граничное условие для функции U

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho U) - i\rho_0 aU\right]_{\rho=\rho_0} = 0$$

или

$$\rho_0\frac{\partial U}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_0}+(1-i\rho_0 a)\,U\Big|_{\rho=\rho_0}=0. \tag{33}$$

Решением уравнения (29), имеющим особенность (30), очевидно, является функция

$$U = -k^2\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\left[H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(\rho)+CJ_{\frac{3}{2}}(\rho)\right]P_1(\cos\theta),$$

где $P_1(\cos\theta)$ — полином Лежандра первого порядка, $H^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ — функция Ханкеля первого рода, $J_{\frac{3}{2}}$ — функция Бесселя,

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta,$$

$$H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\rho}\left(\frac{1}{i\rho} - 1\right),$$

$$J_{\frac{3}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left(\frac{\sin\rho}{\rho} - \cos\rho\right).$$

Постоянная C определяется из граничного условия (33)

$$C = -e^{i\rho_0}\frac{1 - \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{i}{\rho_0} + a\left(\frac{1}{i\rho_0} - 1\right)}{i\left[\frac{\cos\rho_0}{\rho_0} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2}\right)\sin\rho_0 - ia\left(\frac{\sin\rho_0}{\rho_0} - \cos\rho_0\right)\right]}.$$

Полученное решение можно использовать для определения величины потерь в стенках. Мощность, поглощаемая в стенках,

$$Q = \frac{\mu\omega d}{16\pi}\int_0^{\pi} |H_\varphi|^2\, 2\pi\rho_0^2 \sin\theta\, d\theta$$

вычисляется непосредственно и равна

$$Q = \frac{\mu\omega k^4 d}{6}\,\frac{1}{|B - iaA|^2},$$

где

$$A = \frac{\sin\rho_0}{\rho_0} - \cos\rho_0, \qquad B = \frac{\cos\rho_0}{\rho_0} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2}\right)\sin\rho_0.$$

Если диполь расположен не в центре сферы, то расчет полей сильно осложняется, однако решение может быть получено в виде рядов [1]).

III. Скин-эффект

Переменный ток в отличие от постоянного не распределяется равномерно по сечению проводника, а имеет бóльшую плотность у его поверхности. Это явление называют *скин-эффектом* [2]) (по-английски *skin* — кожа).

Рассмотрим, для простоты, бесконечный однородный цилиндрический провод ($\mu = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$), по которому течет переменный

[1]) См. В. Никитина (ЖТФ, в печати).
[2]) И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1946.

ток. Будем предполагать, что полный ток $I = I_0 e^{i\omega t}$, протекающий через сечение провода, известен.

Пренебрегая токами смещения по сравнению с током проводимости [1]) и считая процесс установившимся, т. е. зависящим от времени по закону $e^{i\omega t}$, получим, после сокращения на множитель $e^{i\omega t}$, уравнения Максвелла в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \boldsymbol{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -ik\mu \boldsymbol{H}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{4}$$

где $k = \frac{\omega}{c}$. Уравнения (3) и (4) в данном случае, очевидно, следуют из уравнений (1) и (2).

Введем цилиндрическую систему координат (r, ϑ, φ), так чтобы ось z совпадала с осью провода. Тогда в силу осевой симметрии тока все величины можно считать зависящими только от переменной r.

Так как в нашем случае вектор $\boldsymbol{E}$ направлен вдоль оси z, то из уравнений (1) и (2) будем иметь:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH_\varphi) = \frac{4\pi\sigma}{c} E_z, \tag{1'}$$

$$\frac{d}{dr} E_z = ik\mu H_\varphi. \tag{2'}$$

Исключая отсюда H_φ, найдем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) = i \frac{4\pi\sigma\mu k}{c} E_z. \tag{5}$$

Введем граничное условие на поверхности провода при $r = R$. Для этого воспользуемся тем, что нам известен полный ток I_0, протекающий по цилиндру.

Запишем первое уравнение Максвелла (1) в интегральной форме:

$$\oint_C H_s \, ds = \frac{4\pi}{c} I_0,$$

---

[1]) Отметим, что внутри проводников, в частности внутри металлов, плотность токов смещения ничтожно мала по сравнению с плотностью токов проводимости: $j_{\text{см}} \ll j = \sigma E$.

В нашем случае последнее условие эквивалентно требованию

$$\varepsilon\omega \ll \sigma.$$

Ввиду того, что для твердых металлов проводимость $\sigma \approx 10^{17}$ абс. ед., токами смещения можно пренебречь для всех частот, употребляемых в технике.

где C — контур, охватывающий провод, H_s — тангенциальная составляющая вектора $\boldsymbol{H}$ на C. Если в качестве такого контура взять окружность провода $r = R$, то получим:

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi(R)\, d\varphi = \frac{4\pi}{cR} I_0$$

или

$$H_\varphi(R) = \frac{2I_0}{cR}. \tag{6}$$

Отсюда, пользуясь соотношением (2), находим:

$$\left.\frac{dE_z}{dr}\right|_{r=R} = \frac{2ik\mu}{cR} I_0. \tag{7}$$

Таким образом, мы должны решить уравнение Бесселя

$$E_z''(r) + \frac{1}{r} E_z'(r) + (\alpha\sqrt{-i})^2 E_z(r) = 0 \tag{5'}$$

$$\left(\alpha^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\right)$$

при граничном условии

$$E_z'(R) = \frac{2ik\mu}{cR} I_0 \tag{7}$$

и условии ограниченности при $r = 0$

$$E_z(0) < \infty. \tag{8}$$

Общее решение уравнения (5') имеет вид

$$AJ_0(\alpha r\sqrt{-i}) + BN_0(\alpha r\sqrt{-i}), \tag{9}$$

где J_0 и N_0 — функции Бесселя первого и второго рода (см. Дополнение, ч. I), A и B — постоянные, подлежащие определению.

Функция N_0 имеет логарифмическую особенность при $r = 0$. Поэтому в силу условия (8) $B = 0$ и, следовательно,

$$E_z(r) = AJ_0(\alpha r\sqrt{-i}). \tag{10}$$

Коэффициент A определим из граничного условия (7):

$$A = \frac{2\sqrt{-i}\, k\mu I_0}{\alpha cRJ_1(\alpha R\sqrt{-i})}. \tag{11}$$

Отсюда для плотности тока

$$j = \sigma E_z$$

получаем:

$$j(r) = \frac{I\alpha\sqrt{-i}}{2\pi RJ_1(\alpha R\sqrt{-i})} J_0(\alpha r\sqrt{-i}). \tag{12}$$

В правой части этой формулы стоят функции Бесселя от комплексного аргумента

$$x\sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}x.$$

Обычно пользуются для этих функций следующими обозначениями:

$$J_0(x\sqrt{-i})=\mathrm{ber}_0 x+i\,\mathrm{bei}_0 x;$$
$$J_1(x\sqrt{-i})=\mathrm{ber}_1 x+i\,\mathrm{bei}_1 x.$$

Нетрудно найти выражения для вещественных функций $\mathrm{ber}\,x$ и $\mathrm{bei}\,x$, пользуясь разложением функций Бесселя в ряд. Например,

$$J_0(x\sqrt{-i})=J_0(xi\sqrt{i})=$$
$$=1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2(-1)\,i}{(1!)^2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4(-1)}{(2!)^2}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6 i}{(3!)^2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2}-\ldots=$$
$$=\left\{1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2}-\ldots\right\}+i\left\{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2}+\ldots\right\},$$

откуда получаем:

$$\mathrm{ber}_0 x=1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2}-\ldots; \tag{13}$$

$$\mathrm{bei}_0 x=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2}+\ldots \tag{14}$$

Нетрудно убедиться подобным же образом, что

$$\mathrm{ber}_1 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!\,2!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!\,3!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!\,4!}+\ldots\right\}, \tag{15}$$

$$\mathrm{bei}_1 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!\,2!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!\,3!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!\,4!}-\ldots\right\}. \tag{16}$$

В приложениях встречаются также производные

$$\mathrm{ber}_0' x,\ \mathrm{bei}_0' x,$$

причем

$$J_1(x\sqrt{-i})=\sqrt{-i}\,(\mathrm{bei}_0' x-i\,\mathrm{ber}_0' x). \tag{17}$$

Пользуясь введенными функциями, выражение (12) для тока можно записать в виде

$$j(r)=\frac{I_0\alpha}{2\pi R}\frac{\mathrm{ber}_0\alpha r+i\,\mathrm{bei}_0\alpha r}{\mathrm{bei}_0'\alpha R-i\,\mathrm{ber}_0'\alpha R},$$

или

$$j(r)=\frac{I_0\alpha}{2\pi R}\left\{\frac{(\mathrm{ber}_0\,\alpha r\,\mathrm{bei}_0'\,\alpha R-\mathrm{bei}_0\,\alpha r\,\mathrm{ber}_0'\,\alpha R)}{(\mathrm{bei}_0'\,\alpha R)^2+(\mathrm{ber}_0'\,\alpha R)^2}+\right.$$
$$\left.+i\,\frac{(\mathrm{bei}_0\,\alpha r\,\mathrm{bei}_0'\,\alpha R+\mathrm{ber}_0\,\alpha r\,\mathrm{ber}_0'\,\alpha R)}{(\mathrm{bei}_0'\,\alpha R)^2+(\mathrm{ber}_0'\,\alpha R)^2}\right\}. \qquad (18)$$

Вычисляя абсолютную величину этого выражения, получим:

$$|j(r)|=\frac{I_0\alpha}{2\pi R}\sqrt{\frac{(\mathrm{ber}_0\,\alpha r)^2+(\mathrm{bei}_0\,\alpha r)^2}{(\mathrm{ber}_0'\,\alpha R)^2+(\mathrm{bei}_0'\,\alpha R)^2}}. \qquad (19)$$

Величиной, характеризующей распределение тока по сечению, является отношение

$$\frac{|j(r)|}{|j(R)|}=\sqrt{\frac{(\mathrm{ber}_0\,\alpha r)^2+(\mathrm{bei}_0\,\alpha r)^2}{(\mathrm{ber}_0\,\alpha R)^2+(\mathrm{bei}_0\,\alpha R)^2}}. \qquad (20)$$

Произведем расчет распределения тока по сечению для двух частот $\omega_1=314$ (50 периодов в сек.), $\omega_2=314\cdot 10^4$ ($5\cdot 10^5$ периодов в сек.). Для расчета удобнее пользоваться системой CGSE.

Все изложенные выше выкладки были произведены в гауссовой симметричной системе. Поэтому при переходе к системе CGSE следует учесть, что $\mu_{\mathrm{CGSE}}=\mu_{\text{гаусс}}\frac{1}{c^2}$. Все остальные величины, входящие в формулы (12), (18), (19) и (20), в обеих системах (гауссовой и CGSE) совпадают. Поэтому в системе CGSE

$$\alpha^2=4\pi\mu\sigma\omega.$$

Для меди $\sigma=57\cdot 10^5$ CGSE, поэтому $\alpha_1=0{,}4444$ (для ω_1), $\alpha_2=44{,}44$ (для ω_2). Вычислим отношение модулей токов (20) для низкой частоты $\omega_1=314$ для двух значений $r:r=0$ и $r=0{,}5R$. При этом R положим равным единице.

Имея в виду [1]), что

$$\mathrm{ber}_0\,0=1,$$
$$\mathrm{bei}_0\,0=0,$$
$$\mathrm{ber}_0\,0{,}222=1-0{,}000036+\ldots=0{,}999964,$$
$$\mathrm{bei}_0\,0{,}222=0{,}0123-0{,}000002+\ldots=0{,}012300,$$
$$\mathrm{ber}_0\,0{,}444=1-0{,}00061+\ldots=0{,}9939,$$
$$\mathrm{bei}_0\,0{,}444=0{,}493-0{,}0003+\ldots=0{,}4990,$$

найдем, что

$$\left.\frac{j(0)}{j(R)}\right|_{R=1}=0{,}9994, \qquad \left.\frac{j(0{,}5R)}{j(R)}\right|_{R=1}=0{,}9999,$$

[1]) См. также Янке и Эмде, Таблицы специальных функций, Гостехиздат, 1949.

т. е. при небольшой частоте ток распределяется по сечению приблизительно равномерно (скин-эффект отсутствует).

Рассмотрим теперь второй случай: $\omega_2 = 314 \cdot 10^4$. Так как α велико, то для расчета удобнее исходить не из разложений функций ber и bei в ряды, а из асимптотических формул

$$J_0(\alpha r\sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha r}} e^{\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

$$J_1(\alpha R\sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha R}} e^{\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

откуда получаем, задаваясь значениями $r = 0{,}9R$; $R = 1$:

$$\frac{j(0{,}9R)}{j(R)}\Big|_{R=1} = \sqrt{2}e^{-\frac{44}{\sqrt{2}}0{,}1} \approx 0{,}28.$$

Этот результат свидетельствует о чрезвычайно быстром уменьшении плотности тока по мере углубления внутрь проводника при высоких частотах. Отметим в заключение, что скин-эффектом широко пользуются на практике для закалки металлов.

IV. Распространение радиоволн над поверхностью земли

Проблемы, связанные с распространением радиоволн как в свободном пространстве, так и при наличии поверхностей раздела, имеют огромное теоретическое и практическое значение. Этим вопросам посвящено чрезвычайно большое количество работ советских и иностранных авторов.

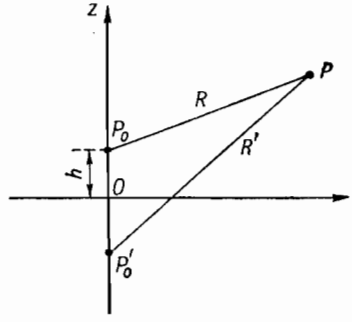


Рис. 89.

Мы рассмотрим задачу о влиянии земли на распространение радиоволн, излучаемых вертикальным диполем. При этом землю будем считать плоской [1]).

Пусть над поверхностью земли на расстоянии h в точке P_0 находится диполь, излучающий периодические колебания частоты ω. Примем плоскость земли за плоскость $z = 0$ и направим ось z по оси диполя (рис. 89). Положим, что в атмосфере $(z > 0)$ $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\sigma_0 = 0$. Предположим далее, что земля $(z < 0)$ характеризуется диэлектрической постоянной ε, проводимостью σ, а магнитная проницае-

[1]) Эта задача была впервые решена Зоммерфельдом в 1909 г. Первоначальное решение Зоммерфельда содержало ошибку, которая была исправлена В. А. Фоком.

мость μ может быть принята равной единице; ε и σ будем считать постоянными.

Наша задача заключается в отыскании напряженности поля, создаваемого диполем. Процесс распространения электромагнитных волн описывается уравнением Максвелла.

Как было показано в Приложении II к главе V, решение уравнений Максвелла может быть сведено к решению волнового уравнения для поляризационного потенциала Π [1]):

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0, \tag{1}$$

где

$$k^2 = \begin{cases} k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}; & z > 0; \\ k_3^2 = \dfrac{\varepsilon\omega^2 + i\sigma\omega}{c^2}; & z < 0. \end{cases}$$

Потенциал Π связан с напряженностями поля соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= k^2\Pi + \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi, \\ \boldsymbol{H} &= -i\frac{k^2}{k_0}\operatorname{rot}\Pi. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В нашем случае вектор Π направлен параллельно излучающему диполю

$$\Pi = (0,\ 0,\ \Pi_z); \qquad \Pi_z = \Pi_z(r,\ z). \tag{3}$$

Положив

$$n^2 = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega},$$

получим:

$$k_3^2 = n^2 k_0^2.$$

Соотношения (2) и (3) дают:

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Pi_0}{\partial z}; \quad H_\varphi = -ik_0^2\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \text{ при } z > 0, \tag{4}$$

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Pi_3}{\partial z}; \quad H_\varphi = -\frac{ik_3^2}{k_0}\frac{\partial\Pi_3}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \text{ при } z < 0. \tag{5}$$

Чтобы получить граничные условия при $z = 0$, воспользуемся условием непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей полей. Эти условия, как показывают формулы (4) и (5), будут выполнены, если положить:

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial\Pi_3}{\partial z}; \quad \Pi_0 = n^2\Pi_3 \quad \text{при } z = 0. \tag{6}$$

---

[1]) Так как рассматривается установившийся процесс, то временной множитель $e^{-i\omega t}$ можно опустить.

Будем искать решение уравнения (1) при граничных условиях (6) в виде суперпозиции частных решений вида

$$J_0(\lambda r)\, e^{\pm \mu z} \qquad (k^2 = \lambda^2 + \mu^2).$$

Для неограниченной области вместо дискретного спектра собственных значений λ получается непрерывный спектр. Поэтому решение Π можно искать в виде

$$\Pi = \int_0^\infty F(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{\pm \mu z}\, d\lambda; \tag{7}$$

знак у μ должен быть выбран таким образом, чтобы обеспечивалась сходимость интеграла (7). Остающаяся пока неопределенной функция $F(\lambda)$ представляет собой амплитудный множитель отдельных колебаний.

Воспользуемся интегральным представлением потенциала (см. Дополнение, ч. I, § 5)

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu |z|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}$$

$$(\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \qquad R = \sqrt{r^2 + z^2}). \tag{8}$$

Рассмотрим две различные области:

а) Воздух ($z > 0$).

Поле в этой области будет иметь вид

$$\Pi_0 = \Pi_{\text{перв}} + \Pi_{\text{втор}},$$

где

$$\Pi_{\text{перв}} = \frac{e^{ikR}}{R} \tag{9}$$

— потенциал поля первичного возбуждения, создаваемого самим диполем, а $\Pi_{\text{втор}}$ — потенциал поля вторичного возбуждения, создаваемого возникающими в земле токами.

Используя представления (7), (8) и (9), мы можем записать:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{\text{перв}} &= \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu |z-h|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}, \\ \Pi_{\text{втор}} &= \int_0^\infty F(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\mu (z+h)} d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $F(\lambda)$ — пока что неопределенная функция.

б) Земля ($z < 0$).

В этой области имеет место только вторичное возбуждение, которое мы можем записать в виде

$$\Pi_3 = \int_0^\infty F_3(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\mu_3 z - \mu h} d\lambda, \tag{11}$$

где $\mu_3^2 = k_3^2 - \lambda^2$. Так как $z < 0$, то знак показателя экспоненты обеспечит сходимость интеграла.

Для определения функций $F(\lambda)$ и $F_3(\lambda)$ воспользуемся граничными условиями (5), которые дают:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu h} [\lambda - \mu F(\lambda) - \mu_3 F_3(\lambda)] d\lambda = 0, \\ &\int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu h} [\lambda + \mu F(\lambda) - n^2 \mu F_3(\lambda)] d\lambda = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Условия (12) будут выполнены, если мы положим

$$\left.\begin{aligned} \mu F(\lambda) + \mu_3 F_3(\lambda) &= \lambda, \\ \mu F(\lambda) - n^2 \mu F_3(\lambda) &= -\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Решая уравнение (13), найдем $F(\lambda)$ и $F_3(\lambda)$ в виде

$$\left.\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{2\mu_3}{n^2\mu + \mu_3}\right); \\ F_3(\lambda) &= \frac{2\lambda}{n^2\mu + \mu_3}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Подставляя полученное выражение (14) в формулы (10) и (11), получим следующие выражения для поляризационного потенциала поля вертикального диполя:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_0 = &\int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu|z-h|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu|z+h|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu} - \\ &- 2\int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \frac{\mu_3}{n^2\mu + \mu_3} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}; \\ \Pi_3 = &\, 2\int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{\mu_3 z - \mu h} \frac{\lambda d\lambda}{n^2\mu + \mu_3}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Обозначая через $R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$ расстояние от точки наблюдения до диполя, через $R' = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$ расстояние от точки

наблюдения до зеркального отражения диполя в плоскости $z=0$ и пользуясь представлением (8), перепишем выражение для функции Π_0 в виде

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'} - 2\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu(z+h)} \frac{\mu_3}{n^2\mu + \mu_3} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}. \qquad (15')$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи.

1) *Идеально проводящая земля.* В этом случае $\sigma \to \infty$, а следовательно, $|k_3|$ и $|n| \to \infty$. При этом формулы (15) и (15′) дают:

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'}; \qquad \Pi_3 = 0.$$

Этот же результат легко получить непосредственно, решая задачу методом отражений.

2) *Диполь в однородной среде.* В этом случае $k_0 = k_3$; $n=1$; $\mu = \mu_3$. Формулы (15) и (15′) дают:

$$\Pi_0 = \Pi_3 = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu|z-h|} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} = \frac{e^{ikR}}{R},$$

т. е. имеет место одно первичное возбуждение, как и должно быть.

Полученные интегральные выражения (15) являются весьма сложными для исследования и практического применения. Подинтегральные выражения имеют точки ветвления и полюсы. Зоммерфельдом был предложен метод приближенного вычисления этих интегралов путем деформации контура интегрирования. При этом им была получена следующая приближенная формула для поля вблизи поверхности земли:

$$\Pi_0 = 2\frac{e^{ik_0 r}}{r}\left(1 + i\sqrt{\pi\rho}\, e^{-\rho} - 2\sqrt{\rho}\, e^{-\rho}\int_0^{\sqrt{\rho}} e^{\alpha^2}\, d\alpha\right), \qquad (16)$$

где величина ρ — так называемое «численное расстояние» — связано с полюсом p подинтегрального выражения (15) соотношением

$$\rho = i(k_0 - p)r.$$

Формула (16) совпадает с формулами, полученными совершенно иным путем рядом других авторов (Вейль, Ван-дер-Поль, Фок).

ДОПОЛНЕНИЕ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

ВВЕДЕНИЕ

1. Уравнения специальных функций. Метод разделения переменных, как мы убедились при решении простейших задач в главе II и главе III, приводит к краевой задаче на собственные значения для однородного уравнения

$$\mathscr{L}[y] + \lambda \rho y(x) = 0 \quad (a < x < b), \tag{1}$$

где

$$\mathscr{L}[y] = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y \quad (k(x) > 0).$$

Наряду с уравнением для тригонометрических функций

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0, \tag{2}$$

соответствующим случаю $a = 0$, $b = l$, $q = 0$, $k = \rho = \text{const}$, встречаются более сложные краевые задачи. Так, например, задача о собственных колебаниях круглой мембраны (радиуса r_0) приводит к *уравнению Бесселя*

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{3}$$

или

$$(xy')' - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0$$

$$\left[k(x) = x, \quad q(x) = \frac{n^2}{x}, \quad \rho(x) = x, \quad a = 0, \quad b = r_0\right];$$

задача о собственных колебаниях сферы — к *уравнению Лежандра*

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0 \tag{4}$$

$$[k(x) = 1 - x^2, \quad q = 0, \quad \rho = 1, \quad a = -1, \quad b = 1]$$

и к *уравнению для присоединенных функций*

$$\left.\begin{gathered}[(1 - x^2)y']' - \frac{n^2}{1 - x^2}y + \lambda y = 0 \\ \left[k(x) = 1 - x^2,\ \rho = 1,\ q = \frac{n^2}{1 - x^2},\ a = -1,\ b = 1\right].\end{gathered}\right\} \tag{5}$$

Характерной особенностью указанных выше уравнений является то обстоятельство, что коэффициент $k(x)$ обращается в нуль, по крайней мере, на одном из концов отрезка $[a, b]$.

Весьма часто встречаются, например в задачах квантовой механики, *уравнения Чебышева—Эрмита* ($k(x) = e^{-x^2}$, $\rho = e^{-x^2}$, $q = 0$, $a = -\infty$, $b = \infty$), *Чебышева—Лягерра* ($k(x) = xe^{-x}$, $\rho(x) = e^{-x}$, $q = 0$, $a = 0$, $b = \infty$) и др. Краевые задачи для этих уравнений определяют весьма важные классы специальных функций (цилиндрические функции, сферические функции, полиномы Чебышева — Эрмита, Чебышева — Лягерра и др.).

2. Постановка краевых задач в случае $k(a) = 0$. Перейдем к изучению некоторых общих свойств уравнения

$$\mathscr{L}[y] = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = 0, \tag{6}$$

в котором $k(a) = 0$. Будем предполагать, что $k(x)$ в окрестности точки a имеет вид $k(x) = (x - a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$.

Если в этом уравнении $q(x)$ заменить функцией $q(x) - \lambda\rho(x)$, то очевидно, что все излагаемое в дальнейшем будет относиться также и к уравнению

$$\mathscr{L}[y] + \lambda\rho y = 0. \tag{1}$$

Докажем две леммы относительно решения уравнения (6).

Лемма 1. Если в уравнении (6) коэффициент $k(x)$ обращается в нуль при $x = a$ ($k(x) = (x - a)\varphi(x)$, $(\varphi(a) \neq 0)$) и если одно решение этого уравнения $y_1(x)$ остается конечным при $x = a$, $[y_1(a) \neq \infty]$, то всякое другое решение y_2 уравнения (6), линейно-независимое от $y_1(x)$, обращается в бесконечность при $x = a$.

Если известно одно решение y_1 линейного дифференциального уравнения (6), то всякое другое линейно-независимое решение $y_2(x)$ может быть представлено в квадратурах. В самом деле, выписывая уравнение (6) для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, умножая эти уравнения на y_2 и y_1, соответственно, и вычитая, найдем:

$$y_2\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy_1}{dx}\right) - y_1\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy_2}{dx}\right) = \frac{d}{dx}[k(y_2y_1' - y_1y_2')] = 0.$$

Отсюда следует, что вронскиан функций y_1 и y_2 равен $\frac{C}{k(x)}$:

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = \frac{C}{k(x)},$$

где C — постоянная, не равная нулю, если y_1 и y_2 линейно-независимы. Деля последнее равенство на y_1^2, находим, что

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)=\frac{C}{ky_1^2}$$

или

$$y_2(x)=y_1(x)\left[\int_{x_0}^{x}\frac{C d\alpha}{k(\alpha)\,y_1^2(\alpha)}+C_1\right], \tag{7}$$

где C_1 — постоянная интегрирования, зависящая от выбора x_0.

Функция $y_1(x)$, имея конечное значение в точке $x=a$, может обращаться там в нуль. Допустим (см. подробнее лемму 3), что

$$y_1(x)=(x-a)^n z_1(x), \qquad z_1(a)\neq 0,\ n\geqslant 0.$$

Выберем x_0 в формуле (7) так, чтобы

$$z_1(x)\neq 0, \qquad a<x\leqslant x_0$$

(или $y_1(x)\neq 0$, $a\leqslant x\leqslant x_0$, если $n=0$). В этом случае функция $y_2(x)$ в интервале $a<x\leqslant x_0$ представляется в виде

$$y_2(x)=(x-a)^n z_1(x)\left\{C_1-\int_x^{x_0}\frac{1}{(x-a)^{2n+1}}\left[\frac{C}{\varphi(x)\,z_1^2(x)}\right]dx\right\}.$$

Применяя к интегралу в правой части теорему о среднем, найдем:

$$y_2(x)=(x-a)^n z_1(x)\left\{C_1-A\int_x^{x_0}\frac{dx}{(x-a)^{2n+1}}\right\},$$

$$A=\frac{C}{\varphi(\bar{x})\,z_1^2(\bar{x})}\quad (x<\bar{x}<x_0).$$

Вычисляя интеграл, получим для $y_2(x)$ выражение

$$y_2(x)=\begin{cases}(x-a)^n z_1(x)\left[C_1+A\dfrac{(x_0-a)^{-2n}}{2n}-A\dfrac{(x-a)^{-2n}}{2n}\right] & \text{при } n>0,\\ y_1(x)\left[C_1-A\ln(x_0-a)+A\ln(x-a)\right] & \text{при } n=0.\end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, в обоих случаях $\lim\limits_{x\to a} y_2(x)=\pm\infty$, что и доказывает лемму; при $n>0$ из (8) следует:

$$\lim_{x\to a}(x-a)^n y_2(x)=-\frac{C}{2n\varphi(a)\,z_1(a)}. \tag{9}$$

Полученные формулы (8) и (9) позволяют уточнить формулировку леммы 1.

Если в условиях леммы 1 ограниченное решение уравнения (6) в точке $x=a$ отлично от нуля ($y_1(a)\neq 0$), то $y_2(x)$ имеет в точке $x=a$ логарифмическую бесконечность

$$y_2(x)\sim \ln(x-a).$$

Если в точке $x=a$ $y_1(x)$ имеет нуль порядка n ($y_1(x)=(x-a)^n z_1(x)$, $z_1(a)\neq 0$), то $y_2(x)$ имеет в точке $x=a$ полюс порядка n, $y_2(x)\sim (x-a)^{-n}$.

Докажем вторую лемму.

Лемма 2. Если в уравнении (6) коэффициент $k(x)$ обращается в нуль при $x=a$ ($k(x)=(x-a)\varphi(x)$, где $\varphi(a)\neq 0$), а коэффициент $q(x)$ либо ограничен, либо стремится к $+\infty$ при $x\to a$, то для функции $y_1(x)$ — решения уравнения (6), ограниченного в точке $x=a$,

$$\lim_{x\to a} k(x)y_1'(x)=0.$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда $q(x)$ ограничено при $x\to a$. Интегрируя уравнение (6) в пределах от некоторого значения x до x_1 ($x<x_1$), получим:

$$k(x)\frac{dy_1}{dx}=k(x)\frac{dy_1}{dx}\Big|_{x=x_1}-\int_x^{x_1} q(\alpha)y(\alpha)\,d\alpha=Q(x)\qquad (x<x_1). \tag{10}$$

Откуда следует, что $Q(x)$ — непрерывная функция ($a\leqslant x\leqslant x_1$). Переходя к пределу при $x\to a$, видим, что существует предел

$$C=\lim_{x\to a} k(x)y_1'(x)\qquad (C=Q(a)).$$

Докажем, что $C=Q(a)=0$. Выражая функцию $y_1(x)$ через $Q(x)$, найдем:

$$y_1(x)=y_1(x_2)-\int_x^{x_2}\frac{Q(\alpha)}{k(\alpha)}\,d\alpha=$$

$$=y_1(x_2)-\int_x^{x_2}\frac{Q(\alpha)}{(\alpha-a)\varphi(\alpha)}\,d\alpha\qquad (a\leqslant x\leqslant x_2). \tag{11}$$

Из этой формулы непосредственно видно, что если $Q(a)\neq 0$, то при $x\to a$ $y_1(x)\to\infty$, что противоречит условию ограниченности $y_1(x)$ при $x=a$. Таким образом, лемма доказана для случая ограниченного $q(x)$. Рассмотрим теперь случай, когда $q(x)$ стремится к $+\infty$ при $x\to a$. Формула (10) имеет место и в этом случае. Пусть функция $q(x)$ положительна в интервале ($a\leqslant x\leqslant x_1$). Нетрудно убедиться,

что в этом интервале функция $y_1(x)$ монотонна [1]), и тем самым сохраняет знак в некотором интервале $(a \leqslant x \leqslant x_2)$ и имеет предел $y_1(a)$ при $x \to a$. Отсюда следует, что в этом интервале $Q(x)$ — монотонная функция, имеющая конечный или бесконечный предел при $x = a$. Из формулы (11) попрежнему следует, что $y_1(x) \to \infty$, если $Q(a) \neq 0$, что и доказывает лемму.

Заметим для дальнейшего, что из формулы (10) и из условия $Q(x) \to 0$ при $x \to a$, следует

$$k(x_1) y_1'(x_1) = \int_a^{x_1} q(\alpha) y_1(\alpha)\, d\alpha \tag{12}$$

как для ограниченной функции $q(x)$, так и для неограниченной $(q(x) > 0)$.

Лемма 3. Если $y_1(x)$ — ограниченное при $x = a$ решение уравнения (6), и $q(x)$ — непрерывная $(a \leqslant x \leqslant x_1)$ функция, то $y_1(a) \neq 0$ и $y_1'(a) = \frac{q(a) y_1(a)}{\varphi(a)}$.

Если $q(x)$ имеет вид $q(x) = \frac{q_1(x)}{(x-a)}$, где $q_1(x)$ — непрерывная функция и $q_1(a) > 0$, то $y_1(a) = 0$.

Вторая часть леммы следует непосредственно из того, что в силу формулы (12) интеграл

$$\int_a^x q(\alpha) y_1(\alpha)\, d\alpha = \int_a^x \frac{q_1(\alpha)}{(\alpha - a)} y_1(\alpha)\, d\alpha$$

сходится, что возможно только при $y_1(a) = 0$.

Если $q(x)$ — непрерывная функция в $(a \leqslant x \leqslant x_1)$, то в силу произвольности x_1 в формуле (12) получим:

$$y_1'(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{1}{x-a} \int_a^x q(\alpha) y(\alpha)\, d\alpha. \tag{13}$$

Отсюда следует, что функция $y_1'(x)$ ограничена в некотором интервале $(a \leqslant x \leqslant x_2)$, а тем самым существует предел функции $y_1(x)$

---

[1]) В самом деле, положив $\xi = \int_x^{x_1} \frac{dx}{k(x)}$, можем записать уравнение (6) в виде $y'' - kqy = 0$ $(k > 0,\ q > 0)$. Отсюда следует, что y не может иметь положительных максимальных (отрицательных минимальных) значений, так как в соответствующей точке $y'' \leqslant 0$ $(y'' \geqslant 0)$, а $y > 0$ $(y < 0)$.

при $x \to a$. Переходя в последней формуле к пределу при $x \to a$, получим:

$$\lim_{x \to a} y_1'(x) = \frac{q(a)\, y_1(a)}{\varphi(a)} = y_1'(a).$$

Из этой формулы следует, что если $y_1(a) = 0$, то и $y_1'(a) = 0$. Докажем, что при этом $y_1(x) \equiv 0$ (непосредственно воспользоваться теоремой единственности в этом случае нельзя в силу того, что $x = a$ является особой точкой уравнения (6)). Пусть $|q(x)| \leqslant \bar{q}$ и $|\varphi(x)| \geqslant \underline{\varphi}$ при $(a \leqslant x \leqslant x_2)$.

Рассмотрим интервал $(a;\ a + h)$, где h — такое достаточное малое число, что $h\frac{\bar{q}}{\underline{\varphi}} < 1$ и $a + h < x_2$. Из формулы (13) следует, что

$$y_1(x) = \int_a^x \left(\frac{1}{\varphi(\alpha_1)} \frac{1}{(\alpha_1 - a)} \int_a^{\alpha_1} q(\alpha_2)\, y(\alpha_2)\, d\alpha_2\right) d\alpha_1 \quad (y_1(a) = 0).$$

Пусть при $x = x_0$ функция $y_1(x)$ достигает максимального значения $y_1(x_0) = A$ в интервале $(a;\ a + h)$. Применяя к последней формуле теорему о среднем значении, получим:

$$y_1(x_0) = A \leqslant A\bar{q}\frac{1}{\underline{\varphi}}(x_0 - a) < A,$$

что и доказывает утверждение.

Лемма 4. Если функция $q(x)$ имеет вид $q(x) = \dfrac{q_1(x)}{(x - a)}$, где $q_1(x) > 0$ в интервале $(a \leqslant x \leqslant x_1)$, то $y_1(x)$, ограниченное при $x = a$ решение уравнения (6), имеет вид $y_1(x) = (x - a)^{\nu} z(x)$, где $\nu = \sqrt{\dfrac{q_1(a)}{\varphi(a)}}$, а $z(x)$ — непрерывная и дифференцируемая функция в интервале $(a \leqslant x \leqslant x_1)$ и $z(a) \neq 0$.

Полагая $y_1(x) = (x - a)^{\nu} z(x)$, где ν — некоторое число, из формулы (12) получим:

$$\nu k(x)\, (x - a)^{\nu - 1} z(x) + k(x)\, (x - a)^{\nu} \frac{dz}{dx} = \int_a^x q(\alpha)\, y(\alpha)\, d\alpha. \qquad (14)$$

Произведем в последнем интеграле интегрирование по частям:

$$\int_{a+\varepsilon}^x q(\alpha)\, y(\alpha)\, d\alpha = \int_{a+\varepsilon}^x \left[\frac{q_1(\alpha)}{(\alpha - a)} (\alpha - a)^{\nu}\right] z(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= z(\alpha)\, u(\alpha)\Big|_{a+\varepsilon}^x - \int_{a+\varepsilon}^x u(\alpha)\, z'(\alpha)\, d\alpha,$$

где

$$u(\alpha)=\int_a^\alpha \frac{q_1(\alpha_1)}{(\alpha_1-a)}(\alpha_1-a)^\nu\,d\alpha_1=$$

$$=\frac{q_1(a)}{\nu}(\alpha-a)^\nu+\int_a^\alpha \frac{q_1(\alpha)-q_1(a)}{(\alpha_1-a)}(\alpha_1-a)^\nu d\alpha_1=$$

$$=\frac{q_1(a)}{\nu}(\alpha-a)^\nu+u_1(\alpha).$$

В силу того, что $z(\alpha)\,u(\alpha)=y_1(\alpha)\left(\frac{q_1(a)}{\nu}+\frac{u_1(\alpha)}{(\alpha-a)^\nu}\right)$, заключаем, что $z(\alpha)\,u(\alpha)\underset{\alpha\to 0}{\to}0$, так как $\frac{u_1(\alpha)}{(\alpha-a)^\nu}$ — ограниченная функция, а $y_1(\alpha)\underset{\alpha\to a}{\to}0$, в силу леммы 3.

Определяя z' из формулы (14), найдем:

$$z'(x)=z(x)\left[-\frac{\nu}{(x-a)}+\frac{u(x)}{k(x-a)^\nu}\right]-\int_a^x u(\alpha)\,z'(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=z(x)\,U(x)-\int_a^x u(\alpha)\,z'(\alpha)\,d\alpha. \tag{15}$$

Выбирая $\nu=\sqrt{\frac{q_1(a)}{\varphi(a)}}$, получим, что функция

$$U(x)=-\frac{\nu}{(x-a)}+\frac{u(x)}{k(x-a)^\nu}=\frac{u_1(x)}{k(x-a)^\nu}$$

является непрерывной и дифференцируемой функцией при $(a\leqslant x\leqslant x_1)$. Дифференцируя уравнение (15), получим:

$$z''(x)=[U(x)-u(x)]\,z'(x)+U'(x)\,z(x). \tag{16}$$

Точка $x=a$ не является особой для уравнения (16). Отсюда следует, что функция $z(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную при $(a\leqslant x\leqslant x_1)$. Переходя в уравнении (15) к пределу при $x\to a$, найдем, что

$$z'(a)=z(a)\,U(a). \tag{17}$$

Формула (17) показывает, что $z(a)\neq 0$, так как в противном случае $z(a)=z'(a)=0$, а тем самым $z(x)\equiv 0$.

Заметим, что для непрерывности функции $U(x)$ при $x=a$ достаточно предположить однократную дифференцируемость функции $q_1(x)$, а для дифференцируемости функции $U'(x)$ — дифференцируемость функции $\varphi(x)$ и двукратную дифференцируемость функции $q_1(x)$. Однако лемму 4 можно доказать, не обращаясь к дифференциальному уравнению (16), а рассматривая уравнение (15) как интегральное уравнение относительно функции $z(x)$. При этом в отношении функции $U(x)$ требуется только ее непрерывность

Доказанные леммы позволяют сделать следующее заключение о постановке краевых задач для уравнений

$$\mathscr{L}[y]+\lambda\rho y=0 \quad \text{и} \quad \mathscr{L}[y]=0$$

в промежутке $[a, b]$, на одном или обоих концах которого $k(x)$ обращается в нуль. Если $k(a)=0$, то при $x=a$ мы будем требовать выполнения естественного граничного условия ограниченности для собственной функции. При этом не требуется, чтобы она принимала при $x=a$ заданное значение.

Таким образом, приходим к следующей краевой задаче: найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\mathscr{L}[y]=\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y=-\lambda\rho y \quad (a<x<b),$$

где $k(x)>0$ при $x>a$ и $k(a)=0$ при граничном условии

$$y(b)=0$$

и естественном граничном условии ограниченности при $x=a$.

Если $k(a)=0$ и $k(b)=0$, то на обоих концах интервала (a, b) ставится условие ограниченности.

Формулируем общие свойства собственных функций и собственных значений поставленной краевой задачи:

1. Существует бесчисленное множество собственных значений $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots$, которым соответствуют собственные функции

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots$$

2. При $q\geqslant 0$ все собственные значения неотрицательны

$$\lambda_n\geqslant 0.$$

3. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$, соответствующие разным собственным значениям λ_n и λ_m, ортогональны между собой с весом $\rho(x)$

$$\int_a^b y_n(x)\,y_m(x)\,\rho(x)\,dx=0.$$

4. Имеет место теорема разложимости: функция $f(x)$ с непрерывной первой и кусочно-непрерывной второй производной может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $y_n(x)$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n y_n(x), \quad \text{где} \quad f_n=\frac{\int_a^b f(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx}{\int_a^b y_n^2(x)\,\rho(x)\,dx},$$

если $f(x)$ удовлетворяет граничным условиям задачи; при этом, если $k(a)=0$, то

$$|f(a)|<\infty \quad \text{при} \quad q(a)<\infty,$$

$$f(a)=0 \quad \text{при} \quad q(x)=\frac{q_1(x)}{x-a} \qquad (q_1(a)\neq 0).$$

Свойства 2 и 3 доказываются, как и в главе II, § 3, с помощью формул Грина. При этом используется ограниченность при $x=a$ функции $y_n(x)$, а также доказанное выше равенство $\lim\limits_{x\to a} k(x)y_n'(x)=0$, в силу чего подстановка при $x=a$ обращается в нуль. Доказательство свойств 1 и 4 обычно проводится с помощью теории интегральных уравнений. Мы не приводим здесь эти доказательства. Для того чтобы 1 и 4 имели место, достаточно, чтобы функция $k(x)$ была непрерывной вместе со своей производной, а функция $q(x)$ — либо непрерывной, либо имела вид $\frac{q_1(x)}{x-a}$, где $q_1(x)$ — непрерывная функция. Для изучаемых ниже классов специальных функций эти условия выполнены.

Наша краевая эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\,y(\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi,$$

которое с помощью замены

$$\varphi(x)=\sqrt{\rho(x)}\,y(x), \quad K(x,\xi)=\sqrt{\rho(x)}\,G(x,\xi)\,\sqrt{\rho(\xi)}$$

сводится к интегральному уравнению с симметричным ядром $K(x,\xi)$:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Здесь $G(x,\xi)$ — функция точечного источника для уравнения $\mathscr{L}[y]=0$ определяющаяся для случая $k(a)=0$, $k(b)\neq 0$, $y(b)=0$ условиями:

1. $G(x,\xi)$ при фиксированном значении ξ является непрерывной функцией x.

2. Первая производная $\frac{dG}{dx}$ испытывает скачок при $x=\xi$:

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}=-\frac{1}{k(\xi)}$$

или

$$G'(\xi+0,\xi)-G'(\xi-0,\xi)=-\frac{1}{k(\xi)}.$$

3. $\mathscr{L}[G]=0$ всюду, кроме $x=\xi$.

4. $G(x,\xi)$ удовлетворяет граничным условиям

$$G(a,\xi)<\infty, \quad G(b,\xi)=0.$$

ЧАСТЬ I

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Цилиндрические функции

При решении многих задач математической физики приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \\ \text{или}\quad &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

называемому *уравнением цилиндрических функций n-го порядка*. Это уравнение часто называют также *уравнением Бесселя n-го порядка*.

Характерными задачами (см. главы V, VI и VII), приводящими к цилиндрическим функциям, являются краевые задачи для уравнения

$$\Delta u+k^2u=0 \tag{2}$$

вне или внутри круга (вне или внутри цилиндра в случае трех независимых переменных). Вводя полярные координаты, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{3}$$

Полагая $u=R\Phi$ и разделяя в (3) переменные, получаем:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$$

и

$$\Phi''+\lambda\Phi=0.$$

Условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ дает $\lambda=n^2$, где n — целое число. Полагая затем $x=kr$, приходим к уравнению цилиндрических функций

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \quad R(r)=y(kr)$$

или

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0.$$

В случае решений волнового уравнения (2), обладающих радиальной (цилиндрической) симметрией, мы получим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+y=0 \quad \text{или} \quad y''+\frac{1}{x}y'+y=0.$$

1. Степенные ряды. Уравнение Бесселя ν-го порядка

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{1}$$

или

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{1'}$$

(ν — произвольное действительное или комплексное число, действительную часть которого мы можем считать неотрицательной) имеет особую точку при $x = 0$. Поэтому решение $y(x)$ следует искать в виде степенного ряда [1])

$$y(x) = x^\sigma (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots), \tag{4}$$

начинающегося с x^σ, где σ — характеристический показатель, подлежащий определению. Подставляя ряд (4) в уравнение (1') и приравнивая нулю коэффициенты при x^σ, $x^{\sigma+1}$, ..., $x^{\sigma+k}$, получим уравнение для определения σ и систему уравнений для определения коэффициентов a_k:

$$\left.\begin{aligned} a_0(\sigma^2 - \nu^2) &= 0, \\ a_1[(\sigma+1)^2 - \nu^2] &= 0, \\ a_2[(\sigma+2) - \nu^2] + a_0 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_k[(\sigma+k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} &= 0 \\ (k = 2,\ 3,\ \ldots). & \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Так как мы можем предположить, что $a_0 \neq 0$, то из первого уравнения (5) следует, что

$$\sigma^2 - \nu^2 = 0 \quad \text{или} \quad \sigma = \pm\nu. \tag{6}$$

Перепишем k-е уравнение (5) $k > 1$ в виде

$$(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)a_k + a_{k-2} = 0. \tag{7}$$

Оставим пока в стороне тот случай, когда $\sigma + \nu$ или $\sigma - \nu$ (и соответственно -2ν или 2ν) равно отрицательному целому числу.

Тогда из второго уравнения (5), в силу (6), будем иметь

$$a_1 = 0. \tag{8}$$

Уравнение (7) дает рекуррентную формулу для определения a_k через a_{k-2}:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)}. \tag{9}$$

---

[1]) См. Степанов, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1950.

Отсюда и из (8) заключаем, что все нечетные коэффициенты равны нулю. Если ν вещественно, то при $\sigma = -\nu$ решение обращается в бесконечность в точке $x = 0$.

Остановимся на случае $\sigma = \nu$. Из (9) следует, что каждый четный коэффициент может быть выражен через предыдущий

$$a_{2m} = -a_{2m-2}\frac{1}{2^2 m(m+\nu)}. \tag{10}$$

Последовательное применение этой формулы позволяет найти выражение a_{2m} через a_0

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+m)}. \tag{11}$$

Воспользуемся свойством гамма-функции $\Gamma(s)$ [1])

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \ldots = s(s-1)\ldots(s-n)\Gamma(s-n).$$

Если S — целое число, то

$$\Gamma(S+1) = S!$$

Коэффициент a_0 до сих пор оставался произвольным. Если $\nu \neq -n$, где $n > 0$ — целое число, то, полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{12}$$

и используя отмеченное выше свойство гамма-функций, получим:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{13}$$

---

[1]) Функция $\Gamma(s)$, определяемая формулой

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \quad \text{для } s > 0,$$

называется *гамма-функцией*. Переменному s можно также придавать комплексное значение: $s = s_0 + is_1$, $s_0 > 0$. Укажем основные свойства гамма-функции:

а) интегрирование по частям в формуле для $\Gamma(s)$ дает:

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^s\,dx = -e^{-x}x^s\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx = s\Gamma(s)$$

или

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s);$$

б) при $s = 1$ непосредственно получаем:

$$\Gamma(1) = 1;$$

в) если $s = n$ — целое число, то из а) и б) следует:

$$\Gamma(n+1) = n!;$$

Если же $\sigma = -\nu$, $\nu \neq n$, где $n > 0$ — целое число, то, полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}, \tag{12'}$$

получим:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}. \tag{14}$$

Ряд (3), соответствующий $\sigma = \nu \geqslant 0$, с коэффициентами (12) и (13)

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{15}$$

называется *функцией Бесселя первого рода* ν*-го порядка*. Ряд

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \tag{16}$$

соответствующий $\sigma = -\nu$, представляет второе решение уравнения (1), линейно независимое от $J_\nu(x)$. Ряды (15) и (16), очевидно, сходятся на всей плоскости x.

Рассмотрим теперь тот случай, когда ν равно половине целого числа. Пусть $\nu^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, где $n \geqslant 0$ — целое число. Полагая в формулах (5) $\sigma = n + \frac{1}{2}$, получим:

$$2(n+1)\,a_1 = 0,$$

$$k(k+2n+1)\,a_k + a_{k-2} = 0 \qquad (k > 1),$$

г) при $s = \frac{1}{2}$

$$\Gamma(s) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\pi}$$

или

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

д) функциональное соотношение $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ позволяет определить гамма-функцию для отрицательных значений s.

Отметим, что

$$\Gamma(0) = \left.\frac{\Gamma(s+1)}{s}\right|_{s\to 0} = \infty$$

и

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} = \ldots = (-1)^n \frac{\Gamma(0)}{n!} = \infty \text{ для целых } n.$$

так что

$$a_1 = 0,$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2n+1)}.$$

Последовательно применяя эту формулу, найдем:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2\cdot 4\ldots(2k)(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k+1)}.$$

Полагая здесь $\nu = n + \frac{1}{2}$, получаем формулу (11).

Положив, далее,

$$a_0 = \frac{1}{2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

получим формулу (13).

Пусть

$$\sigma = -n - \frac{1}{2},$$

тогда уравнения (5) для a_k принимают вид

$$a_1 \cdot 1\,(-2n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k(k-1-2n)\,a_k + a_{k-2} = 0.$$

Попрежнему все коэффициенты $a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$ равны нулю, но для a_{2n+1} получаем уравнение $0 \cdot a_{2n+1} + a_{2n-1} = 0$, которое удовлетворяется при любом значении a_{2n+1}. При $k > n$ коэффициент a_{2k+1} определяется равенством

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-n} a_{2n+1}}{(2n+3)(2n+5)\ldots 2\cdot 4\ldots(2k-2n)}.$$

Полагая $a_{2n+1} = 0$, $a_0 = \frac{1}{2^{-n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}$, получаем формулу (14).

Таким образом, при $\nu = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$ не требуется никакого изменения в определении функции $J_\nu(x)$. Формулы (15) и (16) остаются в силе.

Отметим, что формула (16) определяет $J_{-\nu}(x)$ лишь для дробных значений ν, поскольку определение a_0 по формулам (12) при целых отрицательных $\nu = -n$ лишено смысла. Продолжим по непрерывности (16) на целые значения $\nu = n$. Поскольку $\Gamma(k-n+1) = \infty$ для $k \leqslant k_0 < n-1$, суммирование (16) фактически начинается со значений $k = k_0 + 1 = n$. Изменяя в (16) индекс суммирования $k = n + k'$, получаем:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\,\Gamma(k'+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} = (-1)^n J_n(x),$$

так как суммирование начинается с $k' = 0$.

Выпишем в качестве примера ряды для функций Бесселя первого рода нулевого ($n=0$) и первого ($n=1$) порядков:

$$J_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots,$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\ldots$$

Функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ наиболее часто встречаются в приложениях и для них имеются подробные таблицы [1]). На стр. 678 приводятся графики $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

Функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ (n — целое число), как мы видели, линейно зависимы

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x).$$

Для нецелых значений ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы. В самом деле, $J_\nu(x)$ имеет нуль, а $J_{-\nu}(x)$ — полюс ν-го порядка в точке $x=0$. Таким образом, если ν — нецелое число, то всякое решение $y_\nu(x)$ уравнения Бесселя (1) может быть представлено в виде линейной комбинации функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$

$$y_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

Если ищется ограниченное решение уравнения (1), то $C_2=0$ и

$$y_\nu(x)=C_1J_\nu(x).$$

2. Рекуррентные формулы. Установим следующие соотношения, существующие между функциями Бесселя первого рода различных порядков,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{18}$$

Эти формулы проверяются непосредственным дифференцированием рядов для бесселевых функций. Покажем, например, справедливость соотношения (17)

$$x^\nu\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=x^\nu\frac{1}{2^\nu}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}2k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}.$$

---

[1]) Во всех таблицах специальных функций всегда имеются таблицы для бесселевых функций первого рода (см., например, Янке и Эмде «Таблицы бесселевых функций», где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ даны с пятью знаками для значений x в интервале от 0 до 14,9).

В последней сумме k меняется от 1 до ∞. Введем новый индекс суммирования $l = k - 1$, который будет меняться от 0 до ∞. Тогда будем иметь:

$$x^{\nu}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right) = -\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l}\frac{1}{\Gamma(l+1)\,\Gamma[l+(\nu+1)+1]}\left(\frac{x}{2}\right)^{[2l+(\nu+1)]} = \\ = -J_{\nu+1}(x),$$

что и доказывает формулу (17). Справедливость формулы (18) доказывается аналогично.

Отметим два важных частных случая рекуррентных формул. При $\nu = 0$ из (17) следует:

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{19}$$

Для случая $\nu = 1$ формула (18) дает:

$$[xJ_1(x)]' = xJ_0(x) \quad \text{или} \quad xJ_1(x) = \int_0^x \xi J_0(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

Установим рекуррентные формулы, связывающие $J_{\nu}(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ и $J_{\nu-1}(x)$. Производя дифференцирование в (17) и (18), получаем:

$$\frac{\nu J_{\nu}(x)}{x} - J_{\nu}'(x) = J_{\nu+1}(x), \tag{17'}$$

$$\frac{\nu J_{\nu}(x)}{x} + J_{\nu}'(x) = J_{\nu-1}(x). \tag{18'}$$

Складывая и вычитая (17′) и (18′), находим рекуррентные формулы

$$\left.\begin{aligned} J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) &= \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x), \\ J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) &= -2J_{\nu}'(x). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

С помощью формулы (21) можно вычислять $J_{\nu+1}(x)$, если известны $J_{\nu}(x)$ и $J_{\nu-1}(x)$:

$$J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu J_{\nu}(x)}{x}. \tag{21'}$$

3. Функции полуцелого порядка. Найдем значение функций $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2m}, \tag{22}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2m}. \tag{23}$$

Пользуясь свойством гамма-функций, находим:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)&=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m+1)}{2^{m+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)&=\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{2^{m}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Подставляя (24) в формулы (22) и (23), получаем:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1},\tag{25}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}.\tag{26}$$

Нетрудно видеть, что сумма в (25) представляет собой разложение $\sin x$, а сумма в (26) — разложение $\cos x$ по степеням x. Таким образом, $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ выражаются через элементарные функции

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\tag{27}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.\tag{28}$$

Рассмотрим функции $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, где n — целое число. Из (21′) следует:

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$
$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{-\sin x+\frac{3}{x}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin(x-\pi)\left(1-\frac{3}{x^2}\right)+\cos(x-\pi)\cdot\frac{3}{x}\right\}.$$

Применяя последовательно формулу (21′), найдем:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)P_n\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right\},\tag{29}$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степени n относительно $\frac{1}{x}$, а $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степени $n-1$. Отметим, что $P_n(0)=1$, $Q_n(0)=0$.

4. Асимптотический порядок цилиндрических функций. Покажем, что любая цилиндрическая функция при больших x представима в виде

$$y_\nu(x)=\gamma_\infty\frac{\sin(x+\delta_\infty)}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{30}$$

где $\gamma_\infty\neq 0$, δ_∞ — некоторые постоянные, $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ означает члены порядка не ниже $\frac{1}{x^{3/2}}$.

Полагая

$$y=\frac{v(x)}{\sqrt{x}}, \tag{31}$$

вычисляя производные $y'=-0{,}5x^{-3/2}v+x^{-1/2}v'$, $y''=x^{-1/2}v''-x^{-3/2}v'+0{,}75x^{-5/2}v$ и подставляя их в уравнение Бесселя, получим уравнение

$$v''+\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)v=0, \tag{32}$$

являющееся частным случаем уравнения

$$v''+v+\rho(x)v=0, \tag{33}$$

где

$$\rho(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{34}$$

Положим

$$v=\gamma\sin(x+\delta),\qquad v'=\gamma\cos(x+\delta), \tag{35}$$

где $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ — некоторые функции x, причем $\gamma(x)\neq 0$ ни в одной точке, иначе v и v' одновременно обращались бы в нуль и $v(x)$ было бы тождественно равно нулю. Пользуясь (35) и (33), будем иметь:

$$v'=\gamma\cos(x+\delta)=\gamma'\sin(x+\delta)+\gamma(\delta'+1)\cos(x+\delta),$$
$$v''=\gamma'\cos(x+\delta)-\gamma(\delta'+1)\sin(x+\delta)=-(1+\rho)\gamma\sin(x+\delta).$$

Отсюда находим:

$$\delta'=\rho\sin^2(x+\delta),\qquad \delta'=O\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{36}$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=-\frac{\delta'}{\operatorname{tg}(x+\delta)}=\rho\sin(x+\delta)\cos(x+\delta)=O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{37}$$

Покажем, что существуют определенные предельные значения γ и δ при $x \to \infty$.

В самом деле,

$$\delta(x) = \delta(a) - \int_x^a \delta'(s)\, ds,$$

откуда, в силу (36), следует, что существует предел $\lim_{a\to\infty} \delta(a) = \delta_\infty$ и

$$\delta(x) = \delta_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{38}$$

Аналогично находим из (37)

$$\gamma(x) = \gamma_\infty\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \tag{39}$$

причем $\gamma_\infty \neq 0$.

Таким образом, всякое решение уравнения (33) и, следовательно, уравнения (32) при $x \to \infty$ имеет вид

$$v(x) = \gamma_\infty \sin(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{40}$$

Тем самым установлена справедливость асимптотической формулы (30) для любой цилиндрической функции $y_\nu(x)$.

Заметим, что не может существовать двух различных цилиндрических функций с одинаковой асимптотикой. В самом деле, пусть $\bar{y}_\nu(x)$ и $\bar{\bar{y}}_\nu(x)$ — две различные цилиндрические функции, для которых

$$\bar{\gamma}_\infty = \bar{\bar{\gamma}}_\infty, \qquad \bar{\delta}_\infty = \bar{\bar{\delta}}_\infty. \tag{41}$$

Разность этих функций

$$\tilde{y}_\nu(x) = \bar{y}_\nu(x) - \bar{\bar{y}}_\nu(x) \not\equiv 0$$

также является цилиндрической функцией, имеющей, в силу (41), следующую асимптотику:

$$\tilde{y}_\nu(x) = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Однако это противоречит формуле (30) для любой цилиндрической функции $\tilde{y}_\nu(x)$.

Следовательно, $\tilde{y}_\nu(x) \equiv 0$ и $\bar{y}_\nu(x) \equiv \bar{\bar{y}}_\nu(x)$.

Значения постоянных γ_∞ и δ_∞ определяются с помощью дополнительных исследований, которые дают

$$\gamma_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{для всех } \nu.$$

В § 1, п. 3 для $\nu = n + \frac{1}{2}$ была получена формула (29), из которой следует, что

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{42}$$

В § 3 будет дан вывод асимптотической формулы для функции $J_\nu(x)$ при $\nu = n$, где n — целое число:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{43}$$

Исследования, проводимые на основе представления функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ с помощью контурных интегралов на плоскости комплексного переменного, показывают, что формула (43) имеет место и при произвольном ν, причем

$$J_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{44}$$

§ 2. Краевые задачи для уравнения Бесселя

Простейшая краевая задача для уравнения Бесселя на отрезке $[0, r_0]$ связана с задачей о собственных колебаниях круглой мембраны

$$\Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad \Delta_2 v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}, \tag{1}$$

$$v(r, \varphi)|_{r=r_0} = 0. \tag{2}$$

Полагая $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ и разделяя переменные, получаем:

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_0) = 0. \tag{4}$$

Условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ дает $\nu = n^2$, где n — целое число. Таким образом, функция $R(r)$ должна определяться из уравнения Бесселя

$$\mathscr{L}[R] + \lambda r R = 0 \quad \left(\mathscr{L}[R] = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{n^2}{r}R\right) \tag{5}$$

при граничном условии

$$R(r_0) = 0 \tag{6}$$

и естественном граничном условии ограниченности в точке $r = 0$

$$|R(0)| < \infty. \tag{7}$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\lambda}r, \\ y(x) &= R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

приходим к уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \tag{9}$$

при дополнительных условиях

$$y(\sqrt{\lambda}r_0)=0, \tag{10}$$

$$|y(0)|<\infty. \tag{11}$$

Отсюда находим

$$y(x)=AJ_n(x). \tag{12}$$

В силу граничного условия $y(r_0\sqrt{\lambda})=0$ имеем:

$$J_n(\mu)=0. \tag{13}$$

Это трансцендентное уравнение, очевидно, имеет бесчисленное множество вещественных корней $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$ [1]), т. е. уравнение (1) имеет бесчисленное множество собственных значений

$$\lambda_m^{(n)}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots), \tag{14}$$

которым соответствуют собственные функции

$$R(r)=AJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right) \tag{15}$$

краевой задачи (1) — (2).

Из способа построения собственных функций видно, что всякое нетривиальное решение рассматриваемой краевой задачи дается формулой (15).

Из общей теории уравнений вида $\mathscr{L}[y]+\lambda\rho y=0$, рассмотренных выше, следует ортогональность системы собственных функций

$$\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\right\}$$

с весом r:

$$\int_0^{r_0} J_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0}r\right)J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}r\right)r\,dr=0 \text{ при } m_1\neq m_2. \tag{16}$$

[1]) На стр. 679 дана таблица корней уравнения $J_0(\mu)=0$, в частности первый корень $\mu_1^{(0)}=2{,}4048$.

Вычислим норму собственных функций $R_1(r) = J_n(\alpha_1 r)$, где $\alpha_1 = \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$. Для этого рассмотрим функцию $R_2(r) = J_n(\alpha_2 r)$, где α_2 — произвольный параметр.

Функции $R_1(r)$ и $R_2(r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_1}{dr}\right) + \left(\alpha_1^2 r - \frac{n^2}{r}\right) R_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_2}{dr}\right) + \left(\alpha_2^2 r - \frac{n^2}{r}\right) R_2 = 0,$$

причем $R_1(r_0) = 0$, а $R_2(r)$ уже не удовлетворяет этому граничному условию. Вычитая из первого уравнения второе, предварительно умножив их, соответственно, на $R_2(r)$ и $R_1(r)$ и интегрируя затем по r в пределах от 0 до r_0, будем иметь:

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\int_0^{r_0} rR_1(r)R_2(r)\,dr + [r(R_2R_1' - R_1R_2')]\Big|_0^{r_0} = 0,$$

откуда находим:

$$\int_0^{r_0} R_1R_2 r\,dr = -\frac{r_0 J_n(\alpha_2 r_0)\,\alpha_1 J_n'(\alpha_1 r_0) - r_0 J_n(\alpha_1 r_0)\,\alpha_2 J_n'(\alpha_2 r_0)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} =$$

$$= -\frac{r_0 J_n(\alpha_2 r_0)\,\alpha_1 J_n'(\alpha_1 r_0)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}.$$

Переходя к пределу при $\alpha_2 \to \alpha_1$ и раскрывая неопределенность в правой части, получаем выражение для нормы

$$N = \int_0^{r_0} rR_1^2(r)\,dr = \frac{r_0^2}{2}[J_n'(\alpha_1 r_0)]^2$$

или

$$\int_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r\,dr = \frac{r_0^2}{2}[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2. \tag{17}$$

В частности, норма функции $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)$ равна

$$\int_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\,dr = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)}). \tag{18}$$

В силу общих свойств собственных функций краевых задач и замечания на стр. 570 имеет место теорема разложимости:

Всякая дважды дифференцируемая функция $f(r)$, ограниченная при $r=0$ и обращающаяся в нуль при $r=r_0$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right),$$

где

$$A_m=\frac{\int_0^{r_0} f(r)\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r\, dr}{N_m},$$

$$N_m=\frac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2.$$

Вторая краевая задача для уравнения Бесселя:

$$\mathscr{L}(R)+\lambda r R=0,$$
$$R'(r_0)=0,$$
$$R(0)<\infty$$

решается аналогично. Собственные функции и собственные значения также будут выражаться формулами (15) и (14), где под $\mu_m^{(n)}$ следует понимать корень номера m уравнения

$$J_n'(\mu)=0.$$

Собственные функции задачи ортогональны между собой с весом r (см. (16)) и имеют норму, равную

$$\int_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0}\right) r\, dr=\frac{r_0^2}{2}\left[1-\frac{n^2}{(\mu_m^{(n)})^2}\right] J_n^2(\mu_m^{(n)}).$$

Аналогично решается и третья краевая задача. В этом случае для определения $\mu_m^{(n)}$ получается уравнение вида

$$J_n'(\mu)=hJ_n(\mu).$$

§ 3. Различные типы цилиндрических функций

1. Функции Ханкеля. Наряду с функциями Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ большое значение для приложений имеют другие специальные виды решений уравнения Бесселя. К их числу относятся прежде всего *функции Ханкеля первого и второго рода* $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, являющиеся комплексно-сопряженными решениями уравнения

Бесселя. С точки зрения физических приложений основной характеристикой функций Ханкеля является асимптотическое поведение при больших значениях аргумента

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + \ldots, \tag{1}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + \ldots, \tag{2}$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости относительно $\frac{1}{x}$. Разделяя действительную и мнимые части, представим функцию Ханкеля в виде

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \tag{3}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x), \tag{4}$$

где функции

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right], \tag{3'}$$

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right] \tag{4'}$$

имеют асимптотический характер

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) + \ldots, \tag{5}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) + \ldots, \tag{6}$$

что следует из формул (1) и (2).

Как будет показано ниже (см. п. 3), введенная здесь функция $J_\nu(x)$ является функцией Бесселя первого рода, рассмотренной в § 1. Мнимая часть $N_\nu(x)$ функции Ханкеля называется *функцией Неймана* или *цилиндрической функцией второго рода* ν*-го порядка*.

Формулы (3) и (4) устанавливают связь между функциями Ханкеля, Бесселя и Неймана, аналогичную связи между показательной функцией мнимого аргумента, синусом и косинусом (формула Эйлера). Асимптотические формулы (1), (2), (5) и (6) подчеркивают эту аналогию.

При изучении решений уравнения колебаний

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$$

мы видели, что амплитуда $v(x, y)$ установившихся колебаний

$$u(x, y, t) = v(x, y)\, e^{i\omega t}$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2 v = \Delta v + k^2 v = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}\right).$$

Если решение волнового уравнения обладает радиальной симметрией $v(x, y) = v(r)$, то, как было отмечено в § 1, функция $v(kr)$ удовлетворяет уравнению Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, функции

$$H_0^{(1)}(kr)\, e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(\omega t + kr)}\, \frac{1}{\sqrt{i}} + \ldots \tag{7}$$

и

$$\left(\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$H_0^{(2)}(kr)\, e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(\omega t - kr)}\, \sqrt{i} + \ldots \tag{8}$$

являются решениями уравнения колебаний, имеющими характер цилиндрических волн. Функция $H_0^{(2)}(kr)\, e^{i\omega t}$ соответствует расходящимся цилиндрическим волнам, а функция $H_0^{(1)}(kr)\, e^{i\omega t}$ — сходящимся цилиндрическим волнам [1]).

2. Функции Ханкеля и Неймана. Как было отмечено в п. 1, всякое решение уравнения Бесселя нецелого порядка ν выражается через функции J_ν и $J_{-\nu}$. Установим связь между функциями $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$, N_ν и J_ν, $J_{-\nu}$.

Так как всякое решение уравнения Бесселя при нецелом ν можно представить в виде линейной комбинации функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, то

$$H_\nu^{(1)}(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \tag{9}$$

где C_1 и C_2 — постоянные, подлежащие определению. Для главных членов асимптотических разложений, очевидно, имеет место аналогичное равенство

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right). \tag{10}$$

Преобразуем аргумент второго слагаемого к виду $\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \pi\nu\right] =$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\cos\pi\nu - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\sin\pi\nu.$$

---

[1]) Если взять временной множитель $e^{-i\omega t}$, то расходящимся волнам соответствует $H_0^{(1)}(kr)\, e^{-i\omega t}$, а сходящимся — $H_0^{(2)}(kr)\, e^{-i\omega t}$.

Сокращая обе части равенства (10) на $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ и пользуясь формулой Эйлера для левой части, получаем:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=(C_1+C_2\cos\pi\nu)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)-C_2\sin\pi\nu\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right),$$

откуда

$$C_1+C_2\cos\pi\nu=1,$$
$$-C_2\sin\pi\nu=i$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_2&=\frac{1}{i\sin\pi\nu};\\ C_1&=-\frac{\cos\pi\nu-i\sin\pi\nu}{i\sin\pi\nu}=-C_2e^{-i\pi\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), находим:

$$H_\nu^{(1)}(x)=-\frac{1}{i\sin\pi\nu}[J_\nu(x)\,e^{-i\pi\nu}-J_{-\nu}(x)]. \tag{12}$$

Аналогично

$$H_\nu^{(2)}(x)=\frac{1}{i\sin\pi\nu}[J_\nu(x)\,e^{i\pi\nu}-J_{-\nu}(x)]. \tag{13}$$

Пользуясь формулой (4′), определяющей $N_\nu(x)$, получаем из (12) и (13):

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}. \tag{14}$$

Формулы (12), (13) и (14) получены нами для нецелых значений ν. Для целого значения $\nu=n$ функции Ханкеля и Неймана могут быть определены из (12), (13) и (14) с помощью предельного перехода при $\nu\to n$. Переходя в этих формулах к пределу при $\nu\to n$ и раскрывая неопределенность по известному правилу, будем иметь:

$$H_n^{(1)}(x)=J_n(x)+i\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}-(-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right], \tag{12′}$$

$$H_n^{(2)}(x)=J_n(x)-i\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}-(-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right], \tag{13′}$$

$$N_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}-(-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right]. \tag{14′}$$

Пользуясь представлением функций J_ν и $J_{-\nu}$ в виде степенных рядов, можно получить аналогичные представления для $N_\nu(x)$, а также $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$.

Формулы (12) и (13) можно рассматривать как аналитическое определение функций Ханкеля. Существуют, однако, и другие спо-

собы введения функций Ханкеля. В § 6 будет дано представление функций Ханкеля в виде контурных интегралов.

Если $\nu = n + \frac{1}{2}$, то функции Ханкеля и Неймана выражаются в конечном виде через элементарные функции. В частности, при $\nu = \frac{1}{2}$ имеем:

$$N_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) + iN_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) - iN_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Функции мнимого аргумента. Цилиндрические функции можно рассматривать не только при действительных, но и при комплексных значениях аргумента. В настоящем пункте мы рассмотрим функции Бесселя первого рода от чисто мнимого аргумента.

Подставляя в ряд, определяющий $J_\nu(x)$, значение ix вместо x, получаем:

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu I_\nu(x), \tag{15}$$

где

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{16}$$

— вещественная функция, связанная с $J_\nu(ix)$ соотношением

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad \text{или} \quad I_\nu(x) = e^{-\frac{1}{2}\pi\nu i} J_\nu(ix).$$

В частности, при $\nu = 0$

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots \tag{17}$$

Из ряда (16) видно, что $I_\nu(x)$ являются монотонно возрастающими функциями. Пользуясь асимптотической формулой (5), получим, что для $I_\nu(x)$ должна иметь место асимптотическая формула

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^{x} \tag{18}$$

при больших значениях аргумента x.

Функции Бесселя мнимого аргумента являются решениями уравнения

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{19}$$

и, в частности, функция $I_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0. \tag{20}$$

Наряду с функцией $I_\nu(x)$ рассматривают функцию $K_\nu(x)$, определяемую с помощью функции Ханкеля чисто мнимого аргумента

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\pi i} H_\nu^{(1)}(ix). \tag{21}$$

Ниже мы убедимся в том, что $K_\nu(x)$ имеет действительные значения при действительном значении x. Это будет следовать из формулы

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta - \nu\eta}\, d\eta, \tag{22}$$

которая будет получена в § 6. Пользуясь асимптотическим выражением для $H_\nu^{(1)}$, находим:

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots \tag{23}$$

Формулы (23) и (18) показывают, что $K_\nu(x)$ экспоненциально убывают, а $I_\nu(x)$ экспоненциально возрастают при $x \to \infty$. Отсюда следует линейная независимость этих функций, а также возможность представлений любого решения уравнения (19) в виде линейной комбинации

$$y = AI_\nu(x) + BK_\nu(x).$$

В частности, если y ограничено на бесконечности, то $A = 0$ и $y = BK_\nu(x)$.

Наиболее важное значение имеет функция

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \eta}\, d\eta.$$

4. Функция $K_0(x)$. Покажем, что для функции $K_0(x)$ справедливо следующее интегральное представление:

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi}\, d\xi \qquad (x > 0). \tag{24}$$

Нетрудно убедиться в том, что интеграл

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\,d\xi \tag{24'}$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}(y)=y''+\frac{1}{x}y'-y=0. \tag{25}$$

В самом деле,

$$\mathscr{L}(F)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\left(\operatorname{ch}^2\xi-\frac{1}{x}\operatorname{ch}\xi-1\right)d\xi=$$

$$=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\operatorname{sh}^2\xi\,d\xi-\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\operatorname{ch}\xi\,d\xi=S_1-S_2.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, получим:

$$S_2=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\operatorname{ch}\xi\,d\xi=\frac{\operatorname{sh}\xi}{x}e^{-x\operatorname{ch}\xi}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\operatorname{sh}^2\xi\,d\xi=S_1,$$

откуда и следует:

$$\mathscr{L}(F)=0.$$

Полагая $\operatorname{ch}\xi=\eta$, преобразуем интеграл (24′) для $F(x)$ к виду

$$F(x)=\int_1^\infty\frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2-1}}\,d\eta.$$

Пользуясь этой формулой, можно выяснить характер поведения функции $F(x)$ при $x\to\infty$. Производя еще раз замену переменной

$$x(\eta-1)=\xi,$$

получаем:

$$F(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^\infty\frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi\left(\frac{\xi}{x}+2\right)}}\,d\xi=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,F_1(x).$$

При $x\to\infty$

$$\lim F_1(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-\xi}}{\sqrt{2\xi}}\,d\xi=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\quad(t=\sqrt{\xi}).$$

Следовательно, при больших значениях x

$$F_1(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon),$$

где $\varepsilon\to 0$ при $x\to\infty$. Отсюда получаем асимптотическую формулу

$$F(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}+\ldots, \tag{26}$$

где точками отмечены члены более высокого порядка малости. Введенная с помощью интеграла (24′) функция $F(x)$ является решением уравнения (25), ограниченным на бесконечности, поэтому

$$F(x) = BK_0(x).$$

Сравнение асимптотических формул для $K_0(x)$ и $F_0(x)$ показывает, что $B = 1$ и, следовательно,

$$K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} d\xi \quad (x > 0). \tag{24}$$

Выясним характер функции $K_0(x)$ при $x \to 0$.

Представим интеграл

$$K_0(x) = F(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2 - 1}} d\eta$$

в виде

$$K_0(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} d\lambda \quad (x\eta = \lambda).$$

Разбивая этот интеграл на три части

$$K_0(x) = \int_x^A \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} + \int_x^A \frac{(e^{-\lambda} - 1)\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} + \int_A^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}},$$

где A — некоторая вспомогательная постоянная, видим, что первое слагаемое равно

$$\ln \frac{A + \sqrt{A^2 - x^2}}{x} = -\ln x + \ldots,$$

а второе и третье слагаемые ограничены при $x \to 0$. Отсюда следует, что

$$K_0(x) = -\ln x + \ldots = \ln \frac{1}{x} + \ldots, \tag{27}$$

где точки означают слагаемые, остающиеся конечными при $x = 0$. Таким образом, функция $K_0(x)$ является решением уравнения (25), имеющим логарифмическую особенность в точке $x = 0$ и экспоненциально убывающим при $x \to \infty$.

Следующая задача дает физическую интерпретацию функции $K_0(x)$. Пусть в начале координат действует стационарный источник неустойчивого газа мощности Q_0. Стационарный процесс диффузии сопровождается распадом газа и описывается уравнением

$$\Delta u - \varkappa^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \varkappa^2 u = 0 \tag{28}$$

$$\left(\varkappa^2 = \frac{\beta}{D^2}\right),$$

где β — коэффициент распада, D — коэффициент диффузии. Функция источника этого уравнения обладает круговой симметрией и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)-u=0 \qquad (x=\varkappa r);$$

кроме того, функция источника имеет логарифмическую особенность в начале координат и ограничена на бесконечности. Отсюда следует, что функция источника пропорциональна $K_0(\varkappa r)$:

$$\overline{G}=AK_0(\varkappa r). \tag{29}$$

Для определения множителя A воспользуемся условием источника

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\varepsilon}\left(-D\frac{\partial u}{\partial r}\right)ds=Q_0, \tag{30}$$

где интеграл слева выражает диффузионный поток через окружность K_ε радиуса ε с центром в источнике. Подставляя в это условие вместо u функцию $\overline{G}=AK_0(\varkappa r)$ и учитывая логарифмическую особенность функции $K_0(x)$ при $x=0$, получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{K_\varepsilon}D\frac{\partial\overline{G}}{\partial r}\,dS\right\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{D\,2\pi\varepsilon A\,\frac{1}{\varepsilon}\right\}=2\pi AD=Q_0.$$

Отсюда

$$A=\frac{Q_0}{2\pi D}$$

и

$$\overline{G}=\frac{Q_0}{2\pi D}K_0(\varkappa r). \tag{31}$$

Интегральную формулу (24) для $K_0(x)$ можно получить, исходя из простых физических соображений.

Рассмотрим нестационарную задачу диффузии газа с распадом. Пусть в начале координат находится источник постоянной мощности Q_0, действующий начиная с момента $t=0$. Будем предполагать, что в начальный момент $t=0$ концентрация газа всюду равна нулю. Концентрация $u(x, y, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$D\,\Delta u-\beta u=u_t \tag{32}$$

и соответствующим дополнительным условиям. Уравнение (39) при помощи подстановки

$$u=\widetilde{u}e^{-\beta t}$$

преобразуется в обычное уравнение диффузии

$$D\,\Delta\widetilde{u}=\widetilde{u}_t,$$

для которого функция влияния точечного источника имеет вид

$$\widetilde{G}=\frac{1}{(2\sqrt{\pi D(t-\tau)})^2}e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}} \qquad (D=a^2).$$

Таким образом, функция влияния мгновенного точечного источника для уравнения (32) равна

$$G = \frac{Q}{(2\sqrt{\pi D(t-\tau)})^2} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)} - \beta(t-\tau)}.$$

Функция влияния источника мощности Q_0, непрерывно действующего от $t = 0$ до момента t, дается формулой

$$G = Q_0 \int_0^t \frac{1}{4\pi D(t-\tau)} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)} - \beta(t-\tau)} d\tau.$$

Вводя новую переменную

$$\theta = t - \tau,$$

получаем:

$$G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Функция источника, соответствующая стационарной задаче, может быть найдена предельным переходом при $t \to \infty$ в предыдущей формуле

$$\overline{G} = \lim_{t\to\infty} G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4D}\frac{1}{\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Преобразуем этот интеграл при помощи подстановки

$$\theta = Ce^{\xi},$$

где C — некоторая постоянная,

$$\overline{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{r^2}{4DC} e^{-\xi} + \beta C e^{\xi}\right]} d\xi.$$

Требуя, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{r^2}{4DC} = \beta C,$$

находим:

$$C = \frac{r}{2\sqrt{\beta D}} \quad \text{и} \quad \frac{r^2}{4DC} = \beta C = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\beta}{D}} = \frac{\varkappa r}{2} \left(\varkappa^2 = \frac{\beta}{D}\right).$$

Отсюда следует, что стационарная функция источника имеет вид

$$\overline{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varkappa r \operatorname{ch}\xi} d\xi = \frac{Q_0}{2\pi D} \int_0^\infty e^{-\varkappa r \operatorname{ch}\xi} d\xi = \frac{Q_0}{2\pi D} K_0(\varkappa r).$$

Таким образом, рассмотренная здесь задача приводит к интегральному представлению для функции $K_0(x)$.

§ 4. Интегральные представления. Асимптотические формулы

1. Интегральные представления для функций целого порядка. Будем рассматривать периодические по времени решения уравнения колебаний

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_{tt}.$$

Полагая

$$u(x, y, t) = v(x, y) e^{i\omega t},$$

получим для амплитуды колебаний $v(x, y)$ волновое уравнение

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2 v = 0 \quad \left(k = \frac{\omega}{a}\right), \tag{1}$$

которое допускает решение вида

$$v = e^{\mp ikx} \quad \text{и} \quad v = e^{\mp iky}, \tag{2}$$

соответствующее плоским волнам

$$u = e^{i(\omega t \mp kx)} \quad \text{и} \quad u = e^{i(\omega t \mp ky)}.$$

Выбор знака — или + определяет плоскую волну, идущую в положительном или отрицательном направлении оси. В дальнейшем будем опускать временной множитель $e^{i\omega t}$, называя плоской волной функции (2).

Плоская волна, распространяющаяся в направлении s, очевидно, имеет вид

$$v = e^{-iksr} = e^{-ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)},$$

где α — угол между направлением s и осью x.

Введем полярные координаты, полагая

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Тогда

$$v = e^{-ikr\cos(\varphi - \alpha)},$$

причем $\alpha = 0$ соответствует плоская волна, идущая в положительном направлении оси x, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — волна, идущая в положительном направлении оси y.

Найдем разложение плоской волны, идущей вдоль оси y,

$$v = e^{-ikr\sin\varphi} \tag{3}$$

в ряд Фурье по переменному φ

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\rho) e^{-in\varphi} \quad (\rho = kr), \tag{4}$$

где

$$A_n(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\sin\varphi+in\varphi}\,d\varphi. \tag{5}$$

Докажем, что

$$A_n(\rho)=J_n(\rho). \tag{6}$$

Убедимся прежде всего в том, что $A_n(\rho)$ удовлетворяет уравнению Бесселя (§ 1, Дополнение I), которое запишем в виде

$$\rho^2\frac{d^2y}{d\rho^2}+\rho\frac{dy}{d\rho}+(\rho^2-n^2)y=\mathscr{L}(y)=0.$$

Вычислим

$$\mathscr{L}(A_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\sin\varphi+in\varphi}\,[-\rho^2\sin^2\varphi-i\rho\sin\varphi+\rho^2-n^2]\,d\varphi. \tag{7}$$

Преобразуем при помощи двукратного интегрирования по частям интеграл

$$n^2\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\sin\varphi+in\varphi}\,d\varphi=n\rho\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\sin\varphi+in\varphi}\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{\rho}{i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\sin\varphi+in\varphi}\,[-i\rho\cos^2\varphi-\sin\varphi]\,d\varphi=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\sin\varphi+in\varphi}\,[\rho^2-\rho^2\sin^2\varphi-i\rho\sin\varphi]\,d\varphi; \tag{8}$$

при этом мы не выписываем внеинтегральных членов, так как в силу периодичности функций они равны нулю. Подставляя (8) в формулу (7) для $\mathscr{L}(A_n)$, убеждаемся, что

$$\mathscr{L}(A_n)=0. \tag{9}$$

Из (5) видно, что функция A_n при $\rho=0$ ограничена. Отсюда и из (9) следует, что $A_n(\rho)$ пропорциональна $J_n(\rho)$

$$A_n(\rho)=C_nJ_n(\rho), \tag{10}$$

где C_n — некоторая постоянная. Для вычисления C_n сравним обе части формулы (10) при $\rho=0$. Замечая, что $J_n(\rho)$ при $\rho=0$ имеет нуль n-го порядка и дифференцируя n раз $J_n(\rho)$, находим из (12) § 1

$$\left[\frac{d^n}{d\rho^n}J_n(\rho)\right]_{\rho=0}=\frac{1}{2^n}. \tag{11}$$

С другой стороны, дифференцируя A_n, находим из (5):

$$\left[\frac{d^k}{d\rho^k}A_n(\rho)\right]_{\rho=0} = \frac{1}{2\pi}(-i)^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi}\sin^k\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{(-i)^k}{2\pi\cdot 2^k i^k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})^k\, a\varphi.$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi}e^{ik\varphi}\,d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq -n, \\ 1 & \text{при } k = -n, \end{cases}$$

то

$$\left[\frac{d^k}{d\rho^k}A_n(\rho)\right]_{\rho=0} = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad k < n, \\ \dfrac{(-1)^n}{2^n}\cdot\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi}(-e^{-i\varphi})^n\,d\varphi = \dfrac{1}{2^n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } k = n. \end{cases} \tag{12}$$

Из сравнения (11) и (12) заключаем, что

$$C_n = 1.$$

Таким образом, установлено следующее интегральное представление для функции Бесселя первого рода целого порядка n:

$$J_n(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\sin\varphi + in\varphi}\,d\varphi. \tag{13}$$

Для плоской волны (3) имеет место разложение

$$e^{-i\rho\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\rho)\,e^{-in\varphi}.$$

Отсюда, в частности, следует:

$$\cos(\rho\sin\varphi) = J_0(\rho) + 2J_2(\rho)\cos 2\varphi + 2J_4(\rho)\cos 4\varphi + \ldots,$$
$$\sin(\rho\sin\varphi) = 2J_1(\rho)\sin\varphi + 2J_3(\rho)\sin 3\varphi + \ldots$$

Установим другую интегральную формулу для $J_n(\rho)$. Полагая $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$, получим из (13):

$$J_n(\rho) = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\rho\cos\psi + in\psi}\,d\psi; \tag{13'}$$

в силу периодичности подинтегральных функций в (13) и (13′) интегрирование можно производить по любому промежутку длиною 2π. Формулу (13′) можно также получить, исходя из разложения

$$e^{i\rho\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\rho)\, e^{-in\varphi}.$$

Выпишем, пользуясь (13) и (13′), отдельно интегральные формулы для функции $J_0(\rho)$:

$$J_0(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\sin\varphi}\, d\varphi, \tag{14}$$

$$J_0(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\rho\cos\varphi}\, d\varphi. \tag{14′}$$

Следует отметить, что интегральные представления (13) и (13′) получены лишь для функций с целым индексом. Если индекс ν нецелый, то для функции $J_\nu(\rho)$ имеет место следующая формула:

$$J_\nu(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\sin\varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\rho\,\mathrm{sh}\,\xi - \nu\xi}\, d\xi, \tag{15}$$

аналогичная формуле (13) (ср. с формулой (7) § 6).

2. Асимптотические формулы. Прежде чем перейти к изучению асимптотического поведения функций Бесселя, докажем следующую лемму:

Функция $Q(\rho)$, определяемая интегралом типа

$$Q(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{\pm i\rho\xi}}{\sqrt{1-\xi}} f(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

где $f(\xi)$ — некоторая непрерывная, дважды дифференцируемая функция, для больших значений ρ может быть представлена в виде

$$Q(\rho) = \frac{e^{\pm i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi\rho}} f(1)\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \tag{17}$$

где $O\left(\frac{1}{\rho}\right) \to 0$ при $\rho \to \infty$.

Проведем доказательство, выбирая для определенности знак плюс в показателе.

Подинтегральная функция в (16) имеет особенность при $\xi = 1$. Для выделения этой особенности введем новую переменную

$$\eta = 1 - \xi \quad (\xi = 1 - \eta),$$

так что

$$Q(\rho)=\frac{e^{i\rho}}{\pi}\int_0^1 e^{-i\rho\eta}\frac{f(1-\eta)}{\sqrt{\eta}}\,d\eta. \tag{18}$$

Второй сомножитель подинтегрального выражения можно представить в виде

$$\frac{f(1-\eta)}{\sqrt{\eta}}=\frac{f(1)}{\sqrt{\eta}}+g(\eta), \tag{19}$$

где

$$g(\eta)=\frac{f(1-\eta)-f(1)}{\sqrt{\eta}}=\frac{f(1-\eta)-f(1)}{\eta}\sqrt{\eta}=$$
$$=g_1(\eta)\sqrt{\eta}\quad (g(0)=0), \tag{20}$$

причем $g_1(\eta)$ — непрерывная и дифференцируемая функция η. В частности, $g'(\eta)$ абсолютно интегрируема, т. е.

$$\int_0^1 |g'(\eta)|\,d\eta<M,$$

где M — некоторая постоянная. Подставляя (19) в (18), получаем:

$$Q(\rho)=\frac{e^{i\rho}}{\pi}\left\{f(1)\int_0^1\frac{e^{-i\rho\eta}}{\sqrt{\eta}}\,d\eta+\int_0^1 e^{-i\rho\eta}g(\eta)\,d\eta\right\}=\frac{e^{i\rho}}{\pi}(q_1+q_2), \tag{21}$$

где

$$q_1=f(1)\int_0^1\frac{e^{-i\rho\eta}}{\sqrt{\eta}}\,d\eta,\quad q_2=\int_0^1 e^{-i\rho\eta}g(\eta)\,d\eta.$$

Для q_1 получаем выражение

$$q_1(\rho)=f(1)\sqrt{\frac{\pi}{\rho}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \tag{22}$$

так как

$$\int_0^\rho\frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\,d\xi=\int_0^\infty\frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\,d\xi\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]=\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

В самом деле,

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha\xi}}{\sqrt{\xi}}\,d\xi=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Продолжая эту формулу на комплексные значения α, вещественная

часть которых неотрицательна, найдем [1]):

$$\int_0^\infty \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}} = \sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\text{аналогично } \int_0^\infty \frac{e^{i\xi}}{\sqrt{\xi}}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-i}} = \sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}\right).$$

Преобразуем интеграл q_2 с помощью интегрирования по частям:

$$q_2 = \int_0^1 e^{-i\rho\eta}g(\eta)\,d\eta = \frac{1}{-i\rho}e^{-i\rho\eta}g(\eta)\Big|_0^1 - \frac{1}{-i\rho}\int_0^1 e^{-i\rho\eta}g'(\eta)\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho}}O\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в формулу (21), будем иметь:

$$Q(\rho) = \frac{e^{i\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi\rho}}f(1)\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \tag{17'}$$

если в (16) берется знак плюс.

Аналогичная формула получается, если в (16) взять знак минус

$$Q(\rho) = \frac{e^{-i\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi\rho}}f(1)\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \tag{17''}$$

Лемма доказана.

Применим эту лемму к выводу асимптотических формул для функции Бесселя первого рода целого порядка. Вводя новую переменную

$$\cos\psi = \xi,$$

преобразуем формулу (13'):

$$J_n(\rho) = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\rho\cos\psi}\cos n\psi\,d\psi = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{i\rho\cos\psi}\cos n\psi\,d\psi =$$

$$= \frac{(-i)^n}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{i\rho\xi}\frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi, \tag{24}$$

где

$$T_n(\xi) = \cos(n \arccos\xi).$$

Поскольку

$$\cos n\psi = \operatorname{Re}(\cos\psi + i\sin\psi)^n,$$

в силу формулы Моавра, есть полином степени n, то $T_n(\xi)$ является также полиномом степени n относительно $\xi = \cos\psi$. Полиномы $T_n(\xi)$ называются *полиномами Чебышева.*

---

[1]) См. подробнее В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III,

Рассмотрим

$$T_n(-\xi) = \cos\big(n \arccos(-\xi)\big) = \cos(n\pi - n \arccos\xi) =$$
$$= \cos n\pi \cos(n \arccos\xi) + \sin n\pi \sin(n \arccos\xi) = (-1)^n T_n(\xi),$$

т. е.

$$T_n(-\xi) = (-1)^n T_n(\xi).$$

Представляя интеграл (24) в виде суммы интегралов от 0 до 1 и от -1 до 0 и пользуясь этим свойством полиномов Чебышева, получаем:

$$J_n(\rho) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{i\rho\xi}}{\sqrt{1-\xi}} f(\xi)\,d\xi + \frac{i^n}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-i\rho\xi}}{\sqrt{1-\xi}} f(\xi)\,d\xi, \qquad (24')$$

где

$f(\xi) = \dfrac{T_n(\xi)}{\sqrt{1+\xi}}$ — непрерывная и любое число раз дифференцируемая функция, причем $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Применяя доказанную выше лемму к каждому из интегралов (24'), находим из (17') и (17''):

$$J_n(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\left[e^{i\left(\rho-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}n\right)} + e^{-i\left(\rho-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}n\right)}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\left[\rho - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Таким образом, для функции Бесселя первого рода при больших аргументах имеет место асимптотическая формула

$$J_n(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\left[\rho - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \qquad (25)$$

В частности, при $n=0$

$$J_0(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \qquad (25')$$

при $n=1$

$$J_1(\rho) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\left(\rho + \frac{\pi}{4}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \qquad (25'')$$

В § 6 будет показано, что для функций Ханкеля справедливы следующие асимптотические представления:

$$H_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\,e^{i\left[\rho-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \qquad (26)$$

$$H_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\,e^{-i\left[\rho-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \qquad (27)$$

Пользуясь (26) и (27), а также формулами

$$H_n^{(1)}(\rho) = J_n(\rho) + iN_n(\rho) \qquad (3,\ \S\ 3)$$

и

$$H_n^{(2)}(\rho) = J_n(\rho) - iN_n(\rho), \qquad (4,\ \S\ 3)$$

находим:

$$N_n(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin\left[\rho - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \qquad (28)$$

Формулы (3) и (4) § 3 вместе с асимптотическими формулами для $H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$ и J_n, N_n по структуре сходны с формулами Эйлера для тригонометрических функций:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

§ 5. Интеграл Фурье — Бесселя и некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя

1. Интеграл Фурье — Бесселя. Найдем разложение заданной функции $f(r)$ в интеграл по функциям Бесселя. Интеграл Фурье для функции $f(x)$ и соответственно для функции двух переменных $f(x, y)$, как известно, имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i\mu(x-\xi)}\, d\xi, \qquad (1)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, d\mu' \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\, e^{i\mu(x-\xi)+i\mu'(y-\eta)}\, d\xi\, d\eta. \qquad (2)$$

Вводя полярные координаты с помощью соотношений

$$x = r\cos\varphi, \quad \xi = \rho\cos\psi, \quad \mu = \lambda\cos\xi,$$
$$y = r\sin\varphi; \quad \eta = \rho\sin\psi; \quad \mu' = \lambda\sin\xi,$$

получим:

$$d\xi\, d\eta = \rho\, d\rho\, d\psi, \qquad d\mu\, d\mu' = \lambda\, d\lambda\, d\xi,$$
$$\mu x + \mu' y = \lambda r\cos(\xi - \varphi),$$
$$\mu\xi + \mu'\eta = \lambda\rho\cos(\psi - \xi).$$

Предполагая, что $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = f(r)\, e^{in\varphi}, \qquad (3)$$

где n — целое число, и преобразовывая с помощью написанных выше соотношений интеграл Фурье (2), находим:

$$f(r)\,e^{in\varphi} = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\rho)\,\rho\,d\rho\,\lambda\,d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda r\cos(\xi-\varphi)+in(\xi-\varphi)}\,d\xi \cdot e^{in\varphi} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda\rho\cos(\psi-\xi)+in(\psi-\xi)}\,d\psi. \qquad (4)$$

Воспользуемся формулами

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos\xi+in\xi} e^{-i\frac{\pi n}{2}}\,d\xi, \qquad (5)$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\cos\xi'+in\xi'} e^{i\frac{\pi n}{2}}\,d\xi' \quad (\xi = \pi + \xi'); \qquad (6)$$

так как подинтегральные выражения в (5) и (6) являются периодическими функциями ξ и ξ' и интегрировать поэтому можно по любому промежутку длиной 2π, то можно написать:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos(\xi-\xi_0)+in(\xi-\xi_0)}\,d\xi = J_n(z)\,e^{i\frac{\pi n}{2}}, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\cos(\xi'-\xi_0')+in(\xi'-\xi_0')}\,d\xi' = J_n(z)\,e^{-i\frac{\pi n}{2}}, \qquad (8)$$

где ξ_0 и ξ_0' — произвольные числа. Подставляя (7) и (8) в (4) и сокращая обе части на $e^{in\varphi}$, получаем *интеграл Фурье — Бесселя*:

$$f(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\rho)\,J_n(\lambda\rho)\,J_n(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\,\rho\,d\rho \qquad (9)$$

или

$$f(r) = \int_0^\infty \varphi(\lambda)\,J_n(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda,$$

где

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty f(\rho)\,J_n(\lambda\rho)\,\rho\,d\rho.$$

Для того чтобы разложение в интеграл Фурье — Бесселя было возможно, достаточно потребовать от функции $f(r)$, определенной в промежутке $(0, \infty)$, выполнения следующих условий:

1) $f(r)$ непрерывна в промежутке $(0, \infty)$;

2) $f(r)$ имеет конечное число максимумов и минимумов во всяком конечном промежутке;

3) существует интеграл

$$\int_0^\infty \rho\,|f(\rho)|\,d\rho.$$

На доказательстве этого мы не останавливаемся.

2. Некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя. В различных приложениях часто встречаются определенные интегралы, содержащие бесселевы функции.

К числу наиболее распространенных интегралов этого типа принадлежит интеграл

$$B_1 = \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \qquad (z>0). \tag{10}$$

Для доказательства этой формулы заменим J_0 ее интегральным выражением ((14) § 4) и затем изменим порядок интегрирования:

$$B_1 = \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-z\lambda}\,d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\lambda\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-(z+i\rho\sin\varphi)\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{z+i\rho\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\sin\varphi\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{z\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi},$$

так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} = 0$$

в силу нечетности подинтегрального выражения.

Полагая сначала $\operatorname{tg}\varphi = \xi$, а затем $\sqrt{\frac{z^2+\rho^2}{z^2}}\,\xi = \eta$, получаем:

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{z\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} = \frac{2z}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{2z}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{z^2(1+\xi^2)+\rho^2\xi^2} = \frac{2}{\pi\sqrt{z^2+\rho^2}}\int_0^\infty \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}};$$

тем самым формула (10) доказана. Пользуясь (10), сразу же находим:

$$\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\, e^{-z\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right). \tag{11}$$

Полагая в формулах (10) и (11) $z = ia$ и разделяя действительную и мнимые части, получаем ряд следствий:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\cos a\lambda\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-a^2}},\\
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\sin a\lambda\, d\lambda = 0,\\
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\cos a\lambda\, d\lambda = \frac{1}{\rho},\\
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\sin a\lambda\, d\lambda = \frac{a}{\rho\sqrt{\rho^2-a^2}}
\end{aligned}\right\} \text{ при } \rho > a; \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\cos a\lambda\, d\lambda = 0,\\
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\sin a\lambda\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}
\end{aligned}\right\} \text{ при } a > \rho; \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\cos a\lambda\, d\lambda = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right),\\
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\sin a\lambda\, d\lambda = 0
\end{aligned}\right\} \text{ при } a > \rho. \tag{13'}$$

Докажем вторую интегральную формулу

$$B_2 = \int_0^\infty J_\nu(\lambda\rho)\, e^{-t\lambda^2}\lambda^{\nu+1}\, d\lambda = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^\nu e^{-\frac{\rho^2}{4t}}. \tag{14}$$

Подставим в эту формулу вместо J_ν степенной ряд и произведем почленное интегрирование ($t > 0$!):

$$B_2 = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+\nu} \int_0^\infty \lambda^{2k+2\nu+1} e^{-t\lambda^2} d\lambda.$$

Вычисляя вспомогательный интеграл

$$\int_0^\infty \lambda^{2k+2\nu+1} e^{-t\lambda^2}\, d\lambda = \frac{1}{2t^{k+\nu+1}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{k+\nu}\, d\xi = \frac{1}{2t^{k+\nu+1}} \Gamma(k+\nu+1),$$

получаем:

$$B_2 = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right)^k = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^k e^{-\frac{\rho^2}{4t}},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что вычисление B_1 можно провести аналогично, разлагая бесселеву функцию в ряд и производя затем почленное интегрирование.

Рассмотрим интеграл

$$C = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \lambda\, d\lambda. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться, что он является решением уравнения

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Функция

$$v_0 = \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (r = \sqrt{\rho^2 + z^2})$$

также удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta v_0 + k^2 v_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r v_0) + k^2 v_0 = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} + k^2 v_0 = 0.$$

Разложим функцию $v_0(\rho) = \dfrac{e^{ik\rho}}{\rho}$ в интеграл Фурье — Бесселя

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho} = \int_0^\infty F(\lambda) J_0(\rho\lambda) \lambda\, d\lambda, \tag{16}$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^\infty e^{ik\rho} J_0(\lambda\rho)\, d\rho. \tag{17}$$

Для вычисления функции $F(\lambda)$ воспользуемся формулами (12)

$$F(\lambda) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)(\cos k\rho + i \sin k\rho)\, d\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, & \text{если } \lambda > k, \\ \dfrac{i}{\sqrt{k^2-\lambda^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, & \text{если } k > \lambda. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{e^{ikp}}{p} = \int_0^\infty J_0(p\lambda)\frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \tag{18}$$

т. е. функция

$$v_0 = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

совпадает с интегралом $C(\rho, z)$ при $z = 0$. Итак, обе функции

$$v_0(\rho, z) \quad \text{и} \quad C(\rho, z)$$

являются решениями волнового уравнения, совпадают при $z = 0$ и имеют в точке $z = 0$, $\rho = 0$ одинаковую особенность.

Отсюда следует, что они тождественно равны друг другу, т. е.

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\lambda\, d\lambda = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}. \tag{19}$$

Полученная формула широко применялась А. Зоммерфельдом в физических исследованиях и часто называется формулой Зоммерфельда.

§ 6. Представление цилиндрических функций с помощью контурных интегралов

1. Представление цилиндрических функций с помощью контурных интегралов. Часто пользуются представлением решений уравнения Бесселя с помощью контурных интегралов типа

$$\int e^{-ix\sin\varphi + iv\varphi}\, d\varphi = \int_C K(x, \varphi)\,\Phi(\varphi)\, d\varphi, \tag{1}$$

где C — некоторый контур, лежащий в плоскости комплексного переменного φ, $K(x, \varphi) = e^{-ix\sin\varphi}$, $\Phi(\varphi) = e^{iv\varphi}$. Функцию (1) можно рассматривать как результат суперпозиций плоских волн

$$e^{-i(x\sin\varphi + y\cos\varphi)},$$

распространяющихся под различными, в том числе комплексными, углами к оси y, если брать их значения при $y = 0$ (на оси x); $\Phi = e^{iv\varphi}$ является амплитудным множителем плоской волны.

Выясним вопрос о сходимости интеграла (1). На рис. 90 заштрихованы те части плоскости комплексного переменного $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, в которых действительная часть выражения

$$ix\sin\varphi = xi\sin(\varphi_1 + i\varphi_2) = x(i\sin\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_2 - \cos\varphi_1\operatorname{sh}\varphi_2) \tag{2}$$

положительна (при $x > 0$).

Функции Ханкеля первого и, соответственно, второго рода обычно определяются при помощи интегралов

$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-ix\sin\varphi+i\nu\varphi}\,d\varphi, \tag{3}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{-ix\sin\varphi+i\nu\varphi}\,d\varphi, \tag{4}$$

взятых по контурам C_1 и C_2, где контур C_1 состоит из участков $(-i\infty, 0)$, $(0, -\pi)$, $(-\pi, -\pi+i\infty)$, а контур C_2 — из участков $(\pi+i\infty, \pi)$, $(\pi, 0)$, $(0, -i\infty)$ (рис. 91, пути I и II).

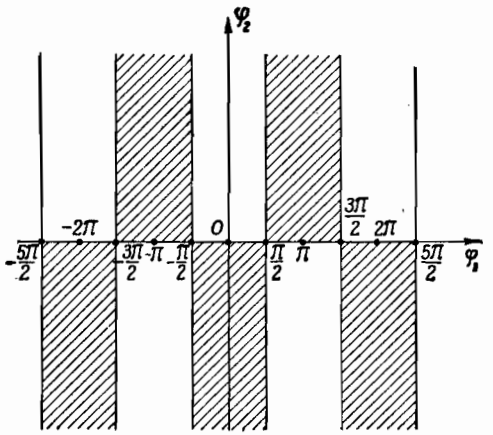


Рис. 90.

Очевидно, что при $x>0$ интегралы по C_1 и C_2 сходятся.

Покажем, что функции (3) и (4) удовлетворяют уравнению Бесселя

$$\mathscr{L}(y) = x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0.$$

Принимая во внимание, что функция

$$K(x, \varphi) = e^{-ix\sin\varphi}$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2K_{xx} + xK_x + x^2K + K_{\varphi\varphi} = 0,$$

находим после двукратного интегрирования по частям

$$\mathscr{L}[H_\nu^{(1)}(x)] = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1}\mathscr{L}(K)\,e^{i\nu\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{C_1}[K_{\varphi\varphi}+\nu^2K]\,\Phi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{C_1}(\Phi''+\nu^2\Phi)\,K\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{C_1}\frac{\partial}{\partial\varphi}(K_\varphi\Phi - K\Phi')\,d\varphi.$$

Первый интеграл правой части обращается в нуль в силу выбора функции Ф, второй интеграл сводится к подстановке, которая обращается в нуль при $x > 0$ в силу выбора пути интегрирования; следовательно, $H_\nu^{(1)}$, а также и $H_\nu^{(2)}$ являются решениями уравнения Бесселя.

Аналогичные рассуждения показывают, что интеграл по любому контуру C, бесконечные ветви которого лежат в заштрихованной области, удовлетворяет уравнению Бесселя. В дальнейшем будет доказано, что взятый по контуру $C_0 = C_2 + C_1$ интеграл

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)] = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_0} e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\,d\varphi \qquad (5)$$

является функцией Бесселя первого рода ν-го порядка. Для целых значений $\nu = n$ интегралы по бесконечным ветвям I и II (см. рис. 91)

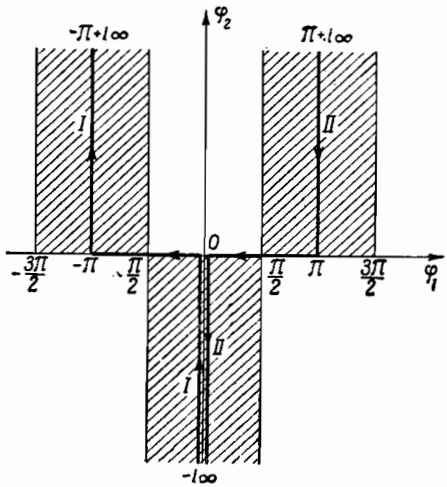


Рис. 91.

взаимно уничтожаются в силу периодичности подинтегральной функции, и остающийся интеграл

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi + in\varphi}\,d\varphi \qquad (6)$$

совпадает с представлением функций первого рода целого порядка, полученным в § 3.

Для нецелых значений ν имеет место формула

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\,d\varphi - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{sh}\,\xi - \nu\xi}\,d\xi, \qquad (7)$$

вытекающая из формулы (5). Интеграл (7), как нетрудно видеть, для $\nu > 0$ остается конечным при $x = 0$; отсюда следует, что функция, определяемая формулой (7), с точностью до множителя совпадает с функцией, определенной формулой (15) § 3. Сравнивая коэффициенты при низшей степени x в разложении в ряд по x, можно убедиться в тождественности этих функций [1]).

Покажем, что для функций Ханкеля $H_\nu^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2)$ имеют место рекуррентные формулы, аналогичные формулам (21) для функций $J_\nu(x)$, установленным в § 1, п. 2.

Учитывая, что в формулах (3) и (4) пути интегрирования C_1 и C_2 не зависят от ν, можно написать

$$H_{\nu+1}^{(k)} + H_{\nu-1}^{(k)} = -\frac{2}{\pi}\int e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi i x}\int \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{-ix\sin\varphi}\right) e^{i\nu\varphi}\, d\varphi,$$

$$H_{\nu+1}^{(k)} - H_{\nu-1}^{(k)} = -\frac{2i}{\pi}\int e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\pi}\int e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi = -2\frac{dH_\nu^{(k)}}{dx} \qquad (k = 1,\ 2).$$

Интегрируя по частям в первом равенстве, получаем рекуррентные формулы для функций Ханкеля

$$\left.\begin{aligned} H_{\nu+1}^{(1)} + H_{\nu-1}^{(1)} &= \frac{2\nu}{x}H_\nu^{(1)}, \\ H_{\nu+1}^{(1)} - H_{\nu-1}^{(1)} &= -2\frac{dH_\nu^{(1)}}{dx} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и аналогично

$$\left.\begin{aligned} H_{\nu+1}^{(2)} + H_{\nu-1}^{(2)} &= \frac{2\nu}{x}H_\nu^{(2)}, \\ H_{\nu+1}^{(2)} - H_{\nu-1}^{(2)} &= -2\frac{dH_\nu^{(2)}}{dx}. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\frac{dH_0^{(1)}(x)}{dx} = -H_1^{(1)}(x), \qquad \frac{dH_0^{(2)}(x)}{dx} = -H_1^{(2)}(x). \tag{9}$$

Если $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ рассматривать как функции комплексного переменного $x = x_1 + ix_2$, то формулы (3) и (4) определяют эти

---

[1]) См., например, А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, 1950, ИЛ, стр. 430.

функции в той области изменения $x = x_1 + ix_2$, где действительная часть

$$\operatorname{Re}(-ix\sin\varphi) = \operatorname{Re}[(-ix_1 + x_2)\sin(\varphi_1 + i\varphi_2)] = \\ = (x_2\sin\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_2 + x_1\cos\varphi_1\operatorname{sh}\varphi_2) < 0.$$

Если $\varphi_1 = 0$ или $\varphi_1 = -\pi$, то интеграл (3) по контуру C_1 определяет функцию $H_\nu^{(1)}(x)$ для тех значений x, у которых действительная часть $\operatorname{Re}(x) = x_1 > 0$.

Обозначим через $C_{1\psi}$ контур (рис. 92), у которого вертикальные части пути C_1 вместо $-\pi$ и 0 имеют абсциссы $-\pi-\psi$ и ψ ($\psi < 0$).

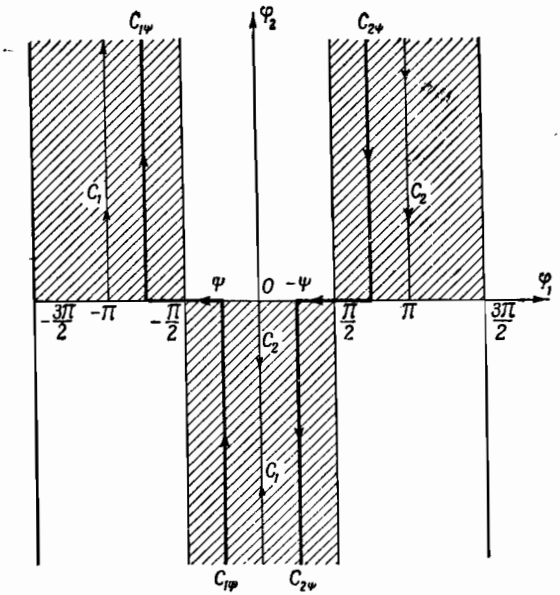


Рис. 92.

В частности, $C_{10} = C_1$. В силу теоремы Коши замена контура интегрирования C_1 в формуле (3) контуром $C_{1\psi}$ не влияет на значение интеграла. При интегрировании по контуру $C_{1\psi}$ интеграл (3) будет сходиться для тех значений $x = x_1 + ix_2$, для которых

$$\operatorname{Re}(-ix\sin\varphi) = x_2\sin\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_2 + x_1\cos\varphi_1\operatorname{sh}\varphi_2 < 0$$

при больших значениях $|\varphi_2|$. Вдоль нижней части прямой $\varphi_1 = \psi$, $\varphi_2 < 0$ это условие будет выполнено, если $x_2\sin\psi - x_1\cos\psi < 0$; вдоль верхней части прямой $\varphi = -\pi - \psi$, $\varphi_2 > 0$ условие сходимости также равносильно неравенству

$$x_2\sin\psi - x_1\cos\psi < 0.$$

Таким образом, интеграл по $C_{1\psi}$ сходится, если выполняется неравенство

$$x_2 \sin\psi - x_1 \cos\psi < 0$$

(или $x_1 \cos\psi_0 + x_2 \sin\psi_0 > 0$, где $\psi_0 = -\psi$).

Если $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, то интегралы (3) по $C_{1\psi}$ равны между собой для вещественных значений $x = x_1$, однако определяют функцию $H_\nu^{(1)}(x)$ в различных областях плоскости комплексного переменного x. Следовательно, при изменении ψ интегралы (3) по контурам типа $C_{1\psi}$ определяют аналитическое продолжение $H_\nu^{(1)}(x)$. В частности, полагая

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} + i\eta,$$

получаем формулу

$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{C_{1\psi_0}} e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\nu i}}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\operatorname{ch}\eta - \nu\eta}\, d\eta, \qquad (3)$$

определяющую функцию $H_\nu^{(1)}(x)$ в полуплоскости $x_2 = \operatorname{Im}(x) > 0$. Отсюда можно получить выражение для функции Ханкеля чисто мнимого аргумента

$$H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{1}{\pi i} e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}\eta - \nu\eta}\, d\eta \qquad (x > 0). \qquad (3'')$$

Функция $K_0(x)$ по определению (см. § 3) выражается через функцию Ханкеля мнимого аргумента формулой

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i e^{i\nu\frac{\pi}{2}} H_\nu^{(1)}(ix).$$

Пользуясь предшествующей формулой, мы получаем интегральное представление $K_\nu(x)$:

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}\eta - \nu\eta}\, d\eta,$$

показывающее, что $K_\nu(x)$ является вещественной функцией аргумента x. При $\nu = 0$ формула

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}\eta}\, d\eta = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}\eta}\, d\eta$$

была установлена непосредственно (см. § 4).

2. Метод перевала. Асимптотические формулы. Подинтегральная функция

$$e^{-ix\sin\varphi+iv\varphi}$$

в формулах (3) и (4), определяющих функции $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$, не имеет особенностей в конечной части плоскости комплексного переменного φ. Поэтому в силу теоремы Коши контур интегрирования C_1 в конечной части плоскости можно произвольно деформировать при условии, что асимптоты ветвей, уходящих в бесконечность, лежат в тех же заштрихованных полосах плоскости φ, как и для контура C_1 (соответственно C_2).

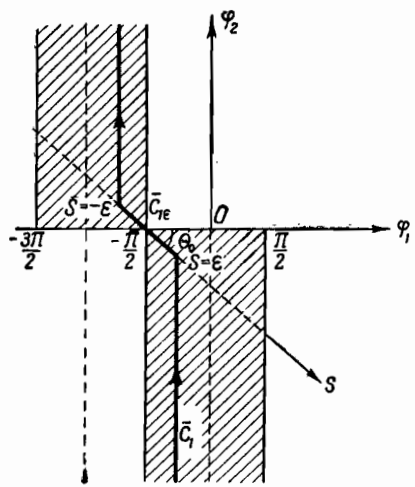


Рис. 93.

Если выбранный контур $\bar{C}_1$ целиком лежит в заштрихованной области (рис. 93), то во всех точках, где $\sin\varphi\neq 0$, ибо $\operatorname{Im}\sin\varphi<0$, подинтегральная функция экспоненциально стремится к нулю при $x\to\infty$. Если отдельные части контура проходят по незаштрихованной области, то на этих частях в подинтегральном выражении происходят сложные интерференционные явления.

Для выяснения асимптотического поведения функции $H_\nu^{(1)}(x)$ при больших значениях аргумента x целесообразно выбрать контур $\bar{C}_1$ так, чтобы он целиком лежал в заштрихованной области. Такой контур, очевидно, пройдет через точку $-\frac{\pi}{2}$, в которой действительная часть

$$\operatorname{Re}(-i\sin\varphi)=\cos\varphi_1\operatorname{sh}\varphi_2$$

обращается в нуль. При $x\to\infty$ подинтегральная функция в окрестности этой точки не стремится равномерно к нулю, поэтому главной частью интеграла по $\bar{C}_1$ при $x\to\infty$ является интеграл по малой дуге, содержащей точку $-\frac{\pi}{2}$. С этой точки зрения $\bar{C}_1$ следует выбирать так, чтобы на нем

$$e^{-ix\sin\varphi}$$

убывало наиболее быстро при удалении от точки $\varphi=-\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим «топографию» функции $e^{-ix\sin\varphi}$ в окрестности $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

Положим

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{i\theta}.$$

Тогда для малых значений s будем иметь:

$$-i\sin\varphi = i\cos(se^{i\theta}) = i\left(1 - \frac{s^2}{2}e^{2i\theta} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{s^2}{2}\sin 2\theta + i\left(1 - \frac{s^2}{2}\cos 2\theta\right) + \ldots$$

Для действительной части $\frac{s^2}{2}\sin 2\theta$ точка $s=0$ является седловой точкой; в заштрихованных полюсах эта функция отрицательна, в незаштрихованных полосах — положительна и при $s=0\left(\varphi=-\frac{\pi}{2}\right)$ обращается в нуль. Направление перевала через эту седловую точку, соответствующее $\theta_0=-\frac{\pi}{4}$, является направлением быстрейшего спуска (убывания) для функции $\frac{s^2}{2}\sin 2\theta$. Отсюда следует, что и для модуля функции $e^{-i\sin\varphi}$ точка $s=0$ является седловой, а $\theta_0=-\frac{\pi}{4}$ соответствует направлению быстрейшего спуска.

Выберем контур $\overline{C}_1$ так, чтобы он содержал прямолинейный отрезок $\overline{C}_{1\varepsilon}(-\varepsilon<s<\varepsilon)$, проходящий через точку $s=0$ под углом $\theta_0=-\frac{\pi}{4}$, а его ветви, уходящие в бесконечность, целиком лежали в заштрихованных областях. Поскольку подинтегральная функция в (3) экспоненциально убывает при удалении от точки $(s=0)\left(\varphi=-\frac{\pi}{2}\right)$, то с точностью до экспоненциально убывающего слагаемого можно написать:

$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_\varepsilon} e^{-ix\sin\varphi+i\nu\varphi}\,d\varphi \cong$$

$$\cong \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{x\left(-\frac{s^2}{2}+i\right)-i\nu\frac{\pi}{2}}\,ds\cdot e^{-\frac{i\pi}{4}},$$

так как вдоль $\overline{C}_{1\varepsilon}$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{-\frac{i\pi}{4}}, \quad d\varphi = e^{-\frac{i\pi}{4}}ds,$$

$$-i\sin\varphi \cong -\frac{s^2}{2} + i, \quad e^{i\nu\varphi} \approx e^{-i\nu\frac{\pi}{2}},$$

причем s изменяется от ε до $-\varepsilon$. Вводя обозначения

$$\xi = s\sqrt{\frac{x}{2}}, \quad d\xi = \sqrt{\frac{x}{2}}\,ds,$$

получаем:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\,e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{x}{2}}} e^{-\xi^2}\,d\xi. \tag{10}$$

Если $x\to\infty$, то [1])

$$\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{x}{2}}} e^{-\xi^2}\,d\xi \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\pi}.$$

Отсюда и из (10) следует асимптотическая формула

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i\left[x-\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]} + \ldots, \tag{11}$$

справедливая при больших значениях аргумента x.

Аналогично

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-i\left[x-\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]} + \ldots \tag{12}$$

Равенства (11) и (12) носят приближенный характер; отброшенные члены имеют порядок $x^{-3/2}$. Следующие члены разложения можно получить, если в выражениях для $-i\sin\varphi$ и $e^{i\nu\varphi}$ взять члены более высокого порядка малости относительно s.

Из формул для $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$ следуют асимптотические формулы для функций J_ν и N_ν:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right\} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x-\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right] + \ldots, \tag{13}$$

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left\{H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right\} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left[x-\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right] + \ldots \tag{14}$$

---

[1]) Ошибка, допускаемая при замене конечных пределов бесконечными, имеет экспоненциальный характер убывания, так так

$$\int_z^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi \approx \frac{e^{-z^2}}{2z}$$

Напомним, что формула (13) для J_ν при целом $\nu = n$ была доказана в § 3, п. 2.

Чтобы обосновать применимость асимптотических формул при всех значениях ν, мы должны убедиться в том, что цилиндрические функции, введенные с помощью контурных интегралов, тождественны с цилиндрическими функциями, введенными при помощи рядов. Доказательство этого утверждения мы не приводим.

В заключение отметим, что изложенный выше метод перевала или «метод седловой точки» применим для получения асимптотического разложения ряда других функций, представимых в виде контурных интегралов, а также для $H_\nu^{(1,2)}(x)$ при $\nu \approx x \to \infty$.

ЧАСТЬ II

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сферические функции были введены в связи с изучением решений уравнения Лапласа и, в частности, с теорией потенциала. В § 1 мы рассматриваем полиномы Лежандра, которые используются затем для построения шаровых и сферических функций (§ 2). Сферические функции являются весьма мощным аппаратом для решения многих задач математической физики.

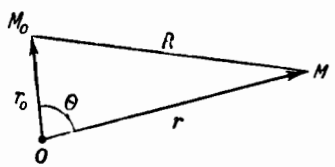


Рис. 94.

§ 1. Полиномы Лежандра

1. Производящая функция и полиномы Лежандра. Полиномы Лежандра тесно связаны с фундаментальным решением уравнения Лапласа $\frac{1}{R}$, где R — расстояние точки M от фиксированной точки M_0. Пусть r и r_0 — радиусы-векторы точек M и M_0, а θ — угол между ними (рис. 94). Очевидно, можно написать

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\theta}} = \begin{cases} \dfrac{1}{r_0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} & \text{для } r < r_0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} & \text{для } r > r_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = \cos\theta$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ и $\rho = \frac{r}{r_0} < 1$ или $\rho = \frac{r_0}{r} < 1$ (в обоих случаях ρ меньше единицы).

для больших значений z, в чем нетрудно убедиться, рассматривая отношение

$$\int_z^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi \Big/ \frac{e^{-z^2}}{2z}$$

и раскрывая неопределенность.

Функция

$$\Psi(\rho, x)=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} \qquad (0<\rho<1, \quad -1\leqslant x\leqslant 1) \tag{2}$$

называется *производящей функцией* полиномов Лежандра.

Разложим функцию $\Psi(\rho, x)$ в ряд по степеням ρ:

$$\Psi(\rho, x)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n. \tag{3}$$

Коэффициенты разложения (3) $P_n(x)$ являются полиномами n-й степени и называются полиномами Лежандра.

Этому разложению соответствует разложение потенциала

$$\frac{1}{R}=\begin{cases} \dfrac{1}{r_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r<r_0, \\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r>r_0. \end{cases} \tag{4}$$

Рассматривая при достаточно малых значениях ρ разложение

$$(1+\rho^2-2\rho x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(\rho^2-2\rho x)+\frac{3}{8}(\rho^2-2\rho x)^2+\ldots=$$

$$=1+\rho x+\rho^2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\rho^n(\alpha_0 x^n+\ldots)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n, \tag{5}$$

нетрудно убедиться в том, что каждая из функций $P_n(x)$ является полиномом степени n. В самом деле, члены, содержащие ρ^n, получаются из скобок вида $(\rho^2-2\rho x)^k$ при $k\leqslant n$, причем x^n входит только в один член при $k=n$. Если $k<n$, то коэффициент при ρ^n будет содержать x в степени меньшей n. Так как общий член полинома $(\rho^2-2\rho x)^k$ имеет вид $A_m\rho^{2m}(\rho x)^{k-m}=A_m\rho^{m+k}x^{k-m}$, где A_m — некоторый коэффициент, то четные степени x входят в коэффициенты только при четных степенях ρ и нечетные — только при нечетных степенях ρ, поэтому каждый полином $P_n(x)$ содержит либо только четные, либо только нечетные степени x, в зависимости от четности или нечетности n.

Отсюда, в частности, следует, что

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x). \tag{6}$$

При $x=1$ производящая функция $\Psi(\rho, x)$ равна

$$\frac{1}{1-\rho}=1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)\rho^n, \tag{7}$$

т. е.

$$P_n(1) = 1 \quad \text{для всех значений } n. \tag{8}$$

Из формул (6) и (8) следует, что

$$P_n(-1) = (-1)^n. \tag{9}$$

2. Рекуррентная формула. Дифференцируя $\Psi(\rho, x)$ по ρ, нетрудно получить соотношение

$$(1 - 2\rho x + \rho^2)\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - (x - \rho)\Psi = 0. \tag{10}$$

Запишем левую часть этой формулы в виде степенного ряда относительно ρ, подставив в нее ряд (3) для Ψ и ряд

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = P_1(x) + 2P_2(x)\rho + 3P_3(x)\rho^2 + \ldots$$

Коэффициент полученного ряда при ρ^n, в силу (10), должен равняться нулю при всех x:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \tag{11}$$

Это тождество есть *рекуррентная* формула, связывающая три последовательных полинома Лежандра. Она может быть использована для вычисления $P_n(x)\,(n > 2)$, если учесть, что $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$.

Вычислим коэффициент a_n при старшей степени x^n полинома $P_n(x)$. Из формулы (11) видно, что

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\,a_n. \tag{12}$$

Подставляя сюда $a_0 = 1$, последовательно определяя $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{5}{2}$ и т. д. и пользуясь методом индукции, находим:

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{n!}. \tag{13}$$

3. Уравнение Лежандра. Покажем, что $P_n(x)$ являются ограниченными решениями уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0$$

или

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

в области $-1 < x < 1$ при $\lambda = n(n+1)$.

Дифференцируя соотношение

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n$$

по x, получаем равенство

$$(1-2x\rho+\rho^2)\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\rho\Psi=0. \tag{14}$$

Комбинируя его с (10), будем иметь:

$$\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}-(x-\rho)\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0. \tag{15}$$

Отсюда, аналогично предыдущему, получаем вторую рекуррентную формулу

$$nP_n(x)-xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)=0. \tag{16}$$

Подставим в тождество

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\Psi)=\rho\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}+\Psi\right) \tag{17}$$

выражения для $\rho\Psi$ и $\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}$, найденные из (14) и (15); это даст

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\Psi)-(1-\rho x)\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0. \tag{18}$$

Разложим левую часть в степенной ряд относительно ρ и приравняем нулю коэффициент при ρ^n; это дает третью рекуррентную формулу

$$nP_{n-1}(x)-P'_n(x)+xP'_{n-1}(x)=0. \tag{19}$$

Исключим из (16) и (19) $P_{n-1}(x)$ и $P'_{n-1}(x)$. Для этого подставим в (19) выражение для $P'_{n-1}(x)$ из (16), затем продифференцируем полученное соотношение по x и еще раз воспользуемся формулой (16). В результате мы получаем уравнение

$$(1-x^2)P''_n(x)-2xP'_n(x)+n(n+1)P_n(x)=0. \tag{20}$$

Таким образом, полиномы Лежандра являются собственными функциями следующей краевой задачи:

найти такие значения λ, для которых в области $-1<x<1$ существуют нетривиальные решения уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0, \tag{21}$$

ограниченные при $x=\pm1$ и удовлетворяющие условию нормировки $P_n(1)=1$, — соответствующими собственным значениям $\lambda_n=n(n+1)$.

4. Ортогональность полиномов Лежандра. Уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0 \tag{21}$$

является частным случаем рассмотренного на стр. 573 уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\,\frac{dy}{dx}\right]-q(x)\,y+\lambda\rho y=0 \tag{22}$$

при $q=0$, $\rho=1$, $k(x)=1-x^2$. Поэтому к нему применима развитая для уравнения (22) общая теория. Из этой теории следует, что

1) полиномы Лежандра разных порядков ортогональны между собой на интервале $(-1, 1)$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad m\neq n; \tag{23}$$

2) второе линейно независимое решение уравнения Лежандра при $\lambda=n(n+1)$ обращается в бесконечность при $x=\pm 1$ как $\log|1\mp x|$.

Система ортогональных полиномов, как известно, является *замкнутой* [1]). Отсюда вытекает, что уравнение Лежандра не имеет нетривиальных ограниченных решений $P_n(x)$ ни при каком $\lambda\neq n(n+1)$. В самом деле, если бы существовало решение $y_n(x)$ для $\lambda\neq n(n+1)$, то оно было бы ортогонально ко всем $P_n(x)$. Отсюда в силу замкнутости системы ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}$ следует, что

$$y_n(x)\equiv 0.$$

---

[1]) Система ортогональных функций $\{\varphi_n\}$ называется *замкнутой*, если не существует непрерывной функции, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем функциям данной системы.

Система ортогональных функций $\{\varphi_n\}$ называется *полной* в промежутке (a, b), если любую непрерывную функцию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации функций $\{\varphi_n\}$. Иными словами, каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда можно указать такую линейную комбинацию функций

$$S_n=c_1\varphi_1+\ldots+c_n\varphi_n,$$

что

$$\int_a^b [f(x)-S_n(x)]^2\,dx<\varepsilon.$$

Для полной системы функций $\{\varphi_n\}$ имеет место соотношение

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2,$$

где f_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$

$$\left(f_n=\frac{1}{N_n}\int_a^b f(\xi)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi\right).$$

Замкнутость есть следствие полноты. Пусть дана некоторая полная система ортогональных функций $\{\varphi_n(x)\}$. Допустим, что суще-

5. Норма полиномов Лежандра. Вычислим норму

$$N_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx. \tag{24}$$

Рассмотрим полином

$$Q(x) = P_n(x) - \frac{a_n}{a_{n-1}}\,xP_{n-1}(x), \tag{25}$$

где a_n — коэффициент при x^n у $P_n(x)$, a_{n-1} — коэффициент при x^{n-1} у $P_{n-1}(x)$. Полином $Q(x)$ является полиномом степени $n-2$ и может быть представлен в виде

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n-2} A_k P_k(x),$$

где коэффициенты A_k определяются последовательно, начиная с $k=n-1$, при помощи сравнения коэффициентов при старших степенях $P_k(x)$.

Отсюда следует, что $Q(x)$ ортогонально к $P_n(x)$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,Q(x)\,dx = 0. \tag{26}$$

Поэтому

$$N_n = \int_{-1}^{1} P_n(x)\left[\frac{a_n}{a_{n-1}}\,xP_{n-1}(x) + Q(x)\right]dx =$$

$$= \frac{a_n}{a_{n-1}} \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)\,dx,$$

ствует непрерывная функция $f(x) \not\equiv 0$, ортогональная ко всем $\varphi_n(x)$. Тогда в силу полноты системы функций $\{\varphi_n\}$ должно иметь место равенство

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2 = 0,$$

так как $f_n = 0$ по предположению. Отсюда следует, что $f \equiv 0$, что противоречит сделанному допущению, т. е. система $\{\varphi_n(x)\}$ является замкнутой.

Полнота и, тем самым, замкнутость системы ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}$ является следствием *теоремы Вейерштрасса* о возможности равномерной аппроксимации непрерывной функции при помощи полиномов: какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$, заданная в промежутке (a, b), и каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такой полином $Q_n(x)$, что

$$|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon. \tag{A}$$

В самом деле, представляя полином $Q_n(x)$ в виде линейной комбинации ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}$ и пользуясь неравенством (A), мы получим условие полноты системы ортогональных полиномов.

выражая из первой рекуррентной формулы

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x),$$

будем иметь

$$N_n = \frac{n}{2n+1} \frac{a_n}{a_{n-1}} N_{n-1}. \tag{27}$$

Так как, в силу формулы (12),

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-1}{n},$$

то

$$N_n = \frac{2n-1}{2n+1} N_{n-1}. \tag{28}$$

Учитывая, что

$$P_0(x) = 1, \quad N_0 = 2,$$

последовательно найдем по формуле (28)

$$N_2 = \frac{2}{3}, \quad N_3 = \frac{2}{5}$$

и по индукции

$$N_n = \frac{2}{2n+1}. \tag{29}$$

Таким образом, полиномы Лежандра $P_n(x)$ образуют ортогональную систему с нормой $N_n = \frac{2}{2n+1}$:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases} \tag{30}$$

6. Дифференциальная формула для полиномов Лежандра. Докажем, что полином Лежандра $P_n(x)$ может быть представлен в виде

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]. \tag{31}$$

Эта дифференциальная формула часто называется формулой Родрига.

Для доказательства формулы (31) достаточно установить, что

1) $\overline{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$ является решением уравнения Лежандра;

2) $\overline{P}_n(1) = 1$.

Обозначая

$$u = (x^2-1)^n$$

и вычисляя

$$u' = 2nx(x^2-1)^{n-1},$$

будем иметь

$$(x^2-1)u'-2nxu=0.$$

Дифференцируя это уравнение $(m+1)$ раз, получим

$$(x^2-1)u^{(m+2)}-(2n-2m-2)xu^{(m+1)}+$$
$$+[m(m+1)-2n(m+1)]u^{(m)}=0.$$

Полагая $m=n$ и замечая, что при этом выражение в квадратных скобках равно $n(n+1)$, получаем:

$$(1-x^2)u^{(n+2)}-2xu^{n+1}+n(n+1)u^{(n)}=0,$$

т. е. функция

$$\overline{P}_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n u}{dx^n}$$

удовлетворяет уравнению Лежандра

$$(1-x^2)\overline{P}_n''-2x\overline{P}_n'+n(n+1)\overline{P}_n=0.$$

Следовательно,

$$\overline{P}_n(x)=C_nP_n(x),$$

где C — некоторая постоянная.

Покажем теперь, что $\overline{P}_n(1)=1$.

Рассмотрим производную

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2-1)^n\right]=\frac{d^m}{dx^m}[(x+1)^n(x-1)^n]=c_0(x+1)^{n-m}(x-1)^n+$$
$$+c_1(x+1)^{n-m+1}(x-1)^{n-1}+\ldots+c_n(x+1)^n(x-1)^{n-m}.$$

Если $m<n$, то в точках $x=\pm 1$ все слагаемые обращаются в нуль:

$$\left\{\frac{d^m}{dx^m}[(x^2-1)^n]\right\}_{x=\pm 1}=0 \qquad (m<n).$$

Если же $m=n$, то

$$\left\{\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\right\}_{x=1}=2^n n!,$$

откуда и следует, что

$$\overline{P}_n(1)=1.$$

Полагая в равенстве (32) $x=1$, получаем:

$$C_n=1,$$

т. е.

$$\overline{P}_n(x)\equiv P_n(x).$$

Тем самым установлена формула

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

С помощью этой формулы можно доказать следующие важные свойства полиномов Лежандра.

Полином Лежандра $P_n(x)$ имеет n нулей внутри интервала $(-1, +1)$, а его производная k-го порядка $\frac{d^k}{dx^k}P_n(x)$ $(k \leqslant n)$ имеет $n-k$ нулей внутри интервала $(-1, +1)$ и не обращается в нуль на его концах.

Действительно, функция $(t^2-1)^n$ обращается в нуль на концах интервала $(-1, +1)$. Ее первая производная обращается в нуль на концах интервала и по теореме о нуле производной имеет хотя бы один нуль внутри интервала. Вторая производная имеет, по крайней мере, два нуля внутри интервала и обращается в нуль на его концах (рис. 95). Продолжая рассуждения, мы придем к заключению, что n-я производная имеет, по крайней мере, n нулей в промежутке $(-1, +1)$ или точнее, ровно n нулей, так как она представляется полиномом n-й степени. Первая часть утверждения доказана. Производная $\frac{d}{dx}P_n(x)$ по той же теореме должна иметь, по крайней мере, $n-1$ нуль внутри интервала; но так как эта производная есть полином $(n-1)$-й степени, то она имеет ровно $n-1$ корень внутри интервала. Аналогично функция $\frac{d^k}{dx^k}P_n$ имеет $n-k$ корней внутри интервала. Лемма доказана.

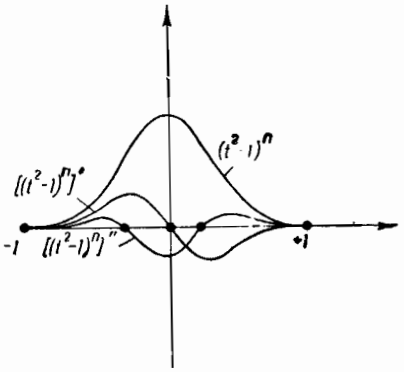


Рис. 95.

7. Интегральная формула и ограниченность полиномов Лежандра. Полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ являются ограниченными функциями для всех значений аргумента $-1 \leqslant \mu \leqslant +1$.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a - ib\cos\varphi},$$

где a и b — постоянные, и найдем его значение

$$I = a\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2\cos^2\varphi} + ib\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{a^2 + b^2\cos^2\varphi} =$$

$$= a\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2\cos^2\varphi} + ib\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\psi\, d\psi}{a^2 + b^2\sin^2\psi} = I_1 + I_2 \qquad (32)$$

$$\left(\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Интеграл I_2 равен нулю, так как подинтегральная функция является нечетной. Вычисления интеграла I_1 дают:

$$I_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{при} \quad a>0, \\ -\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{при} \quad a<0. \end{cases} \tag{32'}$$

Полагая затем

$$a = 1-x\mu; \quad b = x\sqrt{1-\mu^2} \qquad (0<x<1; \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1)$$

и пользуясь формулой (32'), находим:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1-x\left(\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\mu}}. \tag{33}$$

Справа стоит производящая функция, с помощью которой определяются полиномы Лежандра

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\mu).$$

Разложим подинтегральную функцию в ряд

$$\frac{1}{1-x\left(\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\right)^n. \tag{34}$$

Так как

$$\left|x\left(\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\right)\right| = x\sqrt{\mu^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} \leqslant x < 1,$$

то ряд (34) сходится равномерно и его можно интегрировать почленно:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{1-x\left(\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\right)} d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi$$

или в силу формул (3) и (17)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi.$$

Отсюда получаем представление полиномов Лежандра в виде интеграла

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi \qquad (-1 \leqslant \mu \leqslant 1). \tag{35}$$

Если $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, то

$$|\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi| = \sqrt{\mu^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} \leqslant 1$$

и для $P_n(\mu)$ имеет место неравенство

$$|P_n(\mu)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi = 1 \quad \text{при} \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1,$$

причем знак равенства имеет место только при $\mu = \pm 1$.

Тем самым доказана ограниченность полиномов Лежандра

$$|P_n(\mu)| \leqslant 1 \tag{36}$$

по всей области изменения μ между -1 и $+1$.

8. Присоединенные функции. Наряду с полиномами Лежандра $P_n(x)$ большую роль играют *присоединенные функции* $P_n^{(m)}(x)$, являющиеся ограниченными в промежутке $(-1, +1)$ решениями уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\cdot\frac{dz}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)z = 0 \tag{37}$$

или

$$(1-x^2)z'' - 2xz' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)z = 0. \tag{37'}$$

Присоединенные функции могут быть определены через полиномы Лежандра

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x). \tag{38}$$

Установим эту формулу.

Уравнение присоединенных функций (37') подстановкой

$$z = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}Y(x)$$

приводится к виду

$$(1-x^2)Y'' - 2(m+1)xY' + [\lambda - m(m+1)]Y = 0. \tag{39}$$

Покажем, что уравнению (39) удовлетворяет m-ая производная полинома Лежандра. В самом деле, дифференцируя m раз по x уравнение Лежандра (21) и производя упрощения, получим:

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + [\lambda - m(m+1)]\frac{d^m y}{dx^m} = 0. \tag{40}$$

Сравнивая этот результат с формулой (39), видим, что частным решением уравнения (39) является функция

$$Y(x) = \frac{d^m y(x)}{dx^m},$$

а следовательно, выражение

$$Z=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}Y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}y(x) \tag{41}$$

удовлетворяет уравнению присоединенных функций и ограничено при $x=\pm 1$.

При

$$\lambda=n(n+1) \quad \text{и} \quad y=P_n(x)$$

получаем формулу (41) для присоединенной функции m-го порядка. Из этой формулы видно, что $P_n^{(m)}(x)$ отлична от нуля лишь при $m\leqslant n$.

Присоединенные функции согласно общей теореме на стр. 573 образуют ортогональную систему. Вычислим норму присоединенных функций. При этом попутно будет доказана их ортогональность.

Умножим уравнение (40) на $(1-x^2)^m$ и представим результат в виде

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{m+1}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_n\right]=-[\lambda-m(m+1)](1-x^2)^m\frac{d^mP}{dx^m}$$

или после замены $m'=m+1$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{m'}\frac{d^{m'}P_n}{dx^{m'}}\right]=-[\lambda-m'(m'-1)](1-x^2)^{m'-1}\frac{d^{m'-1}P_n}{dx^{m'-1}}. \tag{42}$$

Введем обозначение

$$L^m_{n,\,k}=\int_{-1}^{+1}P_n^{(m)}(x)\,P_k^{(m)}(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^m\frac{d^mP_n}{dx^m}\frac{d^mP_k}{dx^m}\,dx.$$

Интегрируя правую часть по частям, получим:

$$L^m_{n,\,k}=\left[\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d^mP_n}{dx^m}(1-x^2)^m\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n}{dx^m}\right]dx.$$

Подстановка обращается в нуль, а интегральный член в силу дифференциального уравнения (42) преобразуется к виду

$$L^m_{n,\,k}=[n(n+1)-m(m-1)]\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_k\,dx=$$

$$=(n+m)(n-m+1)L^{m-1}_{n,\,k}.$$

Продолжая аналогичные преобразования, приходим к формуле

$$L^m_{n,k} = (n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)n\ldots(n-m+1)L^0_{n,k} = \frac{(n+m)!}{n!}\frac{n!}{(n-m)!}L^0_{n,k} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}L^0_{n,k}.$$

Отсюда, пользуясь равенством (30)

$$L^0_{n,k} = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } k = n, \end{cases}$$

окончательно получаем:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(x)P_k^{(m)}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{при } k = n, \end{cases} \tag{43}$$

т. е. присоединенные функции ортогональны между собой и имеют норму

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^{(m)}(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{43'}$$

9. Замкнутость системы присоединенных функций. Докажем, что система присоединенных функций $\{P_n^{(m)}(x)\}$ полностью исчерпывает все ограниченные решения уравнения (37).

В самом деле, при $\lambda = n(n+1)$ решение, линейно независимое с $P_n^{(m)}(x)$, обращается в бесконечность при $x = \pm 1$. Ограниченное же решение при $\lambda \neq n(n+1)$ должно быть ортогонально ко всем $P_n^{(m)}(x)$.

Для того чтобы убедиться, что не существует ограниченных решений уравнения (37), отличных от $P_n^{(m)}(x)$, достаточно установить, что система присоединенных функций $\{P_n^{(m)}(x)\}$ замкнута, т. е. что не существует никакой непрерывной функции, не равной тождественно нулю, которая была бы ортогональна ко всем функциям системы.

Лемма. Любая функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ и обращающаяся в нуль на его концах при $x = 1$ и $x = -1$, может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности полиномами из присоединенных функций любого порядка m.

Заметим, прежде всего, что производные полиномов Лежандра $\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$ являются полиномами степени $n-m$. Поскольку любой полином по степеням x может быть представлен в виде линейной комбинации этих полиномов, то, в силу теоремы Вейерштрасса, любая

функция $\overline{f}(x)$, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$, может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности при помощи линейной комбинации $\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$:

$$\left|\overline{f}(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n_0 > N(\varepsilon). \tag{44}$$

Умножая это неравенство на $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$, получаем, что

$$\left|f_1(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_m P_n^{(m)}(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n_0 > N(\varepsilon), \tag{45}$$

где

$$f_1(x) = \overline{f}(x)(1-x^2)^{\frac{m}{2}}, \tag{46}$$

т. е. любая функция $f(x)$, представленная в виде (46), где $\overline{f}(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$, может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности линейной комбинацией присоединенных функций.

Будем говорить, что функция $f_1(x)$ принадлежит классу H_1, если она непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и тождественно равна нулю в малых окрестностях точек $x=-1$ и $x=1$

$$f_1(x) = 0 \quad \text{при} \quad |1-\delta| \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Так как для каждой функции $f_1(x)$ класса H_1 функция

$$\overline{f}(x) = \frac{f_1(x)}{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}$$

является непрерывной на $[-1, 1]$, то тем самым лемма доказана для функций класса H_1.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[-1, 1]$, обращающуюся в нуль на концах. Очевидно, что эту функцию можно равномерно аппроксимировать при помощи функции $f_1(x)$ из класса H_1 с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|f(x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аппроксимируя $f_1(x)$ полиномом из присоединенных функций с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$

$$|f_1(x) - \Sigma_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Sigma_1(x) = \sum_{n=m}^{n_0} c_n P_n^{(m)}(x),$$

получаем неравенство

$$|f(x) - \Sigma_1(x)| < \varepsilon,$$

которое и доказывает лемму.

С помощью этой леммы легко доказывается полнота системы присоединенных функций, а тем самым и ее замкнутость.

Напомним, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной на некотором отрезке $[a, b]$, если любую функцию $F(x)$, непрерывную на $[a, b]$, можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации этих функций

$$\int_a^b [F(x) - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \varphi_n(x)]^2 dx < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n_0 > N(\varepsilon).$$

Очевидно, что всякую функцию, непрерывную на отрезке $[-1, 1]$, можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи функции $f(x)$, непрерывной на $[-1, 1]$ и обращающейся в нуль при $x = \pm 1$:

$$\int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon'.$$

Беря линейную комбинацию присоединенных функций, равномерно аппроксимирующих функцию $f(x)$

$$|f(x) - \Sigma_1(x)| < \varepsilon'',$$

и пользуясь неравенством

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

получим:

$$\int_{-1}^{1} [F(x) - \Sigma_1]^2 dx \leqslant 2 \int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2 dx + 2 \int_{-1}^{1} [f(x) - \Sigma_1]^2 dx < \varepsilon$$

$$(\text{если } 2\varepsilon + 4(\varepsilon'')^2 \leqslant \varepsilon),$$

что доказывает полноту, а тем самым и замкнутость системы присоединенных функций.

§ 2. Гармонические полиномы и сферические функции

1. Гармонические полиномы. Гармоническим полиномом называется полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{1}$$

Нетрудно убедиться, что первые два однородных гармонических полинома имеют вид

$$u_1(x, y, z) = Ax + By + Cz,$$

$$u_2(x, y, z) = Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2 + Cxy + Dxz + Eyz,$$

где A, B, C — произвольные коэффициенты

Определим число линейно-независимых однородных гармонических полиномов степени n

$$u_n = \sum_{p+q+r=n} \alpha_{p,q,r} x^p y^q z^r. \tag{2}$$

Целая однородная функция степени n имеет $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ коэффициентов. Действительно, правую часть равенства (2) можно представить в виде

$$\alpha_{0,0,n} z^n + (\alpha_{1,0,n-1} x + \alpha_{0,1,n-1} y) z^{n-1} \ldots +$$
$$+ (\alpha_{n-1,0,1} x^{n-1} + \alpha_{n-2,1,1} x^{n-2} y + \ldots + \alpha_{0,n-1,1} y^{n-1}) z +$$
$$+ (\alpha_{n,0,0} x^n + \alpha_{n-1,1,0} x^{n-1} y + \ldots + \alpha_{0,n,0} y^n) z^0.$$

При z^n имеется один коэффициент, при z^{n-1} — два, ..., при z имеем n коэффициентов, а при z^0 число коэффициентов равняется $(n+1)$, так что общее число коэффициентов равно

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{3}$$

Уравнение (1) налагает на коэффициенты $\frac{n(n-1)}{2}$ линейных однородных соотношений, так как ΔU_n — однородная функция степени $n-2$. Таким образом, полином должен иметь не менее чем $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n+1$ независимых коэффициентов. Если бы указанные $\frac{(n-1)n}{2}$ соотношения оказались линейно-зависимыми, то число независимых коэффициентов было бы больше $2n+1$.

Покажем, что только $2n+1$ коэффициентов линейно независимы. Коэффициенты $\alpha_{p,q,r}$ однородного полинома можно представить в виде

$$\alpha_{p,q,r} = \frac{1}{p!\,q!\,r!} \frac{\partial^n u_n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}.$$

Если u_n — гармонический полином, то $\alpha_{p,q,r}$ при $r \geqslant 2$ можно выразить через коэффициенты $\alpha_{p,q,0}$ и $\alpha_{p,q,1}$, число которых в точности равно $2n+1$.

Действительно,

$$\alpha_{p,q,r} = \frac{1}{p!\,q!\,r!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r-2}} \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{p!\,q!\,r!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r-2}} \left[-\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right] =$$
$$= \beta_1 \alpha_{p+2,q,r-2} + \beta_2 \alpha_{p,q+2,r-2}.$$

Поступая аналогично с коэффициентами $\alpha_{p+2,q,r-2}$ и $\alpha_{p,q+2,r-2}$, мы в конце концов выразим $\alpha_{p,q,r}$ через коэффициенты типа $\alpha_{p,q,0}$ $(p+q=n)$ и $\alpha_{p,q,1}$ $(p+q+1=n)$. Число коэффициентов вида $\alpha_{p,q,0}$ равно $(n+1)$, а $\alpha_{p,q,r}$ — n. Таким образом, общее число линейно-

независимых коэффициентов, а следовательно, и независимых гармонических полиномов n-й степени в точности равно $2n+1$.

Однородные гармонические полиномы называются *шаровыми функциями*.

2. Сферические функции. Сферические функции проще всего могут быть введены при решении уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных.

Будем искать решение уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \qquad (1)$$

полагая

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\,Y(\theta,\varphi).$$

Для определения $R(r)$ получаем уравнение Эйлера

$$r^2R''+2rR'-\lambda R=0, \qquad (4)$$

а для определения $Y(\theta,\varphi)$ — уравнение

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y+\lambda Y=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0 \qquad (5)$$

с дополнительным условием ограниченности функции Y на всей сфере.

В частности, функция $Y(\theta,\varphi)$ удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &Y(\theta,\varphi+2\pi)=Y(\theta,\varphi),\\ &|Y(0,\varphi)|<\infty,\qquad |Y(\pi,\varphi)|<\infty. \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

Ограниченные решения уравнения (5), обладающие непрерывными до 2-го порядка производными, называются *сферическими функциями*.

Решение задачи для $Y(\theta,\varphi)$ ищем также методом разделения переменных, полагая

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi).$$

Функция $\Phi(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi''+\mu\Phi=0$$

и условию периодичности

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi).$$

Задача для $\Phi(\varphi)$ имеет решение лишь при целом $\mu=m^2$ и линейно-независимыми решениями являются функции $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$. Функция $\Theta(\theta)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

с условиями ограниченности при $\theta=0$ и $\theta=\pi$.

Вводя переменную

$$t = \cos\theta$$

и обозначая $X(t)|_{t=\cos\theta} = X(\cos\theta) = \Theta(\theta)$, получим для $X(t)$ уравнение присоединенных функций

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dX}{dt}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2}\right)X = 0 \qquad (-1 < t < 1). \quad (6)$$

Уравнение (6), как мы уже видели в § 1, допускает ограниченные решения лишь при $\lambda = n(n+1)$

$$X(t)|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(t)|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(\cos\theta) = \Theta(\theta),$$

где $m \leqslant n$.

Выпишем полученную систему сферических функций n-го порядка. Условимся приписывать отрицательный верхний индекс тем функциям, которые содержат $\cos k\varphi$, и положительный — тем функциям, которые содержат $\sin k\varphi$. Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{array}{ll} m = 0 & Y_n^{(0)} = P_n(\cos\theta), \\ m = 1 & Y_n^{(-1)}(\theta, \varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi, \quad Y_n^{(1)}(\theta, \varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ m = k & Y_n^{(-k)}(\theta, \varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\varphi, \quad Y_n^{(k)}(\theta, \varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\varphi \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Число различных сферических функций n-го порядка $Y_n^{(m)}$ равно $2n+1$. Линейная комбинация этих $2n+1$ сферических функций (7)

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) P_n^{(m)}\cos(\theta) \qquad (7^*)$$

или

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^{n} C_{mn} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi),$$

где

$$C_{mn} = \begin{cases} A_{nm} & \text{при} \quad m \leqslant 0, \\ B_{nm} & \text{при} \quad m > 0 \end{cases}$$

является также сферической функцией.

Функции $Y_n^{(0)} = P_n(\cos\theta)$ не зависят от φ и называются *зональными*. Так как $P_n(t)$ в силу леммы § 1, п. 6 имеет ровно n нулей внутри промежутка $(-1, +1)$, то сфера разделяется на $(n+1)$ широтных зон, внутри которых зональная функция сохраняет знак.

Рассмотрим поведение функции

$$Y_n^{(\pm k)} = \sin^k\theta \left[\frac{d^k}{dt^k} P_n(t)\right]_{t=\cos\theta} \begin{cases} \sin k\varphi, \\ \cos k\varphi \end{cases}$$

на сфере. Так как $\sin\theta$ обращается в нуль на полюсах, $\sin k\varphi$ или $\cos k\varphi$ обращаются в нуль на $2k$ меридианах, а $\frac{d^k}{dt^k}P_n(t)$ в силу той же леммы — на $(n-k)$ широтах, то вся сфера разбивается на клетки, в которых $Y_n^{(\pm k)}$ сохраняет постоянный знак (рис. 96). Функции $Y^{(\pm k)}$ называются *тессеральными*.

Вернемся теперь к отысканию функции R. Будем искать функцию $R(r)$ в виде

$$R = r^\sigma.$$

Подставляя искомую форму решения в уравнение (4), получим характеристическое уравнение для определения σ:

$$\sigma(\sigma+1) - n(n+1) = 0,$$

откуда находим два значения σ:

$$\sigma = n \quad \text{и} \quad \sigma = -(n+1).$$

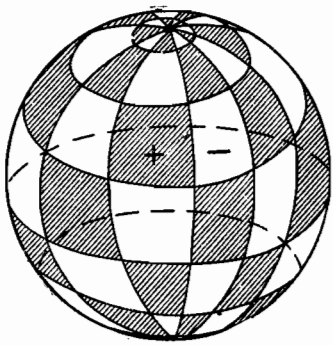


Рис. 96.

Следовательно, частными решениями уравнения Лапласа являются функции

$$r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \tag{7'}$$

$$r^{-(n+1)} Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \tag{7''}$$

первая из которых, очевидно, соответствует решению внутренних задач, а вторая — внешних задач.

Покажем, что найденные решения уравнения Лапласа являются однородными полиномами n-й степени. Общий член, например, в формуле (7') можно записать так:

$$v = r^n \sin^k\theta \cos k\varphi \cos^{n-k-2q}\theta,$$

где q изменяется от 0 до $\frac{n-k}{2}$. Функцию v можно представить в виде произведения трех полиномов:

$$v = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3,$$

где

$$u_1 = r^k \sin^k\theta \cos k\varphi = \operatorname{Re}[r\sin\theta e^{i\varphi}]^k = \operatorname{Re}[(x+iy)^k],$$

$$u_2 = r^{n-k-2q}\cos^{n-k-2q}\theta = z^{n-k-2q},$$

$$u_3 = r^{2q} = (x^2+y^2+z^2)^q.$$

Отсюда ясно, что функция $r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)$ есть однородный гармонический полином степени $k+n-k-2q+2q=n$.

Очевидно, что сферические функции являются значениями шаровых функций (7') и (7'') на сфере радиуса единица.

3. Ортогональность системы сферических функций. Докажем, что сферические функции, соответствующие различным значениям λ, ортогональны на поверхности сферы Σ. Пусть Y_1 и Y_2 удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0; \qquad \Delta_{\theta,\varphi} Y_2 + \lambda_2 Y_2 = 0, \tag{5'}$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Нетрудно видеть, что имеет место формула

$$\int\int_{\Sigma} Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 \, d\Omega = -\int\int_{\Sigma}\left\{\frac{\partial Y_1}{\partial\theta}\frac{\partial Y_2}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial Y_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial Y_2}{\partial\varphi}\right\} d\Omega \tag{8}$$

$$(d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi),$$

легко получаемая интегрированием по частям.

На поверхности сферы

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_\varphi,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$

так что

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$$

и формулу (8) можно записать в виде

$$\int\int_{\Sigma} Y_2 \Delta Y_1 \, d\Omega = -\int\int_{\Sigma} \operatorname{grad} Y_1 \cdot \operatorname{grad} Y_2 \cdot d\Omega.$$

Меняя местами в формуле (8) функции Y_1 и Y_2 и вычитая полученную формулу из формулы (8), будем иметь:

$$J = \int\int_{\Sigma}\{Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 - Y_1 \Delta_{\theta,\varphi} Y_2\}\, d\Omega = 0. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) являются формулами Грина для оператора сферических функций.

Из формулы (9) легко следует ортогональность функций Y_1 и Y_2. В самом деле, пользуясь уравнениями (5), получим из формулы (9)

$$J = (\lambda_2 - \lambda_1)\int\int_{\Sigma} Y_1 Y_2 \, d\Omega = 0,$$

откуда при $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\int\int_{\Sigma} Y_1 Y_2 \, d\Omega = 0$$

или

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_1(\theta, \varphi)\, Y_2(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0.$$

Тем самым доказана ортогональность сферических функций, соответствующих разным λ.

Выше мы получили для $\lambda = n(n+1)$ систему $2n+1$ сферических функций n-го порядка. Докажем, что и эти сферические функции ортогональны между собой на сфере.

Пусть $Y_n^{(k_1)}$ и $Y_n^{(k_2)}$ — две сферические функции. Интегрируя их произведение и пользуясь формулами (7) и (26) § 1, получим:

$$\int_\Sigma\int Y_n^{(k_1)}\, Y_n^{(k_2)}\, d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^{(k_1)}(\theta, \varphi)\, Y_n^{(k_2)}(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k_1\varphi \cos k_2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} P_n^{(k_1)}(\cos\theta)\, P_n^{(k_2)}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k_1\varphi \cos k_2\varphi\, d\varphi \int_{-1}^{+1} P_n^{(k_1)}(t)\, P_n^{(k_2)}(t)\, dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } k_1 \neq k_2, \\ \dfrac{2\pi}{2n+1}\,\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} & \text{при } k_1 = k_2 = k \neq 0, \\ 2\pi \cdot \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } k_1 = k_2 = 0, \end{cases} \qquad (8')$$

т. е. сферические функции, определяемые формулой (7), образуют ортогональную систему в области $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ *и имеют норму, равную*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)]^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{2}{2n+1}\,\pi\varepsilon_k\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad (8'')$$

где $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_k = 1$ при $k > 0$.

Предполагая возможность разложения произвольной функции $f(\theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям (возможность такого разложения для дважды непрерывно дифференцируемой функции будет подробно обоснована ниже, п. 5), допускающий почленное интегрирование, получим

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\, P_n^{(m)}(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi),$$

где A_{nm} и B_{nm} — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\, P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{N_{nm}}, \\ B_{nm} &= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\, P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{N_{nm}}, \end{aligned}\right\}$$

$$N_{nm} = \frac{2\pi\varepsilon_m}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \qquad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m=0, \\ 1 & \text{при } m>0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа можно представить в вид

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta,\varphi)$$

для внутренней краевой задачи или

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\varphi)$$

для внешней краевой задачи.

Если на сфере радиуса a задано граничное условие $u|_\Sigma = f(\theta,\varphi)$, то мы получаем:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi).$$

4. Полнота системы сферических функций. Докажем полноту системы сферических функций, определяемых формулой (7). Докажем сперва, что любая функция $f(\theta,\varphi)$, имеющая непрерывные вторые производные, может быть равномерно аппроксимирована некоторым полиномом из сферических функций.

Рассмотрим разложение такой функции в ряд Фурье

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}[A_m(\theta)\cos m\varphi + B_m(\theta)\sin m\varphi].$$

Используя ограниченность второй производной, легко оценить коэффициенты A_m и B_m этого разложения

$$|A_m| < \frac{M}{m^2}; \quad |B_m| < \frac{M}{m^2},$$

где

$$M = \max|f_{\varphi\varphi}|.$$

Отсюда следует, что для остаточного члена ряда Фурье имеет место равномерная оценка

$$\left|f - \sum_{m=0}^{m_0} [A_m(\theta)\cos m\varphi + B_m(\theta)\sin m\varphi]\right| = \\ = |R_{m_0}| < 2M \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \varepsilon', \qquad (10)$$

где $\varepsilon' > 0$ — любое наперед заданное число.

На основании п. 8 § 1 коэффициенты Фурье $A_m(\theta)$ и $B_m(\theta)$, являющиеся непрерывными функциями θ, обращающимися в нуль при θ, равном 0 и π, могут быть равномерно аппроксимированы линейными комбинациями присоединенных функций m-го порядка

$$\left|A_m(\theta) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k^{(m)}(\cos\theta)\right| < \frac{\varepsilon'}{2m_0+1},$$

$$\left|B_m(\theta) - \sum_{k=0}^{n} b_k P_k^{(m)}(\cos\theta)\right| < \frac{\varepsilon'}{2m_0+1}. \qquad (11)$$

Тогда из неравенств (10) и (11) будет следовать:

$$\left|f(\theta, \varphi) - \sum_{m=0}^{m_0}\sum_{k=0}^{n} [a_k P_k^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi + \right. \\ \left. + b_k P_k^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi]\right| < 2\varepsilon', \qquad (12)$$

что и доказывает возможность равномерной аппроксимации любой дважды дифференцируемой функции $f(\theta, \varphi)$ полиномом из сферических функций. Отсюда следует, что и любую непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать полиномом сферических функций, что и доказывает полноту системы функций, определяемых формулой (7). Из полноты этой системы следует ее замкнутость.

Таким образом, доказано, что уравнение сферических функций не имеет ограниченных решений при $\lambda \neq n(n+1)$ и что всякая сферическая функция n-го порядка ($\lambda = n(n+1)$) представима формулой (7*).

5. Разложение по сферическим функциям. Сферические функции являются собственными функциями уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \lambda u = 0 \text{ или } \Delta_{\theta,\varphi} u + \lambda u = 0 \qquad (13)$$

на поверхности сферы $\Sigma(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ при дополнительных условиях ограниченности.

Для обоснования разложимости произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(\theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям

перейдем к соответствующему интегральному уравнению. С этой целью построим функцию источника уравнения

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{14}$$

при дополнительном условии ограниченности решения для $\theta = 0, \pi$.

Как было отмечено выше

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = (\operatorname{div}\ \operatorname{grad} u)_{\theta,\varphi} \tag{15}$$

на поверхности сферы. Уравнение (14) можно рассматривать как уравнение стационарного распределения температуры или стационарного электрического тока на поверхности сферы.

С этой точки зрения понятно, что невозможно построить решение однородного уравнения

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = 0 \tag{16}$$

с особенностью в одной только точке, так как для возможности существования стационарной температуры необходимо, чтобы сумма источников и стоков равнялась нулю.

Введем обобщенную функцию источника, которая в нашем случае должна быть решением уравнения

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = q \qquad \left(q = \frac{1}{4\pi}\right), \tag{17}$$

регулярным всюду, кроме полюса $\theta = 0$, где она должна иметь логарифмическую особенность. Правая часть уравнения (17) означает плотность отрицательных источников (стоков) тепла, равномерно распределенных по поверхности сферы, так что

$$\int\int_{\Sigma} q\, d\sigma = 1. \tag{18}$$

Предполагая, что искомая функция источника u является функцией только одного переменного θ, получаем для нее обыкновенное дифференциальное уравнение, решая которое найдем:

$$u = -q \ln\sin\theta + c \ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{19}$$

Требуя, чтобы u имело особенность только при $\theta = 0$, получаем:

$$c = -q$$

и

$$u = -2q \ln\sin\frac{\theta}{2} - q\ln 2.$$

Так как $u_1 = \text{const}$ является решением однородного уравнения, то функция источника G определена с точностью до произвольной по-

стоянной. Поэтому мы можем написать:

$$G = -\frac{1}{2\pi}\ln\sin\frac{\theta}{2}. \tag{20}$$

Если источник находится в некоторой точке M_0, то функция источника имеет вид

$$G(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sin\frac{\gamma_{MM_0}}{2}, \tag{21}$$

где γ_{MM} — угловое расстояние между точками $M_0(\theta_0, \varphi_0)$ и $M(\theta, \varphi)$ [1])

Перейдем теперь к решению неоднородного уравнения

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -F(\theta, \varphi). \tag{22}$$

Это уравнение может иметь регулярное всюду на Σ решение только при выполнении условия

$$\int\int_{\Sigma} F\, d\sigma = 0, \tag{23}$$

выражающего, что сумма источников и стоков должна быть равна нулю. Его легко получить из формул Грина для оператора $\Delta_{\theta,\varphi}$, установленных в п. 3.

Покажем, что всякое решение уравнения (22), удовлетворяющее условию (23), представимо в виде

$$u(M) = \int\int_{\Sigma} G(M, P) F(P)\, d\sigma_P + A,$$

где A — некоторая постоянная, а $G(M, P)$ — функция источника, определяемая формулой (21). Пусть M — некоторая фиксированная точка сферы, в которую мы помещаем северный полюс ($\theta = 0$), а M_1 — диаметрально противоположная ей точка. Точки M и M_1 являются особыми точками уравнения (22). Поэтому построим в этих точках малые кружки K_ε^M и $K_\varepsilon^{M_1}$ и рассмотрим интеграл

$$I = \int\int_{\Sigma_1 = \Sigma - K_\varepsilon^M - K_\varepsilon^{M_1}} (u\Delta G - G\Delta u)\, d\sigma.$$

---

[1]) Угол γ определяется из формулы

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Подставляя в правую часть выражения для Δu и ΔG, имеем:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) - G \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] d\theta \, d\varphi + \\ + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{d\theta}{\sin \theta} \int_0^{2\pi} \left[u \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} - D \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] d\varphi.$$

Учитывая, что в квадратных скобках стоят точные производные от выражений

$$\sin \theta \left[u \frac{\partial G}{\partial \theta} - G \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \quad \text{и} \quad u \frac{\partial G}{\partial \varphi} - G \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

получаем после интегрирования

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\sin \theta \left(u \frac{\partial G}{\partial \theta} - G \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\varphi.$$

Далее, замечая, что

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2},$$

будем иметь:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot u \right]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \left[\sin \theta \ln \sin \frac{\theta}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta} d\varphi \right]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} = \\ = I_1 + I_2.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_1 = u(M) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} I_2 = 0.$$

Следовательно,

$$u(M) = \int_{\Sigma} \int G(M, P) F(P) \, d\sigma_P + A, \tag{24}$$

где

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \int u \, d\sigma — \text{постоянная.}$$

Решение нашей задачи определено с точностью до аддитивной постоянной. То решение, для которого

$$\int_{\Sigma} \int u \, d\sigma = 0,$$

определяется формулой

$$u(M) = \int_{\Sigma}\int G(M, P) F(P)\, d\sigma_P.$$

Применяя (24) к уравнению сферических функций $\Delta_{\theta,\varphi} u = -\lambda u$, заключаем:

сферические функции, определяемые формулой (7), представляют совокупность всех линейно-независимых собственных функций интегрального уравнения

$$u(M) = \lambda \int_{\Sigma}\int G(M, P)\, u(P)\, d\sigma_P$$

с симметрическим ядром $G(M, P)$, определяемым формулой (21).

К этому уравнению применима общая теория интегральных уравнений с симметрическим ядром. Отсюда следует, что произвольная дважды дифференцируемая функция $f(\theta, \varphi)$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим функциям

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta), \qquad (25)$$

где

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta), \qquad (26)$$

A_{nm} и B_{nm} — коэффициенты Фурье.

§ 3. Некоторые примеры применения сферических функций

1. Поляризация шара в однородном поле. Рассмотрим в качестве примера применения сферических функций задачу о поляризации диэлектрического шара в однородном поле.

Пусть в электростатическое поле в однородной изотропной среде с диэлектрической постоянной ε_1 помещен шар радиуса a из диэлектрика с постоянной ε_2 (рис. 97). Будем искать потенциал создавшегося поля в виде суммы

$$u = \begin{cases} u_1 = u_0 + v_1 & \text{вне шара,} \\ u_2 = u_0 + v_2 & \text{внутри шара,} \end{cases}$$

где u_0 — потенциал невозмущенного (в отсутствии диэлектрического шара) поля, а v — возмущение, вызываемое помещенным в поле

шаром. Потенциал u удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0$$

при дополнительных условиях

$$u_1 = u_2 \quad \text{на} \quad S,$$
$$\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{на} \quad S,$$

где S — граница шара, u_1 и u_2 — значения функции u вне и внутри шара. Отсюда следует, что потенциал v будет определяться условиями

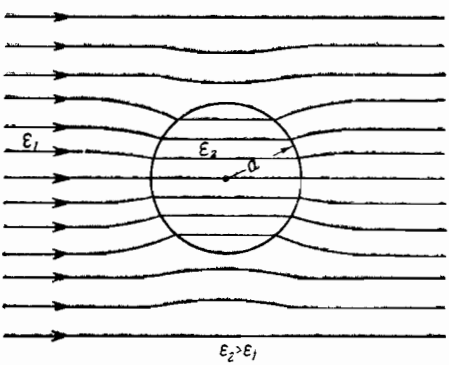


Рис. 97.

$$\Delta v = 0, \tag{1}$$

$$v_1 = v_2 \quad \text{на} \quad S, \tag{2}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} =$$

$$= -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{\partial u_0}{\partial n} \quad \text{на} \quad S, \tag{3}$$

так как для функции u_0 имеем:

$$\Delta u_0 = 0,$$
$$(u_0)_1 = (u_0)_2 \quad \text{на} \quad S,$$
$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_2 \quad \text{на} \quad S.$$

В правой части равенства (3) стоит известная функция θ и φ, которую мы разложим по сферическим функциям:

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi).$$

Полагая

$$v_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \bar{Y}_n(\theta, \varphi); \qquad v_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \bar{\bar{Y}}_n$$

и пользуясь граничными условиями (2) и (3), получаем:

$$\bar{Y}_n = \bar{\bar{Y}}_n$$

и

$$\varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \bar{Y}_n \Big|_{r=a} - \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \bar{\bar{Y}}_n \Big|_{r=a} =$$

$$= -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sum_{n=0}^{\infty} Y_n,$$

откуда

$$\bar{Y}_n = Y_n \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, a}{\varepsilon_1 (n+1) + \varepsilon_2 n}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь частный случай. Шар помещен в однородном параллельном внешнем поле E_0, направленном вдоль оси z. Потенциал этого поля равен

$$u_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta,$$

так что

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=a} = -E_0\cos\theta = Y_1(\theta).$$

Формула (4) дает:

$$\overline{Y}_n = 0 \quad \text{при} \quad n \neq 1,$$

$$\overline{Y}_1 = -E_0\cos\theta\,\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,a}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}.$$

Для потенциала возмущенного поля имеем:

$$u_1 = -E_0 z\left[1+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] \text{ вне шара } (r>a),$$

$$u_2 = -E_0 z\,\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2} \qquad \text{внутри шара } (r<a),$$

откуда следует, что

$$E_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial z} = \left[1-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{2a^3}{r^3}\right]E_0,$$

$$E_2 = -\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,E_0,$$

т. е. поле внутри шара параллельно и однородно.

Если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, то эквипотенциальные поверхности, оставаясь плоскостями, перпендикулярными к направлению поля, будут расположены реже, чем в невозмущенном поле. Силовые линии, являющиеся ортогональными траекториями эквипотенциальных поверхностей, будут втягиваться в шар с большей диэлектрической постоянной. В случае $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ картина будет обратной.

Этим же методом можно получить решение задачи о поляризации шара в присутствии точечного источника, если воспользоваться разложением $\frac{1}{r}$ по сферическим функциям (см. § 1).

Следует отметить, что аналогичные задачи встречаются при изучении магнитных и термических полей, а также поля стационарного электрического тока при наличии сферического включения, физические характеристики которого отличны от характеристик среды. Для термической задачи в граничное условие (3) вместо ε_1 и ε_2 будут входить коэффициенты теплопроводности k_1 и k_2, для магнитной задачи — магнитные проницаемости μ_1 и μ_2, а для последней задачи — проводимости λ_1 и λ_2.

2. Собственные колебания сферы. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях сферы радиуса r_0 с нулевыми граничными условиями первого рода. Эта задача сводится к отысканию собствен-

ных значений и собственных функций уравнения

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{5}$$

с граничным условием на поверхности сферы

$$v = 0. \tag{6}$$

Помещая начало сферической системы координат в центр сферы, перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\,\varphi} v + \lambda v = 0, \tag{5'}$$

где

$$\Delta_{\theta,\,\varphi} v = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}.$$

Решение будем искать методом разделения переменных, полагая

$$\theta(r,\ \theta,\ \varphi) = R(r)\,Y(\theta,\ \varphi). \tag{6'}$$

После подстановки этого выражения в уравнение (5) получим:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R} + \lambda r^2 + \frac{\Delta_{\theta,\,\varphi} Y}{Y} = 0, \tag{7}$$

откуда следует:

$$\Delta_{\theta,\,\varphi} Y + \mu Y = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0. \tag{9}$$

Решая уравнение (8) при естественных условиях ограниченности в полюсах сферы

$$|Y|_{\theta=0,\,\pi} < \infty \tag{10}$$

и условии периодичности по φ: $Y(\theta,\ \varphi + 2\pi) = Y(\theta,\ \varphi)$, получаем собственные значения

$$\mu = n(n+1), \tag{11}$$

каждому из которых соответствует $2n+1$ сферическая функция:

$$\left.\begin{aligned} Y_n^{(-j)}(\theta,\ \varphi) &= P_n^{(j)}(\cos\theta)\cos j\varphi, \\ Y_n^{(j)}(\theta,\ \varphi) &= P_n^{(j)}(\cos\theta)\sin i\varphi \qquad (j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Обратимся теперь к уравнению (9). Учитывая равенство (11) и граничные условия при $r = r_0$ и естественное условие ограниченности при $r = 0$, получаем для функции $R(r)$ следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)R = 0, \tag{9'}$$

$$R(r_0) = 0, \tag{13}$$

$$|R(0)| < \infty. \tag{14}$$

С помощью подстановки

$$R(r)=\frac{y(r)}{\sqrt{r}} \tag{15}$$

это уравнение приводится к уравнению Бесселя порядка $\left(n+\frac{1}{2}\right)$:

$$y''+\frac{1}{r}y'+\left[\lambda-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]y=0, \tag{16}$$

общее решение которого имеет вид (см. Дополнение, ч. I, § 1)

$$y(r)=AJ_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\,r)+BN_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\,r). \tag{17}$$

Из условия ограниченности (14) следует, что

$$B=0.$$

Граничное условие (13) дает:

$$AJ_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\,r_0)=0.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения уравнения, то $A\neq 0$ и, следовательно,

$$J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\,r_0)=0.$$

Обозначив $\nu_1^{(n)}$, $\nu_2^{(n)}$, ..., $\nu_m^{(n)}$, ... корни трансцендентного уравнения

$$J_{n+1/2}(\nu)=0, \tag{18}$$

находим собственные значения

$$\lambda_{m,\,n}=\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \tag{19}$$

Каждому собственному значению $\lambda_{m,\,n}$ соответствует $2n+1$ собственная функция. Введем обозначение

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+1/2}(x). \tag{20}$$

Тогда собственные функции уравнения (5) при граничном условии (6) можно представить в виде

$$v_{n,\,m,\,j}(r,\ \theta,\ \varphi)=\psi_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}r\right)Y_n^{(j)}(\theta,\ \varphi)$$
$$(j=-n,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{21}$$

Рассмотрим теперь первую внутреннюю краевую задачу для волнового уравнения

$$\Delta v+k^2v=0 \tag{22}$$

при граничном условии

$$v=f(\theta,\ \varphi) \tag{23}$$

на поверхности сферы радиуса r_0.

Из предшествующего изложения ясно, что решение этой задачи представляется в виде

$$v(r,\ \theta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=-n}^{n} f_{nj}\frac{\psi_n(kr)}{\psi_n(kr_0)}\,Y_n^{(j)}(\theta,\ \varphi), \tag{24}$$

где f_{nj} — коэффициенты разложения функции $f(\theta,\ \varphi)$ по сферическим функциям $\{Y_n^{(j)}(\theta,\ \varphi)\}$

$$f(\theta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=-n}^{n} f_{nj}Y_n^{(j)}(\theta,\ \varphi). \tag{25}$$

Если k^2 совпадает с одним из собственных значений

$$k^2=\lambda_{m_0 n_0}=\left(\frac{\nu_{m_0}^{(n_0)}}{r_0}\right)^2,$$

то краевая задача (22) — (23) имеет решение не для всякой функции $f(\theta,\ \varphi)$. Формула (24) показывает, что необходимым и достаточным условием разрешимости нашей краевой задачи в этом случае является обращение в нуль коэффициентов $f_{n_0 j}$

$$f_{n_0 j}=0$$

или

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\ \varphi)\,Y_{n_0}^{(j)}(\theta,\ \varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=0.$$

Если эти условия выполнены, то решение определяется формулой (24), в которой слагаемые, соответствующие $n=n_0$, отсутствуют. Однако при этом решение определено неоднозначно, так как к нему всегда можно прибавить любую линейную комбинацию собственных функций, соответствующих $k^2=\lambda_{m_0 n_0}$.

3. Внешняя краевая задача для сферы. Рассмотрим внешнюю первую краевую задачу для сферы (см. гл. VII, § 3)

$$\Delta v+k^2 v=0 \qquad (k^2>0),$$

$$v\big|_{r=r_0}=f(\theta,\ \varphi),$$

$$v=O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r\to\infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial v}{\partial r}+ikv\right)=0 \quad \text{(условие излучения)}.$$

Как было показано в § 3 главы VII, эта задача имеет единственное решение.

Разложим искомую функцию и функцию $f(\theta, \varphi)$ в ряды по сферическим функциям

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} R_n(r)\, Y_n^{(j)}(\theta, \varphi),$$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi).$$

Коэффициенты разложения $R_n(r)$, очевидно, будут удовлетворять уравнению

$$R_n'' + \frac{1}{r} R_n' + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_n = 0,$$

граничному условию

$$R_n(r_0) = f_n$$

и условиям излучения при $r \to \infty$

$$R_n(r) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\lim_{r\to\infty} r(R_n' + ikR_n) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид (см. п. 2 и Дополнение I, § 3)

$$R_n(r) = A_n \zeta_n^{(1)}(kr) + B_n \zeta_n^{(2)}(kr),$$

где

$$\zeta_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H_{n+1/2}^{(1)}(\rho),$$

$$\zeta_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H_{n+1/2}^{(2)}(\rho) \qquad (\rho = kr).$$

Учитывая асимптотические формулы для функций Ханкеля $H_n^{(1)}(\rho)$ и $H_n^{(2)}(\rho)$ (см. Дополнение I, § 3):

$$H_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\left[\rho - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} + \ldots,$$

$$H_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left[\rho - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} + \ldots$$

(точками обозначены члены более высокого порядка малости относительно $\frac{1}{\rho}$), получаем для функций $\zeta_n^{(1)}$ и $\zeta_n^{(2)}$ следующие асимптотические формулы:

$$\zeta_n^{(1)}(kr) = \frac{e^{i\left[kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{r} + \ldots,$$

$$\zeta_n^{(2)}(kr) = \frac{e^{-i\left[kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{r} + \ldots$$

Отсюда видно, что условию излучения удовлетворяет лишь функция $\zeta_n^{(2)}$.

Поэтому

$$A_n = 0.$$

Пользуясь граничным условием при $r = r_0$, находим:

$$B_{nj} = \frac{f_{nj}}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)}.$$

Таким образом, мы получаем функцию $v(r, \theta, \varphi)$ в виде

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} \frac{f_{nj} \zeta_n^{(2)}(kr)}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi),$$

где

$$f_{nj} = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{N_{nj}},$$

и

$$N_{nj} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [Y_n^{(j)}]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_j}{2n+1} \frac{(n+j)!}{(n-j)!}, \qquad \varepsilon_j = \begin{cases} 2, & i = 0, \\ 1, & j > 0 \end{cases}$$

— норма сферической функции $Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)$.

ЧАСТЬ III

ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА — ЭРМИТА И ЧЕБЫШЕВА — ЛЯГЕРРА

§ 1. Полиномы Чебышева — Эрмита

Задача о линейном гармоническом осцилляторе в квантовой механике приводит к уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \tag{1}$$

которое может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2} \frac{dy}{dx}\right] + \lambda e^{-x^2} y = 0. \tag{2}$$

Полиномы Чебышева — Эрмита определяются как решения краевой задачи на собственные значения для уравнения (2) на бесконечной

прямой $-\infty < x < \infty$ при следующем граничном условии: решение при $x \to \infty$ может обращаться в бесконечность лишь такого же порядка, как конечная степень x.

Будем искать решение этой задачи в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в уравнение (1), будем иметь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_{n+2}(n+2)(n+1) - 2na_n + \lambda a_n\} x^n = 0.$$

Отсюда получаем для коэффициентов рекуррентную формулу

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что при $a_1 = 0$ ряд (3) содержит только четные, а при $a_0 = 0$ — только нечетные степени x. Коэффициенты a_0 и a_1 представляют собой произвольные постоянные, определяющие частные решения уравнения (1).

При $\lambda = 2n$ уравнение (1) имеет решение в виде полинома степени n

$$\left.\begin{aligned} &\overline{H}_n(x) = a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (n \text{ — четное}) \\ \text{или} \\ &\overline{H}_n(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \quad (n \text{ — нечетное}), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

который, с точностью до нормирующего множителя, является *полиномом Чебышева — Эрмита* и представляет собой собственную функцию рассматриваемой краевой задачи.

Если $\lambda \neq 2n$ (четному целому неотрицательному числу), то степенной ряд будет иметь бесконечное число коэффициентов, отличных от нуля и имеющих, за исключением, быть может, конечного числа, один и тот же знак. В этом случае имеются члены $a_n x^n$ со сколь угодно большим n, которые превосходят при $x \to \infty$ любую степень x; следовательно, степенной ряд не удовлетворяет граничному условию и не может быть решением краевой задачи. Этим самым установлено, что полиномы Чебышева — Эрмита являются единственным решением нашей задачи.

К определению полиномов Чебышева — Эрмита $H_n(x)$ можно притти, вводя производящую функцию

$$\Psi(x, t) = e^{2tx - t^2} \tag{6}$$

и рассматривая ее разложение в ряд Тейлора по переменному t

$$\Psi(x, t) = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться в том, что коэффициенты разложения $H_n(x)$— полиномы n-степени.

Покажем, что полином $H_n(x)$ с точностью до множителя пропорциональности совпадает с полиномом $\overline{H}_n(x)$, определяемым формулой (5).

Действительно, соотношения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2t\Psi$$

и

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + 2(t-x)\Psi = 0$$

дают

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{8}$$

и, соответственно,

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0. \tag{9}$$

Из формул (8), (9) следует, что $H_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0,$$

т. е. полиномы Чебышева — Эрмита $H_n(x)$ совпадают с полиномами $\overline{H}_n(x)$ с точностью до множителя пропорциональности, который в формуле (5) оставался неопределенным.

Из равенства (7) вытекает следующая дифференциальная формула для *полиномов Чебышева — Эрмита*:

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}\right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, следует, что $a_n = 2^n$.

Пользуясь этой формулой, вычислим несколько полиномов $H_n(x)$:

$$H_0(x) = 1; \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x;$$
$$H_1(x) = 2x; \qquad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2;$$

Докажем, что полиномы Чебышева — Эрмита образуют при $-\infty < x < \infty$ ортогональную систему с весом e^{-x^2}:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{если } m = n. \end{cases} \tag{11}$$

В самом деле,

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) dx,$$

Положим для определенности, что $m \leqslant n$. Интегрируя по частям и пользуясь формулой (8), а также тем, что на бесконечности обращается в нуль произведение любого полинома на функцию e^{-x^2} и на все ее производные сколь угодно высокого порядка, мы получаем:

$$J = (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2})\, dx = \ldots =$$

$$= (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x^2})\, dx.$$

Если $m < n$, то

$$J = (-1)^{n-m} 2^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (e^{-x^2}) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Если $m = n$, то

$$J = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Тем самым соотношение (11) доказано.

В приложениях часто пользуются функциями

$$\psi_n(x) = \frac{H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}},$$

образующими ортогональную и нормированную систему на интервале $-\infty < x < \infty$. Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\psi_n'' + [(2n+1) - x^2] \psi_n = 0.$$

§ 2. Полиномы Чебышева — Лягерра

1. Полиномы Чебышева — Лягерра могут быть определены как решение уравнения

$$xy'' + (1-x) y' + \lambda y = 0 \qquad (0 < x < \infty) \tag{1}$$

или в самосопряженной форме

$$(xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x} y = 0 \qquad (0 < x < \infty) \tag{1'}$$

при следующих граничных условиях: ограниченность решения при $x = 0$ и обращение в бесконечность порядка не выше, чем конечная степень x при $x \to \infty$.

Естественно искать решение уравнения (1) в виде ряда по степеням x:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), будем иметь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+1}(n+1)n + a_{n+1}(n+1) - na_n + \lambda a_n] x^n = 0$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+1}(n+1)^2 - a_n(n-\lambda)] x^n = 0,$$

откуда получаем рекуррентную формулу для коэффициентов ряда (2)

$$a_{n+1} = \frac{n-\lambda}{(n+1)^2} a_n. \tag{3}$$

Коэффициент a_0 является произвольной постоянной, определяющей частное решение уравнения (1). При $\lambda = n$ уравнение (1) имеет решение в виде полинома n-й степени. Выбирая a_0 так, чтобы коэффициент при старшей степени x^n был равен $(-1)^n$, мы приходим к *полиномам Чебышева — Лягерра* $L_n(x)$. При этом $a_0 = n!$

Приведем выражения для пяти первых полиномов $L_n(x)$:

$$L_0(x) = 1;$$
$$L_1(x) = -x + 1;$$
$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2;$$
$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6;$$
$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24.$$

Полиномы Чебышева — Лягерра имеют следующую производную функцию:

$$\Psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}. \tag{4}$$

Разлагая ее в ряд по степеням t, получим:

$$\Psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{L}_n(x) \frac{t^n}{n!}, \tag{5}$$

где $\bar{L}_n(x)$ — коэффициенты разложения, равные

$$\bar{L}_n(x) = \left[\frac{\partial^n \Psi(x, t)}{\partial t^n}\right]_{t=0}$$

или

$$\bar{L}_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \tag{6}$$

Отсюда видно, что $\bar{L}_n(x)$ является полиномом степени n.

Докажем, что

$$\bar{L}_n(x) \equiv L_n(x).$$

С этой целью покажем, что 1) полиномы $\bar{L}_n(x)$ удовлетворяют уравнению Чебышева — Лагерра, 2) коэффициент при x^n равен $a_n = (-1)^n$.

Свойство 2) легко следует из формулы (6). Перейдем к доказательству свойства 1).

Положим

$$\bar{L}_n(x) = e^x \frac{d^n z}{dx^n},$$

где

$$z = x^n e^{-x}.$$

Вычисляя $\frac{dz}{dx} = -z + \frac{nz}{x}$, получаем для z уравнение

$$xz' + (x - n)z = 0.$$

Дифференцируя это тождество $n+1$ раз, получаем:

$$xz^{(n+2)} + (x+1)z^{(n+1)} + (n+1)z^{(n)} = 0,$$

т. е. функция

$$u = \frac{d^n z}{dx^n}$$

удовлетворяет уравнению

$$xu'' + (x+1)u' + (n+1)u = 0. \tag{7}$$

Вычислим теперь производные $\bar{L}_n$:

$$\bar{L}_n' = e^x(u + u'), \tag{8}$$

$$\bar{L}_n'' = e^x(u'' + 2u' + u). \tag{9}$$

Пользуясь (8), (9) и затем (7), найдем

$$x\bar{L}_n'' + (1-x)\bar{L}_n' = e^x[xu'' + (1+x)u' + u] = -n\bar{L}_n,$$

т. е. $\bar{L}_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x\bar{L}_n'' + (1-x)\bar{L}_n' + n\bar{L}_n = 0.$$

Тем самым доказано, что $\bar{L}_n(x) \equiv L_n(x)$ и, следовательно, для полиномов Чебышева — Лягерра имеет место дифференциальная формула

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n). \tag{10}$$

Пользуясь уравнением (1) для $L_n(x)$, нетрудно убедиться в том, что полиномы $L_n(x)$ и $L_m(x)$ при $m \neq n$ ортогональны между собою с весом e^{-x}. Однако мы докажем ортогональность, исходя из дифференциальной формулы, так как при этом попутно будет вычислена норма $L_n(x)$.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^\infty L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \int_0^\infty L_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) dx.$$

Пусть $m \leqslant n$. Интегрируя m раз по частям и учитывая, что вследствие наличия множителя вида $x^k e^{-x}$ $(k > 0)$ все подстановки обращаются в нуль, получим:

$$J = (-1)^m \int_0^\infty \frac{d^m L_m}{dx^m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^n e^{-x}) dx.$$

Если $m < n$, то, интегрируя еще раз по частям, получаем в силу равенства $\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} L_m = 0$, что $J = 0$, т. е.

$$\int_0^\infty L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = 0.$$

Если же $m = n$, то

$$J = (-1)^n \int_0^\infty (-1)^n n! x^n e^{-x} dx = n! \Gamma(n+1) = (n!)^2.$$

Итак, доказано, что

$$\int_0^\infty L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ (n!)^2, & \text{если } m = n, \end{cases} \tag{11}$$

т. е. полиномы Чебышева — Лягерра $L_n(x)$ образуют ортогональную с весом e^{-x} систему собственных функций уравнения (1), соответствующих собственным значениям $\lambda = n$.

Нормированные полиномы имеют вид

$$l_n(x) = \frac{L_n(x)}{n!} = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \tag{12}$$

Полиномам Чебышева — Лагерра соответствуют ортогональные нормированные функции

$$\psi_n = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{n!} L_n(x), \tag{13}$$

удовлетворяющие уравнению

$$(x\psi')' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)\psi + \lambda\psi = 0 \tag{14}$$

при граничных условиях: ограниченность при $x = 0$ и обращение в нуль при $x \to \infty$.

Часто встречаются также функции

$$S_n = x^{-\frac{1}{2}} \psi_n, \tag{15}$$

удовлетворяющие самосопряженному дифференциальному уравнению

$$(x^2 S')' - \frac{x^2 - 2x - 1}{4} S + \lambda x S = 0 \tag{16}$$

и граничному условию: исчезание решения при $x \to \infty$. В обоих случаях собственными значениями являются целые положительные числа

$$\lambda = n,$$

а условия ортогональности имеют вид

$$\int_0^\infty \psi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq n, \\ 1 & \text{при} \quad m = n; \end{cases} \tag{17}$$

$$\int_0^\infty S_m(x)\,S_n(x)\,x\,dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \tag{18}$$

2. При изучении движения электрона в поле кулоновых сил, а также в других задачах современной физики, наряду с полиномами $L_n(x)$ встречаются *обобщенные полиномы Чебышева — Лагерра*

$$y(x) = Q_n^{(s)}(x) \qquad (s \leqslant n), \tag{19}$$

удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$xy'' + (s + 1 - x)\,y' + \left(\lambda - \frac{s+1}{2}\right) y = 0, \tag{20}$$

которое можно записать в следующей самосопряженной форме:

$$(x^{s+1}e^{-x}y')' + x^s e^{-x}\left(\lambda - \frac{s+1}{2}\right) y = 0. \tag{21}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} y(x) \text{ конечно при } x=0, \\ y(x) \text{ порядка } x \text{ при } x\to\infty. \end{array}\right\}. \tag{22}$$

Решая уравнение (20) при помощи ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{23}$$

получим рекуррентную формулу

$$a_{n+1}=\frac{n+\frac{s+1}{2}-\lambda}{n(n+s)}a_n. \tag{24}$$

Если

$$\lambda=n+\frac{s+1}{2}, \text{ где } n \text{ — целое положительное число,} \tag{25}$$

то ряд (23) обрывается и мы получаем решение в виде полинома.

Коэффициент a_0 является произвольной постоянной, определяющей нормировку решения. Выбирая a_0 так, чтобы коэффициент при старшей степени x^n был равен $(-1)^n$,

$$a_n=(-1)^n, \tag{26}$$

получаем обобщенные полиномы Чебышева — Лягерра, являющиеся, очевидно, единственным решением уравнения (21), удовлетворяющим условиям (22) и (26).

Производящей функцией полиномов $Q_n^{(s)}(x)$ является функция

$$\Psi(x, t)=\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{s+1}}, \tag{27}$$

так как ряд Маклорена функции $\Psi(x, t)$ имеет вид

$$\Psi(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(s)}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{28}$$

При $s=0$ получаем отсюда формулу (5) для полиномов Чебышева — Лягерра.

Покажем, что для $Q_n^{(s)}(x)$ справедлива следующая дифференциальная формула:

$$Q_n^{(s)}(x)=\frac{e^x}{x^s}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+s}). \tag{29}$$

Из формулы

$$T_n^{(s)}(x)=\frac{e^x}{x^s}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+s})$$

видно, что $T_n^{(s)}(x)$ представляет собой полином степени n, причем коэффициент при x^n равен $(-1)^n$.

Докажем теперь, что полиномы $T_n^{(s)}(x)$ удовлетворяют уравнению (20).

Вводя функцию

$$z = x^{n+s}e^{-x},$$

видим, что для нее имеет место соотношение

$$xz' + (x - n - s)\,z = 0.$$

Дифференцируя его $(n+1)$ раз по x, получаем:

$$xz^{(n+2)} + (x + 1 - s)\,z^{(n+1)} + (n+1)\,z^{(n)} = 0,$$

т. е. функция

$$u = \frac{d^n z}{dx^n}$$

удовлетворяет уравнению

$$xu'' + (x + 1 - s)\,u' + (n+1)\,u = 0.$$

Вычисляя производные $T_n^{(s)}(x)$ и учитывая уравнение для u, будем иметь:

$$x\frac{dT_n^{(s)}}{dx} = xT_n^{(s)} - sT_n^{(s)} + e^x x^{-s+1}u',$$

$$x\frac{d^2T_n^{(s)}}{dx^2} = (x - s - 1)\frac{dT_n^{(s)}}{dx} + T_n^{(s)} + e^x e^{-s}[xu'' + (x - s + 1)\,u'] =$$

$$= (x - s - 1)\frac{dT_n^{(s)}}{dx} - nT_n^{(s)},$$

т. е. полином $y = T_n^{(s)}(x)$ удовлетворяет уравнению (20) при $\lambda = n + \frac{s+1}{2}$.

Отсюда сразу же следует, что

$$T_n^{(s)}(x) \equiv Q_n^{(s)}(x).$$

Покажем теперь, что обобщенные полиномы ортогональны с весом $x^s e^{-x}$ в области $0 < x < \infty$, и вычислим их норму.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^\infty Q_m^{(s)} Q_n^{(s)} e^{-x} x^s\,dx = \int_0^\infty Q_m^{(s)} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+s})\,dx.$$

Пусть $m \leqslant n$. Интегрируя m раз по частям и замечая, что все подстановки обращаются в нуль, получаем:

$$J = (-1)^n \int_0^\infty \frac{d^m}{dx^m} Q_m^{(s)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x} x^{n+s})\, dx.$$

Если $m < n$, то, интегрируя еще раз по частям, получаем в силу равенства $\frac{d^{m+1} Q_m^{(s)}}{dx^{m+1}} = 0$, что $J = 0$, т. е.

$$\int_0^\infty Q_m^{(s)}(x)\, Q_n^{(s)}(x)\, e^{-x} x^s\, dx = 0.$$

Если $m = n$, то

$$J = n! \int_0^\infty e^{-x} x^{n+s}\, dx = n!\Gamma(n+s+1),$$

т. е.

$$\int_0^\infty |Q_n^{(s)}(x)|^2\, e^{-x} x^s\, dx = n!\Gamma(n+s+1).$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty Q_m^{(s)}(x)\, Q_n^{(s)}(x)\, e^{-x} x^s\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \quad (s > -1), \\ n!\Gamma(n+s+1), & \text{если } m = n. \end{cases} \tag{30}$$

Обобщенным полиномом Чебышева — Лягерра $Q_n^{(s)}(x)$ соответствуют ортогональные и нормированные функции

$$\Phi_n^{(s)}(x) = \frac{x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} Q_n^{(s)}(x)}{\sqrt{n!\Gamma(n+s+1)}} \tag{31}$$

$$\left(\int_0^\infty \Phi_n^{(s)}(x)\, \Phi_m^{(s)}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n \end{cases} \right),$$

которые являются решениями уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{d\Phi}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{x}{4} - \frac{s^2}{4x}\right)\Phi = 0 \tag{32}$$

для соответствующих собственных значений

$$\lambda = n + \frac{s+1}{2}.$$

Граничные условия разумеются сами собой из предыдущего. Иногда бывает удобно пользоваться нормированными полиномами

$$Q_n^{*(s)}(x) = \frac{Q_n^{(s)}(x)}{\sqrt{n!\Gamma(n+s+1)}}. \tag{33}$$

§ 3. Простейшие задачи для уравнения Шредингера [1])

1. Уравнение Шредингера. В квантовой механике поведение частицы, находящейся в поле потенциальных сил, описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta\psi + U(x, y, z, t)\,\psi, \tag{1}$$

где $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ *эрг · сек* — постоянная Планка, $i = \sqrt{-1}$, μ — масса частицы, U — ее потенциальная энергия в силовом поле, $\psi = \psi(x, y, z, t)$ — волновая функция.

Если силы не зависят от времени, $U = U(x, y, z)$, то возможны стационарные состояния с заданным состоянием энергии, т. е. существуют решения вида

$$\psi = \psi^0(x, y, z)\, e^{-\frac{iE}{\hbar} t}, \tag{2}$$

где E — общая энергия частицы. Подставляя это выражение в уравнение (1), приходим ко второму уравнению Шредингера

$$\Delta\psi^0 + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U)\,\psi^0 = 0, \tag{3}$$

в котором E играет роль собственного значения, подлежащего определению. В дальнейшем вместо ψ^0 мы будем писать ψ:

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U)\,\psi = 0. \tag{4}$$

В случае отсутствия силового поля $U = 0$ уравнение (4) принимает вид

$$\Delta\psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\,\psi = 0. \tag{5}$$

Нетрудно заметить сходство этого уравнения с волновым уравнением классической физики

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \tag{6}$$

где $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны. Однако это сходство является чисто внешним и формальным в силу различия физического смысла функций, входящих в уравнения (5) и (6).

В уравнении Шредингера непосредственный физический смысл имеет не сама функция ψ, а $|\psi|^2$, которое истолковывается в статистическом духе: выражение $|\psi|^2\,dx\,dy\,dz$ означает вероятность

[1]) Рассматриваемые здесь задачи для уравнения Шредингера дают примеры применения полиномов Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лягерра. Приведенное ниже изложение не претендует на полное освещение вопросов, связанных с уравнением Шредингера. По университетской программе квантовая механика изучается после курса математической физики.

пребывания частицы внутри элементарного объема $dx\,dy\,dz$ в точке x, y, z пространства.

В связи с этим нормировка собственных функций к единице, которой мы неоднократно пользовались ранее в целях математической простоты, теперь приобретает фундаментальное значение. Условие нормировки

$$\int\int\int |\psi|^2\,dx\,dy\,dz = 1 \tag{7}$$

означает, что частица находится в каком-либо месте пространства и поэтому вероятность найти частицу где-нибудь в пространстве равна единице (достоверное событие).

Рассмотрим некоторые простейшие задачи для уравнения Шредингера.

2. Гармонический осциллятор. Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора принимает вид

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - U)\,\psi = 0,$$

где $U = \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2$, ω_0 — собственная частота (циклическая) осциллятора. Наша задача будет состоять в отыскании стационарных состояний, т. е. спектра собственных значений энергии E и соответствующих собственных функций ψ из уравнения

$$\psi'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2\right)\psi = 0 \tag{8}$$

при дополнительном условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\,dx = 1. \tag{9}$$

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{2E}{\hbar\omega_0}, \\ x_0 &= \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}, \\ \xi &= \frac{x}{x_0}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

для функции $\psi = \psi(\xi)$ после очевидных преобразований получим уравнение

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\,\psi = 0 \tag{11}$$

с дополнительным условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\,d\xi = \frac{1}{x_0}. \tag{12}$$

Решением этой задачи в силу замечания в конце § 1, на стр. 655, будут функции

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)}{\sqrt{2^n n!}\sqrt{\pi}},$$

соответствующие собственным значениям

$$\lambda_n = 2n + 1.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, находим:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n!}\sqrt{\pi}}, \tag{13}$$

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \tag{14}$$

В классической механике энергия осциллятора

$$E = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega_0^2}{2} x^2,$$

где p_x — импульс частицы, может принимать непрерывный ряд значений. С точки зрения квантовой механики энергия осциллятора, как показывает формула (14), может принимать лишь дискретный ряд значений E_n. В этом случае говорят, что энергия квантуется. Число n, определяющее номер квантового уровня, называют главным квантовым числом. В низшем квантовом состоянии при $n = 0$ энергия осциллятора отлична от нуля и равна

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

3. Ротатор. Найдем собственные значения энергии ротатора со свободной осью, т. е. частицы, вращающейся на одном и том же расстоянии вокруг неподвижного центра.

Потенциальная энергия U ротатора сохраняет одно и то же значение во всех положениях частицы и ее можно положить равной нулю $U = 0$.

В сферической системе координат (r, θ, φ) с началом координат в неподвижном центре уравнение Шредингера для ротатора

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} E\psi = 0$$

можно записать в виде

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} E\psi = 0. \tag{15}$$

При этом используется условие

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

Вводя вместо массы μ момент инерции

$$I = \mu r^2,$$

получаем

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \lambda\psi = 0$$

или

$$\Delta_{\theta,\,\varphi}\psi + \lambda\psi = 0, \tag{16}$$

где

$$\lambda = \frac{2I}{\hbar^2}\,E. \tag{17}$$

Таким образом, мы приходим к краевой задаче на собственные значения для уравнения

$$\Delta_{\theta,\,\varphi}\psi + \lambda\psi = 0 \tag{16}$$

при естественном граничном условии ограниченности в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ и условии нормировки

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\psi|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 1. \tag{18}$$

Решениями этой задачи, как мы знаем, являются нормированные сферические функции

$$\psi_{lm}(\theta,\ \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-m)!}{2\varepsilon_m \pi\,(l+m)!}}\ Y_l^{(m)}(\theta,\ \varphi)\ \left(\varepsilon_m = \begin{cases} 2 \text{ при } m=0 \\ 1 \text{ при } m\neq 0 \end{cases}\right), \tag{19}$$

$$Y_l^{(m)}(\theta,\ \varphi) = P_l^{(m)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \qquad (m = 0,\quad 1, \ldots,\quad l),$$

соответствующие собственным значениям

$$\lambda = l(l+1). \tag{20}$$

Заменяя λ его значением согласно формуле (17), получаем формулу для квантованных значений энергии ротатора

$$E_{lm} = l(l+1)\,\frac{\hbar^2}{2I}. \tag{21}$$

4. Движение электрона в кулоновом поле. Одной из простейших задач атомной механики является задача о движении электрона в кулоновом поле ядра, имеющая большой практический интерес, так как решение ее дает не только теорию спектра водорода, но также приближенную теорию спектров атомов с одним валентным электроном (водородоподобных атомов), например атома натрия.

В атоме водорода электрон находится в кулоновом электростатическом поле ядра (протона), так что потенциальная энергия $U(x, y, z)$ равна

$$U = -\frac{e^2}{r}, \tag{22}$$

где r есть расстояние электрона от ядра, $-e$ — заряд электрона, $+e$ — заряд ядра.

Уравнение Шредингера в этом случае имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0. \tag{23}$$

Наша задача состоит в отыскании таких значений E, для которых уравнение (23) допускает решение, непрерывное во всем пространстве и удовлетворяющее условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int |\psi(x, y, z)|^2\, dx\, dy\, dz = 1. \tag{24}$$

Введем сферическую систему координат с началом в ядре, которое предполагается неподвижным,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi}\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0, \tag{25}$$

и будем искать решение в виде

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \chi(r)\, Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi). \tag{26}$$

Принимая во внимание дифференциальное уравнение для сферических функций $Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi)$:

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi) + l(l+1)\, Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi) = 0,$$

получаем:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr} + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi = 0. \tag{27}$$

Введем в качестве единицы длины величину

$$a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} = 0{,}529 \cdot 10^{-8}\ см,$$

в качестве единицы энергии — величину

$$E_0 = \frac{\mu e^4}{\hbar^2} = \frac{e^2}{a}.$$

Полагая

$$\rho = \frac{r}{a}, \qquad \varepsilon = \frac{E}{E_0}\ (\varepsilon < 0), \tag{28}$$

перепишем уравнение (27) в виде

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\chi}{d\rho}+\left(2\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\chi=0. \tag{29}$$

С помощью подстановки

$$\chi=\frac{1}{\sqrt{\rho}}y \tag{30}$$

уравнение (28) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho}+\left(2\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{s^2}{4\rho^2}\right)y=0, \tag{31}$$

где

$$s=2l+1.$$

Вводя в качестве независимой переменной величину

$$x=\rho\sqrt{-8\varepsilon}, \tag{32}$$

получим вместо (31) уравнение

$$xy''+y'-\left(\frac{x}{4}+\frac{s^2}{4x}\right)y+\lambda y=0 \tag{33}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{s^2}{4x}\right)y+\lambda y=0, \tag{33'}$$

где

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}, \tag{34}$$

рассмотренное нами в § 2 (31).

Найденные там собственные значения оказались равными

$$\lambda=n_r+\frac{s+1}{2},$$

а собственные функции выражались через обобщенные полиномы Чебышева — Лягерра $Q_{n_r}^{*(s)}$:

$$y_{n_r}(x)=x^{\frac{s}{2}}e^{-\frac{x}{2}}Q_{n_r}^{*(s)}(x), \tag{35}$$

где $Q_{n_r}^{*(s)}(x)$ определяются формулой (32) § 2.

Учитывая, что

$$s=2l+1,$$

получаем:

$$\lambda=n_r+l+1=n. \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{36}$$

Целое число n называется главным квантовым числом, n_r — радиальным квантовым числом, l — азимутальным квантовым числом.

Заменяя λ его выражением согласно формулам (34) и (28), получаем квантованные значения энергии

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}. \tag{37}$$

Они зависят только от главного квантового числа n.

Положим E равным энергии кванта $\hbar\omega = h\nu$, $E = -h\nu$, где $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ — частота. Тогда будем иметь:

$$\nu = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2 h} = \frac{R}{n^2}, \tag{38}$$

где $R = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 h}$ — так называемая постоянная Ридберга.

Найдем частоты спектральных линий. Наблюдаемая в спектральной линии частота ν_{nn_1} соответствует переходу из состояния с энергией E_n в состояние с энергией E_{n_1}.

Частота ν_{nn_1} кванта, излучаемого при таком квантовом переходе, равна

$$\nu_{nn_1} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{39}$$

Полагая $n_1 = 1$ и давая n значения $n = 2, 3, \ldots$, мы получим ряд линий, составляющих так называемую серию Лаймана

$$\nu_{nn_1} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Далее, значения $n_1 = 2$, $n = 3, 4, \ldots$ дают серию Бальмера

$$\nu_{nn_1} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

значения $n_1 = 3$, $n = 4, 5, \ldots$ — серию Пашена

$$\nu_{nn_1} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Перейдем теперь к определению собственных функций водородного атома. Для этого в силу формулы (26) нам достаточно найти радиальные функции $\chi(\rho)$.

Пользуясь формулами (35), (32), (30), (34), (36), можем написать:

$$\chi_{nl}(\rho) = A_n\left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}} Q_{n-l-1}^{*(2l+1)}\left(\frac{2\rho}{n}\right), \tag{40}$$

где A_n — нормировочный множитель, определяемый из условия

$$\int_0^\infty \rho \chi_{nl}^2(\rho)\, d\rho = 1. \tag{41}$$

Вычисляя A_n, получаем следующее выражение для нормированных радиальных функций:

$$\chi_{nl}(\rho) = \frac{2}{n}\left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}} Q^{*(2l+1)}_{n-l-1}\left(\frac{2\rho}{n}\right). \tag{42}$$

В силу формул (26) и (19) нормированные собственные функции имеют вид

$$\psi_{mnl} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!}}\, Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi)\, \chi_{nl}(\rho),$$

где $\chi_{nl}(\rho)$ определяется формулой (42).

Число m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$) называется магнитным квантовым числом.

Так как n_r всегда неотрицательно ($n_r = 0, 1, 2, \ldots$), то при данном n в силу формулы

$$n = n_r + l + 1$$

квантовое число l не может быть больше $n-1$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). Поэтому при определенном значении главного квантового числа n число l может принимать n значений $l = 0, 1 \ldots, n-1$, а каждому значению l соответствует $2l+1$ значений m. Отсюда следует, что заданному значению энергии E_n, т. е. заданному значению n, соответствует

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

различных собственных функций. Таким образом, каждый уровень энергии имеет вырождение кратности n^2.

Найденный нами дискретный спектр отрицательных собственных значений энергии E_n состоит из бесконечного множества чисел с точкой сгущения в нуле.

Второй отличительной чертой рассматриваемой задачи для уравнения Шредингера является наличие непрерывного спектра положительных собственных значений (всякое положительное число E является собственным значением уравнения (23)). В этом случае электрон уже не связан с ядром, но все еще находится в его поле (ионизированный атом водорода). На доказательстве существования сплошного спектра мы не останавливаемся, отсылая читателя к специальной литературе [1]).

[1]) См., например, В. А. Фок, Начала квантовой механики, 1932; Курант и Гильберт, Методы математической физики, I, гл. V, 1951.

ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛА ОШИБОК И НЕКОТОРЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ниже приводятся таблицы некоторых специальных функций, с которыми мы встречались при решении краевых задач математической физики. Таблицы сопровождаются перечнем простейших свойств рассматриваемых функций.

Интеграл ошибок

Интеграл ошибок

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Разложение в ряд при малых z:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{1!\,3} + \frac{z^5}{2!\,5} - \ldots \right).$$

Асимптотическая формула при больших z

Полагая в интеграле $1 - \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha$, $\alpha = z + \frac{\beta}{2z}$, мы получим:

$$1 - \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} \int_0^\infty e^{-\beta - \frac{\beta^2}{4z^2}} d\beta.$$

Таким образом,

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1 - \Phi(z)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z}} = 1, \quad \text{т. е.} \quad 1 - \Phi(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z}.$$

Если разложить $e^{-\frac{\beta^2}{4z^2}}$ в ряд

$$e^{-\frac{\beta^2}{4z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2z)^{2n}} \frac{\beta^{2n}}{n!},$$

умножить этот ряд на $e^{-\beta}$ и проинтегрировать от нуля до бесконечности, то получится расходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2z)^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\dots 2n}{(2z)^{2n}}.$$

Этот расходящийся ряд дает асимптотическое разложение функции $1-\Phi(z)$:

$$1-\Phi(z)\cong\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-z^2}}{z}\left(1-\frac{1}{2z^2}+\frac{3\cdot 4}{(2z)^4}-\frac{4\cdot 5\cdot 6}{(2z)^6}+\dots\right).$$

Цилиндрические функции

Ряды	Асимптотические формулы

1. Функции Бесселя

$$I_0(x)=1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2}-\dots$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1\cdot 2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1\cdot 2\ \ 2\cdot 3}-\dots\right]$$

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}-\dots$$

$$J_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\dots$$

$$J_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\dots$$

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+\dots$$

2. Функции Неймана

$$N_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\dots$$

($C=0{,}577215\dots$ есть постоянная Эйлера)

$$N_1(x)=-\frac{2}{\pi x}+\frac{2}{\pi}J_1(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)+\dots$$

$$N_n(x)=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n(n-1)!+\dots\quad(n>1)$$

$$N_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\dots$$

$$N_1(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\dots$$

$$N_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\dots$$

3. Функции Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \qquad H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + \ldots$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \qquad H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + \ldots$$

4. Функции мнимого аргумента

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \ldots \qquad I_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x + \ldots$$

$$I_1(x) = -iJ_1(ix) = \frac{x}{2}\left[1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1\cdot 2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3} + \ldots\right] \qquad I_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x + \ldots$$

$$I_\nu(x) = (-i)^\nu J_\nu(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \ldots \qquad I_\nu(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x + \ldots$$

$$K_0(x) = \frac{\pi}{2} iH_0^{(1)}(ix) = -\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) I_0(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots \qquad K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots$$

$$K_1(x) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix) = \frac{1}{x} + \ldots \qquad K_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots$$

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\pi e^{\frac{1}{2}\pi n i} H_n^{(1)}(ix) = \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n + \ldots \qquad K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots$$

5. Функции полуцелого порядка

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x;$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right); \qquad J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\cos x}{x} - \sin x\right).$$

6. Рекуррентные формулы

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu}},$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x),$$

$$J_0'(x) = -J_1(x); \qquad \int_0^x J_1(x)\,dx = 1 - J_0(x),$$

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x); \qquad \int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x).$$

Аналогичные формулы имеют место для других цилиндрических функций вещественного аргумента.

Для функций мнимого аргумента

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}I_{\nu}(x), \qquad K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x}K_{\nu}(x),$$

$$I_0'(x) = I_1(x), \qquad K_0'(x) = -K_1(x).$$

7. Определитель Вронского для цилиндрических функций

$$J_{\nu}(x)\,N_{\nu}'(x) - N_{\nu}(x)\,J_{\nu}'(x) = \frac{2}{\pi x},$$

в частности $J_0(x)\,N_1(x) - N_0(x)\,J_1(x) = -\frac{2}{\pi x}$.

8. Интегральные формулы

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi + in\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos\varphi + in\varphi}\,d\varphi = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi,$$

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}\xi - in\xi}\,d\xi, \text{ в частности } K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}\xi}\,d\xi.$$

9. Интегралы, содержащие функции Бесселя

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \qquad (z>0),$$

$$\int_0^\infty J_1(\lambda\rho)\, e^{-t\lambda^2}\lambda^{\nu+1}\, d\lambda = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^{\nu} e^{-\frac{\rho^2}{4t}},$$

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,\lambda\, d\lambda = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

10. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к уравнению Бесселя

$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0;$	$y = AI_\nu(x) + BK_\nu(x);$
$y'' + xy = 0;$	$y = \sqrt{x}\, Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right);$
$y'' + x^m y = 0;$	$y = \sqrt{x}\, Z_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\sqrt{x^{m+2}}\right),$

где Z — некоторое решение уравнения Бесселя.

Интеграл ошибок

Таблица 1

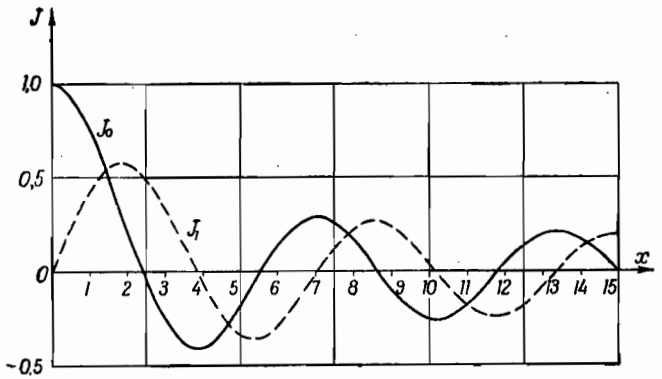
$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2}\, d\alpha \qquad 0 \leqslant z \leqslant 2{,}8$$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000	0,40	0,4284	0,80	0,7421	1,20	0,9103
0,01	0,0113	0,41	0,4380	0,81	0,7480	1,21	0,9130
0,02	0,0226	0,42	0,4475	0,82	0,7538	1,22	0,9155
0,03	0,0338	0,43	0,4569	0,83	0,7595	1,23	0,9181
0,04	0,0451	0,44	0,4662	0,84	0,7651	1,24	0,9205
0,05	0,0564	0,45	0,4755	0,85	0,7707	1,25	0,9229
0,06	0,0676	0,46	0,4847	0,86	0,7761	1,26	0,9252
0,07	0,0789	0,47	0,4937	0,87	0,7814	1,27	0,9275
0,08	0,0901	0,48	0,5027	0,88	0,7867	1,28	0,9297
0,09	0,1013	0,49	0,5117	0,89	0,7918	1,29	0,9319
0,10	0,1125	0,50	0,5205	0,90	0,7969	1,30	0,9340
0,11	0,1236	0,51	0,5292	0,91	0,8019	1,31	0,9361
0,12	0,1348	0,52	0,5379	0,92	0,8068	1,32	0,9381
0,13	0,1459	0,53	0,5465	0,93	0,8116	1,33	0,9400
0,14	0,1569	0,54	0,5549	0,94	0,8163	1,34	0,9419
0,15	0,1680	0,55	0,5633	0,95	0,8209	1,35	0,9438
0,16	0,1790	0,56	0,5716	0,96	0,8254	1,36	0,9456
0 17	0,1900	0,57	0,5798	0,97	0,8299	1,37	0,9473
0,18	0,2009	0,58	0,5879	0,98	0,8342	1,38	0,9490
0,19	0,2118	0,59	0,5959	0,99	0,8385	1,39	0,9507
0,20	0,2227	0,60	0,6039	1,00	0,8427	1,40	0,9523
0,21	0,2335	0,61	0,6117	1,01	0,8468	1,41	0,9539
0,22	0,2443	0,62	0,6194	1,02	0,8508	1,42	0,9554
0,23	0,2550	0,63	0,6270	1,03	0,8548	1,43	0,9569
0,24	0,2657	0,64	0,6346	1,04	0,8586	1,44	0,9583
0,25	0,2763	0,65	0,6420	1,05	0,8624	1,45	0,9597
0,26	0,2869	0,66	0,6494	1,06	0,8661	1,46	0,9611
0,27	0,2974	0,67	0,6566	1,07	0,8698	1,47	0,9624
0,28	0,3079	0,68	0,6633	1,08	0,8733	1,48	0,9637
0,29	0,3183	0,69	0,6708	1,09	0,8768	1,49	0,9649
0,30	0,3286	0,70	0,6778	1,10	0,8802	1,50	0,9661
0,31	0,3389	0,71	0,6847	1,11	0,8835	1,51	0,9661
0,32	0,3491	0,72	0,6914	1,12	0,8868	1,6	0,9763
0,33	0,3593	0,73	0,6981	1,13	0,8900	1,7	0,9838
0,34	0,3694	0,74	0,7047	1,14	0,8931	1,8	0,9891
0,35	0,3794	0,75	0,7112	1,15	0,8961	1,9	0,9928
0,36	0,3893	0,76	0,7175	1,16	0,8991	2.0	0,9953
0,37	0,3992	0,77	0,7238	1,17	0,9020	2,1	0,9970
0,38	0,4090	0,78	0,7300	1,18	0,9048	2,2	0,9981
0,39	0,4187	0,79	0,7361	1,19	0,9076	2,3	0,9989
						2,4	0,9993
						2,5	0,9996
						2,6	0,9998
						2.7	0,9999
						2,8	0,9999

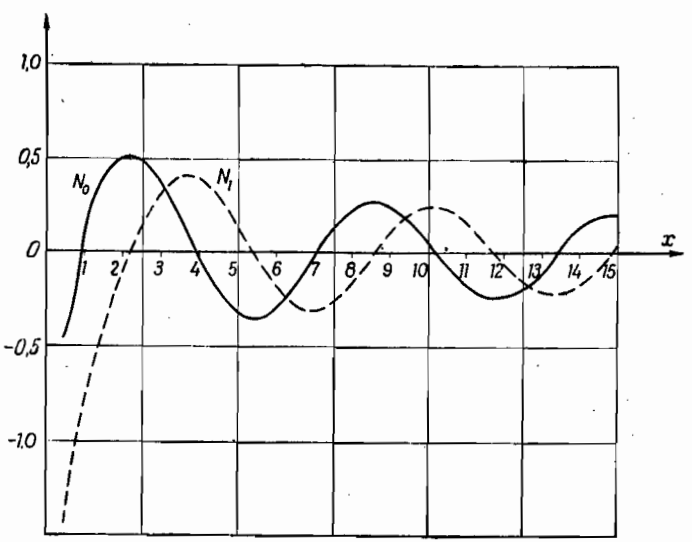
Таблица 2

Значения функций Бесселя нулевого и первого порядка от $x = 0$ до $x = 12{,}00$

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,00	+ 1,000	+ 0,000	4,00	— 0,397	— 0,066	8,00	+ 0,172	+ 0,235
0,10	+ 0,997	+ 0,050	4,10	— 0,389	— 0,103	8,10	+ 0,148	+ 0,248
0,20	+ 0,990	+ 0,099	4,20	— 0,377	— 0,139	8,20	+ 0,122	+ 0,258
0,30	+ 0,977	+ 0,148	4,30	— 0,361	— 0,172	8,30	+ 0,096	+ 0,266
0,40	+ 0,960	+ 0,196	4,40	— 0,342	— 0,203	8,40	+ 0,069	+ 0,271
0,50	+ 0,938	+ 0,242	4,50	— 0,321	— 0,231	8,50	+ 0,042	+ 0,273
0,60	+ 0,912	+ 0,288	4,60	— 0,296	— 0,257	8,60	+ 0,015	+ 0,273
0,70	+ 0,881	+ 0,329	4,70	— 0,269	— 0,279	8,70	— 0,013	+ 0,270
0,80	+ 0,846	+ 0,369	4,80	— 0,240	— 0,298	8,80	— 0,039	+ 0,264
0,90	+ 0,808	+ 0,406	4,90	— 0,210	— 0,315	8,90	— 0,065	+ 0,256
1,00	+ 0,765	+ 0,440	5,00	— 0,178	— 0,328	9,00	— 0,090	+ 0,245
1,10	+ 0,720	+ 0,471	5,10	— 0,144	— 0,337	9,10	— 0,114	+ 0,232
1,20	+ 0,671	+ 0,498	5,20	— 0,110	— 0,343	9,20	— 0,137	+ 0,217
1,30	+ 0,620	+ 0,522	5,30	— 0,076	— 0,346	9,30	— 0,158	+ 0,200
1,40	+ 0,567	+ 0,542	5,40	— 0,041	— 0,345	9,40	— 0,177	+ 0,182
1,50	+ 0,512	+ 0,558	5,50	— 0,007	— 0,341	9,50	— 0,194	+ 0,161
1,60	+ 0,455	+ 0,570	5,60	+ 0,027	— 0,334	9,60	— 0,209	+ 0,140
1,70	+ 0,398	+ 0,578	5,70	+ 0,060	— 0,324	9,70	— 0,222	+ 0,117
1,80	+ 0,340	+ 0,582	5,80	+ 0,092	— 0,311	9,80	— 0,232	+ 0,093
1,90	+ 0,282	+ 0,581	5,90	+ 0,122	— 0,295	9,90	— 0,240	+ 0,068
2,00	+ 0,224	+ 0,577	6,00	+ 0,151	— 0,277	10,00	— 0,246	+ 0,043
2,10	+ 0,167	+ 0,568	6,10	+ 0,177	— 0,256	10,10	— 0,249	+ 0,018
2,20	+ 0,110	+ 0,556	6,20	+ 0,202	— 0,233	10,20	— 0,250	— 0,007
2,30	+ 0,056	+ 0,540	6,30	+ 0,224	— 0,208	10,30	— 0,248	— 0,031
2,40	+ 0,002	+ 0,520	6,40	+ 0,243	— 0,182	10,40	— 0,243	— 0,055
2,50	— 0,048	+ 0,497	6,50	+ 0,260	— 0,154	10,50	— 0,237	— 0,079
2,60	— 0,097	+ 0,471	6,60	+ 0,274	— 0,125	10,60	— 0,228	— 0,101
2,70	— 0,142	+ 0,442	6,70	+ 0,285	— 0,095	10,70	— 0,216	— 0,122
2,80	— 0,185	+ 0,410	6,80	+ 0,293	— 0,065	10,80	— 0,203	— 0,142
2,90	— 0,224	+ 0,375	6,90	+ 0,298	— 0,035	10,90	— 0,188	— 0,160
3,00	— 0,260	+ 0,339	7,00	+ 0,300	— 0,005	11,00	— 0,171	— 0,177
3,10	— 0,292	+ 0,301	7,10	+ 0,299	+ 0,025	11,10	— 0,153	— 0,191
3,20	— 0,320	+ 0,261	7,20	+ 0,295	+ 0,054	11,20	— 0,133	— 0,204
3,30	— 0,344	+ 0,221	7,30	+ 0,288	+ 0,083	11,30	— 0,112	— 0,214
3,40	— 0,364	+ 0,179	7,40	+ 0,279	+ 0,110	11,40	— 0,090	— 0,222
3,50	— 0,380	+ 0,137	7,50	+ 0,266	+ 0,135	11,50	— 0,068	— 0,228
3,60	— 0,392	+ 0,095	7,60	+ 0,252	+ 0,159	11,60	— 0,045	— 0,232
3,70	— 0,399	+ 0,054	7,70	+ 0,235	+ 0,181	11,70	— 0,021	— 0,233
3,80	— 0,403	+ 0,013	7,80	+ 0,215	+ 0,201	11,80	+ 0,002	— 0,232
3,90	— 0,402	— 0,027	7,90	+ 0,194	+ 0,219	11,90	+ 0,025	— 0,229
						12,00	+ 0,048	— 0,223



1. График функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ — функций Бесселя или цилиндрических функций первого рода.



2. График функций $N_0(x)$ и $N_1(x)$ — функций Неймана или цилиндрических функций второго рода.

Таблица 3

Последовательные корни уравнения $J_0(\mu_n) = 0$ и соответствующие значения $|J_1(\mu_n)|$

n	μ_n	$J_1(\mu_n)$	n	μ_n	$J_1(\mu_n)$
1	2,4048	0,5191	6	18,0711	0,1877
2	5,5201	0,3403	7	21,2116	0,1733
3	8,6537	0,2715	8	24,3525	0,1617
4	11,7915	0,2325	9	27,4935	0,1522
5	14,9309	0,2065	10	30,6346	0,1442

Таблица 4

Значения функций $K_0(x)$ и $K_1(x)$

x	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,1	2,4271	9,8538	3,1	0,0310	0,0356
0,2	1,7527	4,7760	3,2	0,0276	0,0316
0,3	1,3725	3,0560	3,3	0,0246	0,0281
0,4	1,1145	2,1844	3,4	0,0220	0,0250
0,5	0,9244	1,6564	3,5	0,0196	0,0222
0,6	0,7775	1,3028	3,6	0,0175	0,0198
0,7	0,6605	1,0503	3,7	0,0156	0,0176
0,8	0,5653	0,8618	3,8	0,0140	0,0157
0,9	0,4867	0,7165	3,9	0,0125	0,0140
1,0	0,4210	0,6019	4,0	0,0112	0,0125
1,1	0,3656	0,5098	4,1	0,0098	0,0111
1,2	0,3185	0,4346	4,2	0,0089	0,0099
1,3	0,2782	0,3725	4,3	0,0080	0,0089
1,4	0,2437	0,3208	4,4	0,0071	0,0079
1,5	0,2138	0,2774	4,5	0,0064	0,0071
1,6	0,1880	0,2406	4,6	0,0057	0,0063
1,7	0,1655	0,2094	4,7	0,0051	0,0056
1,8	0,1459	0,1826	4,8	0,0046	0,0051
1,9	0,1288	0,1597	4,9	0,0041	0,0045
2,0	0,1139	0,1399	5,0	0,0037	0,0040
2,1	0,1008	0,1227	5,1	0,0033	0,0036
2,2	0,0893	0,1079	5,2	0,0030	0,0032
2,3	0,0791	0,0950	5,3	0,0027	0,0029
2,4	0,0702	0,0837	5,4	0,0024	0,0026
2,5	0,0623	0,0739	5,5	0,0021	0,0023
2,6	0,0554	0,0653	5,6	0,0019	0,0021
2,7	0,0492	0,0577	5,7	0,0017	0,0019
2,8	0,0438	0,0511	5,8	0,0015	0,0017
2,9	0,0390	0,0453	5,9	0,0014	0,0015
3,0	0,0347	0,0402	6,0	0,0012	0,0013

Редактор *А. Ф. Тулинов*
Техн. редактор *Н. А. Тумаркина*
Корректор *Ц. С. Варшавская*

* *
*

Подписано к печати 20/V 1953 г. Бумага 60×92/16. 21,25 бум. л. 42,5 печ. л. 44,35 уч.-изд. л. 41 730 тип. зн. в печ. л. Тираж 25 000 экз. Т-00043. Цена книги 13 р. 30 к. Переплет 1 р. Заказ № 197.

* *
*

4-я типография им. Евг. Соколовой
Союзполиграфпрома Главиздата Министерства культуры СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
34	6 и 7 сн.	v	$\mathfrak{v}$
35	4 сн.	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$
	3 „	$\operatorname{div}(\rho v)$	$\operatorname{div}(\rho \mathfrak{v})$
75	12 св.	$\int_{x-a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)}$	$\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}$
108	16 „	$d\dot{v}_n$	$\alpha\dot{v}_n$
288	17 „	$2\widetilde{U}_{vv}$	$2\widetilde{U}_{uv}$
291	11 сн.	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right.$	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right.$
317	11 „	$2a\rho(\varphi-\psi)$	$2a\rho\cos(\varphi-\psi)$
470	11 „	$\frac{2}{2{,}40\cdot 0{,}52}\cdot 1{,}60$	$\frac{2}{2{,}40\cdot 0{,}52}$

Зак. 197.